Toegepaste wiskunde is meer dan het oplossen van wiskundige modellen. Vaak is het opstellen van het model even belangrijk als het oplossen ervan. **Ger Koole** laat aan de hand van problemen die spelen bij call centers zien wat er allemaal komt kijken bij het oplossen van bedrijfsproblemen. Daarna houdt hij een pleidooi voor meer praktische en modelmatige aspecten in de universitaire wiskundeopleidingen.

Over wiskundig modelleren en call centers

De rol van wiskundige modellen

Centraal in de toegepaste wiskunde staat het wiskundig *model*. Een model is een vereenvoudigde beschrijving van een deel van de werkelijkheid in mathematische termen. Is een praktijkprobleem eenmaal wiskundig beschreven, dan kunnen wiskundige technieken worden gebruikt om het model op te lossen. De uitspraken over het model worden daarna terugvertaald naar de gemodelleerde werkelijkheid.

Zo kan een model van het Nederlandse wegennet inclusief reistijden behulpzaam zijn bij het plannen van uw reizen. In hoeverre u daarbij rekening wenst te houden met wisselende omstandigheden zoals files is een belangrijke modelleringskeuze. Het bepaalt in belangrijke mate de praktische bruikbaarheid van de uitkomsten, maar het bepaalt ook de noodzakelijke wiskundige technieken voor het oplossen van het model. Wiskunde is zowel behulpzaam bij het opstellen als bij het oplossen van het model.

Het centraal stellen van modellen maakt de wiskunde tot breed inzetbaar gereedschap: zodra een deel van de werkelijkheid te modelleren is, kunnen wiskundige oplossingstechnieken hierop losgelaten worden en kunnen er conclusies ten aanzien van de werkelijkheid aan worden verbonden. Er is geen principiële beperking aan de te modelleren systemen: de wiskunde leent zich evengoed voor het bestuderen van menselijke relaties als zij zich leent voor fysische relaties, en zoals we een model kunnen bouwen van de nationale economie, kunnen we dat ook doen voor uw privé-financiën.

In deze brede inzetbaarheid van de wiskunde schuilt ook een gevaar. De mogelijkheid bestaat namelijk dat in de wetenschapsuitoefening, maar ook in de dagelijkse beroepspraktijk, het model een eigen leven gaat leiden en de relatie met het oorspronkelijke probleem zoekraakt. Vanuit de praktijk gezien is het oplossen van modellen geen doel op zich; het model is een tussenstap in het oplossen van bedrijfsproblemen. De huidige gerichtheid op modeloplossen zonder toetsing aan de praktijk vervreemdt de wiskunde van haar toepassingen en plaatst haar aldus in een isolement. In de hedendaagse wiskunde is dit isolement in belangrijke mate een feit.

Van modeloplossen naar modelleren

Laten we het gebruik van wiskundig modelleren in de bedrijfspraktijk beschouwen. Zoals we kunnen verwachten, zijn modelmatige oplossingen het meest succesvol bij problemen die eenvoudig te modelleren zijn en die complexe, door niet-wiskundigen moeilijk op te lossen modellen opleveren. Een voorbeeld daarvan is voertuigroutering zoals we dat in veel transportondernemingen tegenkomen. Gegeven zijn een aantal vrachtwagenchauffeur combinaties en een aantal te bezoeken adressen.

Aan wie moeten welke adressen toegekend worden en in welke volgorde moeten ze bezocht worden, zodat de laatst binnenkomende chauffeur zo vroeg mogelijk binnen is? Dit is een klasse modellen met een duidelijke doelstelling en randvoorwaarden. De wiskundige die een soortgelijk probleem geacht wordt op te lossen, is hierbij daadwerkelijk gereduceerd tot modeloplosser. Hij (of, in uitzonderingsgevallen, zij) heeft geen inbreng in het modelbouwen zelf, wellicht met uitzondering van een statistische analyse die leidt tot een schatting van de modelparameters. De oplossing wordt vervolgens ingebouwd in een *beslissingsondersteunend systeem* dat de planner in het bedrijf assisteert bij zijn dagelijkse werkzaamheden.

De potenties van een modelmatige aanpak gaan verder dan het oplossen van kant-en-klare, door de probleembezitter aangeleverde, operationele problemen. Wil de wiskundige echter meer bijdragen dan alleen een modeloplossing, dan zal hij daar ook de benodigde kennis en vaardigheden voor moeten hebben.

Het zwaartepunt van het oplossingstraject verplaatst zich nu van het oplossen van het model naar het modelleren zelf, en van het genereren van een oplossing naar het interpreteren van oplossingen. Dus in plaats van het oplossen van vastomlijnde problemen draagt de wiskundige nu bij aan het hele oplossingstraject, vanuit zijn kwantitatieve specialisme.

Call centers

Een voorbeeld van de situatie waarin de wiskundige een bijdrage dient te leveren aan het hele oplossingstraject, dus inclusief het modelleren en het terugvertalen, is de problematiek die speelt bij *call centers*. Een call center is een groep mensen die telefonische diensten uitvoert.
Enkele voorbeelden zijn informatielijnen van de Belastingtelefoon en het openbaar vervoer en telefonische verkoop bij postorderbedrijven. Het inroosteren van personeel in call centers draait om het afstemmen van de personele bezetting op het aanbod van inkomende gesprekken. Hiervoor bestaan eenvoudige wachttijdtheoretische modellen.
Het bekendste is het Erlang vertragingsmodel, naar een Deense ingenieur van het begin van de vorige eeuw (zie kader 1). Het Erlang vertragingsmodel houdt rekening met de onvoorspelbaarheid van het aanbod: gesprekken komen op willekeurige tijdstippen binnen en hebben niet allemaal dezelfde gespreksduur. Wat nodig is als invoer voor de Erlang formule is het verwachte aantal aankomsten per tijdseenheid, de verwachte gespreksduur en het aantal agenten. De uitvoer is het behaalde serviceniveau, bijvoorbeeld de verwachte wachttijd voordat een beller een medewerker aan de lijn krijgt, of de kans dat een beller langer dan 20 seconden moet wachten.
Door het aantal agenten te variëren kan het minimum aantal agenten dat benodigd is om het gewenste serviceniveau te behalen worden bepaald. Deze analyse staat of valt met de correctheid van de invoer. Het blijkt echter dat de Erlang formule heel gevoelig is voor afwijkingen in het verwachte aanbod, zeker bij relatief hoog aanbod. De steilte dichtbij de asymptoot van de grafiek van de verwachte wachttijd als functie van de belasting is goed te zien in figuur 1.

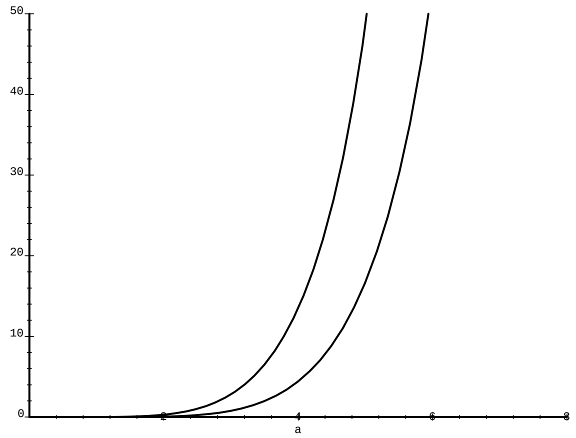

fig. 1 Grafiek van W in seconden voor 7 (links) en 8 (rechts) bedienden voor een verwachte gespreksduur van 5 minuten en variërende belasting.

Een onderschatting van dit verwachte aanbod leidt tot onacceptabele wachttijden; een overschatting leidt tot onderbezette werknemers en dus productiviteitsverlies. Een

Kader 1: de Erlang formule

De Erlang formule gaat ervan uit dat de tussenaankomsttijden en de gesprekstijden exponentieel verdeeld zijn, met parameters λ en $1/\beta$. Dit komt neer op gemiddeld λ aankomsten per tijdseenheid en een verwachte gesprekstijd van β.
Onder de exponentiële aanname wordt het wachtrijmodel een zogenoemd Markov-proces. Dit stelt ons in staat allerlei grootheden uit te rekenen, zoals de verwachte wachttijd W. Laten er s bediendes zijn en definieer de belasting a als $a = \lambda \times \beta$. De verwachte wachttijd wordt nu gegeven door

$$\text{W = Gem. wachttijd} =$$

$$= \frac{\text{Kans op vertraging} \times \text{Gem. bedieningsduur}}{\text{Overcapaciteit}}$$

$$= \frac{C(s, a) \times \beta}{s - a}.$$

Merk op dat deze formule alleen zinvol is voor $a < s$; als $a \geq s$ is er meer aanbod dan verwerkingscapaciteit en bouwt de wachtrij naar ∞ op. Dit is slechts theorie, in werkelijkheid haken bellers onder deze omstandigheden massaal af. We nemen dus $W = \infty$ als $a \geq s$.
De formule voor $C(s, a)$ is

$$C(s, a) =$$

$$= \frac{a^s}{(s-1)!(s-a)} \left[\sum_{j=0}^{s-1} \frac{a^j}{j!} + \frac{a^s}{(s-1)!(s-a)} \right]^{-1}.$$

Laten we een voorbeeld doorrekenen. Stel er is sprake van gemiddeld één call per minuut, dus $\lambda = 1$ en een bedieningsduur van gemiddeld 5 minuten, dus $\beta = 5$. De belasting is dus $a = \lambda \times \beta = \times 5 = 5$. Laten we zeven agenten inzetten, dan is er sprake van 2 Erlang overcapaciteit. Doorrekenen van $C(s, a)$ middels een klein computerprogramma levert $C(7{,}5) \approx 0.32$. Nu kunnen we de formule voor de verwachte wachttijd invullen:

$$\text{W = Gem. wachttijd} = \frac{C(s, a) \times \beta}{s - a} \approx \frac{0.32 \times 5}{2} =$$

$$= 0.8 \text{ minuten} = 48 \text{ seconden.}$$

Het inzetten van 8 agenten geeft

$$W = \frac{C(s, a) \times \beta}{s - a} \approx \frac{0.17 \times 5}{3} =$$

$$= 0.2833 \text{ minuten} = 17 \text{ seconden.}$$

Dus het inzetten van één agent extra reduceert de wachttijd met ongeveer een factor 3. U kunt het zelf desgewenst narekenen met de Erlang calculator op www.cs.vu.nl/~koole/erlang.html.
De verwachte wachttijd in seconden als functie van a, bij $\beta = 5$ minuten, is voor $s = 7$ en $s = 8$ ook te vinden in figuur 1.

correcte schatting van de werklast is dus van cruciaal belang. Er zijn ettelijke roosterpakketten speciaal voor call centers op de markt die dit werk uit handen van de planner nemen, en die voor zeg elk kwartier een schatting van het aanbod maken. Managers ondervinden echter vaak dat dit de problemen niet oplost: gemiddeld over een langere periode klopt de schatting wel, maar op de meeste dagen blijkt er een significante afwijking te zijn, die ingrijpen noodzakelijk maakt.
Het inzicht dat in de praktijk de kwaliteit van deze puntschatting nauwelijks verbeterd kan worden en dat men dus om zal moeten gaan met onzekerheid in het verwachte aanbod, opent de weg naar meer structurele oplossingen.
Deze nemen de variabiliteit in verwacht aanbod als gegeven, kwantificeren het en spelen erop in door het inbrengen van flexibiliteit in bezetting en taakuitvoering. Hierbij denken we bijvoorbeeld aan flexibel inzetbaar personeel of het afhankelijk van het aanbod aan inkomende calls laten verrichten van ander werk, het zogenaamde *call blending*.
Deze oplossingen kunnen natuurlijk op hun beurt weer in een beslissingsondersteunend systeem worden ingebouwd. Vaak is dit echter niet nodig, aan het opgebouwde inzicht heeft een manager genoeg om effectieve maatregelen te nemen.

Het leren modelleren

Cruciaal in dit voorbeeld is dat de moeilijkheid ligt in het modelbouwen, niet in het oplossen van het model. Dus om de stap te maken van het oplossen van door probleembezitters aangedragen modellen naar het daadwerkelijk meedenken met de manager is meer nodig dan alleen vaardigheid in het modeloplossen. Zo is kennis van het specifieke toepassingsgebied, *domeinkennis*, noodzakelijk. Een wachtrijmodel kan zijn diensten bewijzen in zowel call centers als in logistiek, maar de specifieke domeinomstandigheden vragen om een andere wijze van implementatie. Maar domeinkennis alleen is niet voldoende, het moet ingebed zijn in kennis en ervaring op het gebied van het modelleren zelf.
Een deel van deze kennis kan in de beroepspraktijk worden opgedaan, maar er zijn goede redenen om dit al in de opleiding aan bod te laten komen. Een van de redenen is de grote behoefte in het bedrijfsleven aan dit soort probleemoplossers. Merk op dat nu de modelbouwer een centrale rol heeft gekregen in het oplossingsproces, er ook communicatief meer van hem verwacht wordt. Het eindproduct zal minder vaak een softwaretool zijn, maar vaker een rapport en een presentatie van de resultaten. Dit vergt meer van de communicatievaardigheden van de student.
Dit profiel van de wiskundige professional komt niet overeen met de kennis en vaardigheden van de toegepast wiskundigen en econometristen die nu op de arbeidsmarkt komen. Het idee dat modelleren ook op wetenschappelijke wijze kan worden onderwezen, wordt vaak niet onderkend of zelfs afgewezen: modelleren is immers een *kunst* en geen *kunde*. Laat ik dit belangrijke punt met de Erlang formule illustreren.

Over de Erlang formule

De basis van de wachttijdtheorie en zijn toepassingen in onder andere de telecommunicatie is de Erlang formule. In veel wiskunde- en econometrieopleidingen worden er enkele colleges gereserveerd om deze af te leiden. Van de student wordt verwacht de formule en vaak ook de afleiding te kunnen reproduceren. Maar begrijpt de student dan ook de consequenties van deze formule?
Voor call centers en andere toepassingsgebieden is het cruciaal te weten dat de Erlang formule bij hoge belastingen zeer gevoelig is voor kleine wijzigingen in aanbod, zoals we reeds zagen. Ook het gedrag onder schaling in tijd en grootte zijn belangrijk voor toepassingen (zie kader 2).
Voor het implementeren in een softwaretool volstaat het de Erlang formule te kennen. Maar om te begrijpen hoe belangrijk het is een goede schatting van het aanbod te maken is *inzicht* nodig. De modelbouwer heeft dit inzicht niet nodig. Immers, hij implementeert slechts de formule. Iemand die bezettingsproblemen in call centers oplost en niet alleen de software daartoe aanlevert, zal vaak wel van de praktische implicaties op de hoogte moeten zijn, en daarmee dit inzicht moeten hebben.

Formalisme en intuïtie

Een vraag dient zich aan: als de wiskundige dit inzicht niet heeft, wie dan wel? Van een call center manager, zonder kwantitatieve achtergrond, kan deze kennis niet verwacht worden.
Dit legt de vinger op de zere plek en verklaart waarom veel van dit soort software minder succesvol is dan de producent belooft. Door een gebrek aan modelmatige kennis en inzicht van probleembezitter én modeloplosser wordt het pakket niet optimaal gebruikt en blijven openstaande modelleringsproblemen liggen. Dit laat zien dat zelfs bij ‘eenvoudig’ modelleerbare problemen meer dan alleen een formule of methode noodzakelijk is om het bedrijfsprobleem op te lossen.
Het laat ook zien dat het bestuderen van een grafiek of experimenteren met een computertool meer inzicht kan geven dan een wiskundige afleiding en dat de formule pas tot leven komt als het gebruik in de praktijk wordt toegelicht.

We zien hier een dilemma tussen formalisme en intuïtie, dat vaker in het wiskundeonderwijs naar voren komt. De wiskundige is geneigd zo veel mogelijk formeel te bewijzen, maar verzuimt daarbij ook de intuïtie te ontwikkelen. De wiskundige dient beide ontwikkeld te hebben. Laten we de verkregen inzichten vertalen naar de opleidingen.

Kader 2: Schaling

Een belangrijke eigenschap van de Erlang formule, bekend bij elke call center manager, is het feit dat grote call centers efficiënter werken. Neem als gedachtenexperiment twee dezelfde onafhankelijke call centers. Maak het nu mogelijk dat wachtende bellers bij het ene call center geholpen worden bij het andere, zodat beide call centers als een groot (virtueel) call center opereren. Dit verlaagt de wachttijd. In de praktijk is dit inderdaad wat call centers doen. Dit fenomeen is geïllustreerd in figuur 2.

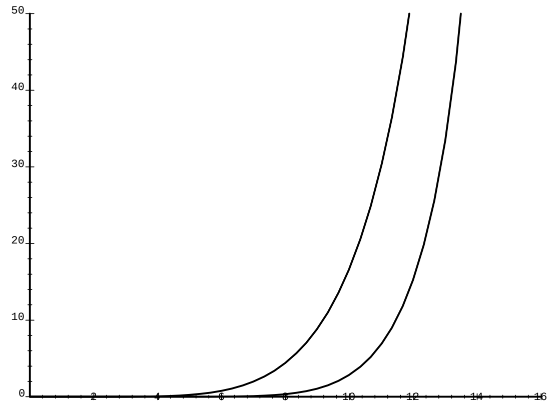

fig. 2 Grafiek van W in seconden voor twee centra van acht bedienden (links) en één centrum van 16 bedienden (rechts) voor een verwachte gespreksduur van vijf minuten en variërende belasting

Een andere manier van schalen is schalen in tijd. Stel dat de verwachte bedieningsduur van een call center gehalveerd wordt, terwijl de belasting gelijk blijft, met andere woorden, het aantal aankomsten verdubbelt. Dit komt neer op het 'inkrimpen' van de tijd, en de wachttijd zal dus mee krimpen! Dit is geïllustreerd in figuur 3. Het verklaart waarom call centers met korte gespreksduren (bijvoorbeeld telefonistes die doorverbinden) minder moeite hebben de servicenormen te halen dan call centers met lange gespreksduren (zoals help desks).

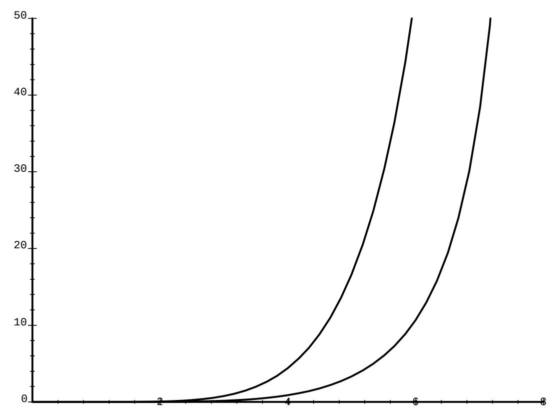

fig. 3 Grafiek van W in seconden voor acht bedienden en een verwachte gespreksduur van vijf minuten (links) en één minuut (rechts) en variërende belasting

De huidige wiskundeopleidingen

Traditioneel is de wiskundeopleiding gericht op het opleiden van wetenschappers, met de nadruk op potentiële promotiemedewerkers. De laatste decennia hebben veel opleidingen het curriculum al aangepast aan het meer bedrijfsgerichte beroepsperspectief. Dit beperkt zich echter tot het doceren van toepasbare wiskunde, het modeloplossen zelf. Er wordt nauwelijks ingegaan op alle aspecten die bij het toepassen van deze wiskunde naar voren komen. Modelleren hoort echter ook deel uit te maken van de wiskundeopleidingen. Docenten worden hier opgeleid en in het belang van het wiskundeonderwijs op het voortgezet onderwijs en de beeldvorming van het universitaire onderwijs is het van groot belang dat de praktische relevantie uitgebreid aan bod komt. Dat gaat verder dan een verplicht vak over de maatschappelijke functie van de wiskunde. Dit gaat onder andere over het zelf leren modelleren. Ook dit past heel goed in een strikt wetenschappelijke opleiding.

Bedrijfswiskunde

Naast de reguliere wiskundeopleiding stel ik me een opleiding voor die opleidt tot academisch gevormde 'professionals'. Ik zal deze opleiding aanduiden met *bedrijfswiskunde*.

In een dergelijke opleiding zou het probleemoplossen centraal moeten staan. Allereerst zal er een brede wiskundige basis moeten worden gelegd. Onder andere kansrekening in al zijn aspecten en optimalisatie zullen hier uitgebreid aan de orde komen. De nadruk zal hier liggen op begrip en niet op bewijzen. ICT geeft ons de mogelijkheid resultaten inzichtelijk te maken en de student zelf aan de gang te laten gaan met de theorie.

Modelleeraspecten en meer theoretische aspecten zullen elkaar af moeten wisselen om de theorie van verschillende kanten te belichten. Bedrijfskunde en informatica komen uitgebreid aan de orde. In de bedrijfskundige vakken zal de nadruk liggen op de consultancypraktijk en op logistiek, waarbij de kwantitatieve aspecten naar voren komen. De informaticavakken beslaan de breedte van het leren programmeren tot beslissingsondersteunende systemen en kunstmatige intelligentie. Naast deze theorievakken is er ruimte voor computervaardigheden, van Excel tot Maple. In projecten wordt de geleerde stof in samenhang gebruikt voor het oplossen van (bedrijfs)problemen. Computer- en communicatievaardigheden zijn hieraan gekoppeld.

Ten slotte zullen de hogerejaarsvakken steeds meer een multi-disciplinair karakter gaan vertonen, waarin onderwerpen als het gebruik van informatie in organisaties, de theorie van het wiskundig modelleren en wiskundige specialismen in onderlinge samenhang aan de orde komen.

De specialisatierichtingen corresponderen met toepassingsgebieden. Enkele mogelijkheden zijn human resource planning, data mining, logistiek, tele- en commu-

nicatienetwerken, en financiële wiskunde. Met een dergelijk samenhangend programma moet het mogelijk zijn een nieuwe groep studenten voor een wiskundeopleiding te interesseren.
Dit zou een belangrijke stap kunnen zijn om de toekomst van de universitaire wiskunde veilig te stellen.

Dit is een aangepaste versie van mijn oratie, gehouden op 30 november 2000 aan de Vrije Universiteit.
De volledige tekst inclusief verwijzingen is te vinden op www.cs.vu.nl/~koole/oratie.html.

Ger Koole, Vrije Universiteit, Amsterdam

In memoriam Wolfgang Reuter

Op maandag 12 februari is Wolfgang Reuter plotseling aan een hartaanval overleden. Daarmee is een einde gekomen aan een werkzaam leven dat sterk in het teken stond van het wiskundeonderwijs. Wolfgang was niet alleen een begenadigd docent, maar hij leverde ook vele bijdragen aan ontwikkelingen en vernieuwingsprojecten.
In de tijd van het Hewet-project werkte hij op de Middenschool in Lelystad, een van de Hewet-volgscholen. Toen al, inmiddels bijna twintig jaar gelden, was Wolfgang bezig met praktische opdrachten en werkstukken bij wiskunde A. Zijn huidige school was het Schoter SG in Haarlem. Daar was hij een van de drijvende krachten bij de invoering van de tweede fase.
Naast zijn veeleisende onderwijsbaan had Wolfgang altijd nevenactiviteiten die veel van hem vroegen. Zo was hij ten tijde van het Profi-project voor een halve baan gedetacheerd bij het Freudenthal Instituut voor de ontwikkeling van wiskunde B. Hij was in het bijzonder betrokken bij het ontwerpen van de Profi-pakketten voor de nieuwe domeinen Vlakke Meetkunde en Discrete Dynamische Modellen. Ook leverde hij een grote bijdrage aan het schrijven van de Trajectenboeken, de handreikingen voor auteursteams. Zijn ongelooflijke preciezie was daarbij een onmisbare eigenschap.
Verder maakte Wolfgang enkele jaren deel uit van de leesredactie van de *Nieuwe Wiskrant*. Zijn feedback op de kopij was altijd uitermate grondig en doordacht. Maar Wolfgang is in wiskundig Nederland vooral ook bekend geworden als auteur van *Moderne Wiskunde*.
Degenen die met hem hebben samengewerkt, kennen hem als een beminnelijke collega, die altijd open stond voor nieuwe ideeën en tegelijkertijd in staat was te taxeren of deze voor zijn leerlingen zinvol en onderwijsbaar zouden zijn.
Hij was veeleisend voor zich zelf, zonder die druk aan anderen op te leggen. Bescheiden. Niet op de voorgrond tredend. Met beide benen in de praktijk van het dagelijkse onderwijs. Voortdurend bezorgd over de kwaliteit van ons wiskundeonderwijs. Op de laatste Nationale Wiskunde Dagen was hij zichtbaar genietend aanwezig. Voor velen was dat het laatste contact met Wolfgang. Zijn overlijden is een groot verlies voor het wiskundeonderwijs.