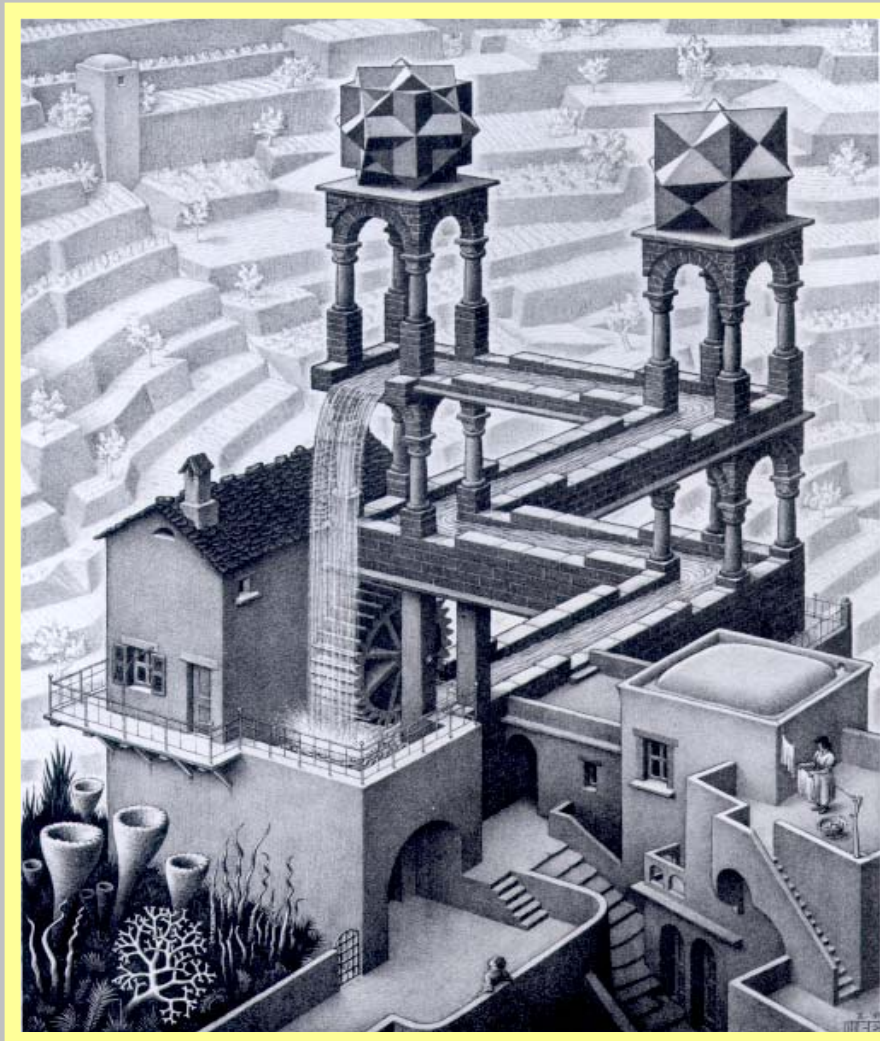




Vrije Universiteit Brussel

# HYDRAULICA

prof. dr. ir. F. De Smedt



*M.C. Escher, Waterval*

# HYDRAULICA

**CURSUSNOTA'S**

**september 2010**

**prof. dr. ir. F. De Smedt**

**Vakgroep Hydrologie en Waterbouwkunde  
Faculteit Ingenieurswetenschappen  
Vrije Universiteit Brussel  
Pleinlaan 2, 1050 Brussel  
Bureau T120 - tel. 02/629.35.47  
Email: [fdesmedt@vub.ac.be](mailto:fdesmedt@vub.ac.be)  
Home-page: <http://homepages.vub.ac.be/~fdesmedt/>  
Secretariaat T115 - tel. 02/629.30.21 - fax. 02/629.30.22**

## INHOUDSLIJST

---

<b>INLEIDING.....</b>	<b>1</b>
<b>1. EIGENSCHAPPEN VAN VLOEISTOFFEN.....</b>	<b>4</b>
1.1 Soorten materialen.....	4
1.2 Druk.....	5
1.3 Densiteit .....	7
1.4 Viscositeit.....	10
1.5 Cohesie, adhesie en oppervlaktespanning.....	17
<b>2 BASISVERGELIJKINGEN .....</b>	<b>21</b>
2.1 Basisbegrippen .....	21
2.2 Behoud van massa.....	24
2.3 Behoud van impuls.....	26
2.4 Vloeistofstroming.....	29
<b>3 HYDROSTATICA .....</b>	<b>32</b>
3.1 De hydrostatische wet .....	32
3.2 Metingen van de druk en de piëzometrische hoogte .....	34
3.3 Krachten uitgeoefend door vloeistoffen in rust.....	37
3.4 Ondergedompelde en drijvende voorwerpen .....	40
3.5 Vloeistoffen in een permanent versnellingsveld .....	43
<b>4 STROMING ZONDER WRIJVING .....</b>	<b>46</b>
4.1 Stromingsvergelijkingen .....	46
4.2 De wet van Bernoulli.....	50
4.3 Toepassingen van de wet van Bernoulli.....	53
4.4 Berekening van krachten.....	60
4.5 Toepassingen van de formules van Euler .....	61
<b>5 VISKEUZE STROMING .....</b>	<b>65</b>
5.1 Stromingsvergelijkingen .....	65
5.2 Stroming in een rechte buis.....	65
5.3 Ladingsverlies en wrijving in een buis.....	68
5.4 Stroming over een recht oppervlak .....	70
5.5 Ladingsverlies bij een viskeuze stroming over een oppervlak.....	73
5.6 Het experiment van Reynolds .....	75

<b>6</b>	<b>TURBULENTE STROMING .....</b>	<b>80</b>
6.1	Stromingsvergelijkingen .....	80
6.2	De mengtheorie van Prandtl .....	81
6.3	Turbulente stroming in een buis .....	86
6.4	Speciale verliezen in leidingen .....	92
6.5	Turbulente stroming met een vrij oppervlak .....	95
6.6	De vergelijking van Manning .....	100
<b>7</b>	<b>LEIDINGEN EN AFVOERKANALEN .....</b>	<b>103</b>
7.1	Dimensionering van een leiding .....	103
7.2	Dimensionering van een pomp in een leiding .....	104
7.3	Leidingsnetwerken .....	107
7.4	Afvoerkanalen .....	111
7.5	Krachten op ondergedompelde voorwerpen .....	115
<b>8</b>	<b>STROMING IN POREUZE MEDIA.....</b>	<b>118</b>
8.1	Stromingsvergelijkingen .....	118
8.2	Porositeit en conductiviteit .....	122
8.3	Hydrostatica in poreuze media .....	126
8.4	Onverzadigde stroming .....	130
8.5	Verzadigde stroming .....	135
	<b>REFERENTIES .....</b>	<b>142</b>

## INLEIDING

---

De vloeistofmechanica is een onderdeel van de mechanica, waarbij de beweging van vloeistoffen bestudeerd wordt. Deze wetenschap is gebaseerd op de wetten van de continuüm mechanica, aangevuld met specifieke eigenschappen van vloeistoffen. De hydraulica is een onderdeel van de vloeistofmechanica, waarbij voornamelijk de beweging van water bestudeert wordt (Hydro is het Griekse woord voor water). De hydraulica steunt eveneens op de wetten van de continuüm mechanica, maar wordt aangevuld met specifieke eigenschappen van water en empirische formules gebaseerd op proefondervindelijk onderzoek.

De vloeistofmechanica en hydraulica werden voornamelijk ontwikkeld vanaf de 17<sup>de</sup> eeuw. De belangrijkste wetenschappers, die hieraan hebben bijgedragen zijn:

- Archimedes (287-212v.C.): Griekse wetenschapper in Syracuse, Sicilië, die de wetten vastlegde van ondergedompelde en drijvende voorwerpen.
- Simon Stevin (1548-1620): Vlaamse wetenschapper, publiceerde “De Beghinselen des Waterwichts” in 1586, waarin hij de wetten van de hydrostatica uiteenzet.
- Benedetto Castelli (1578-1643): leerling van Galileo, publiceerde “Della misura dell’acque corrent” in 1628, waarin hij in navolging van Leonardo da Vinci de wet formuleerde dat de snelheid maal de doorsnede (dit is het debiet) constant is bij permanente stroming.
- Evangelista Torricelli (1608-1647): Italiaanse wis- en natuurkundige, opvolger van Galileo aan de Florentijnse Academie; toonde voor het eerst het bestaan aan van de atmosferedruk met behulp van een kwikbarometer; hij is ook de grondlegger van de hydrodynamica door zijn studie van uitstroming doorheen openingen.
- Blaise Pascal (1623-1662): Franse wis- en natuurkundige, onder meer uitvinder van de hydraulische pers en de spuit; tussen 1646 en 1648 gaf hij een verklaring voor de druk in een vloeistof en later ook voor de luchtdruk.
- Isaac Newton (1642-1727): Engelse wis- en natuurkundige en professor te Cambridge, bestudeerde het verband tussen krachten en beweging en in het bijzonder de wrijving veroorzaakt door een slinger in stilstaand water.
- Giovanni Poleni (1683-1761): Italiaan, professor in de astronomie en fysica aan de universiteit van Padua, waar hij in 1738 een laboratorium uitbouwde voor fysische experimenten, o.a. stroming van water.
- Henri de Pitot (1695-1771): Franse wiskundige, astronoom en hydraulicus, die in 1732 een instrument uitvond om de stroomsnelheid van water te meten, de zogenaamde pitotbuis. Hij gebruikte dit apparaat om de stroming en het debiet in de Seine op te meten.
- Daniel Bernoulli (1700-1782): Zwitserse professor in de wiskunde, botanie, anatomie en fysica; ontving 10 maal de prijs van de Franse Academie voor wetenschappen; formuleerde in zijn werk “Hydrodynamica, de viribus et motibus fluidorum” in 1738 voor het eerst wetten voor vloeistofstroming.
- Leonhard Euler (1707-1783): Zwitserse wis- en natuurkundige; professor aan de Berlijnse Academie en de universiteit van St. Petersburg; vriend van Daniel Bernoulli; hij formuleerde de wetten voor de stroming van perfecte vloeistoffen in “Principes généraux du mouvement des fluides”, 1757.



- Pierre Louis Georges Du Buat (1734-1809): introduceert het begrip hydraulische straal in “Principles d'hydraulique, vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du gouvernement”, 1786.
- Joseph Louis Lagrange (1736-1813): Franse wis- en sterrenkundige; op 19 jaar professor te Turijn, daarna directeur van de Berlijnse Academie en professor aan de École Polytechnique van Parijs; publiceerde belangrijke werken over wiskunde, mechanica en astronomie en was hoofd van de commissie voor de invoering van het metriekstelsel.
- Antoine de Chézy (1718-1798): Franse ingenieur die een kanaal ontwierp voor de watervoorziening van Parijs en in 1768 een formule opstelde om het debiet te berekenen; lesgever en later directeur (1798) van de Ecole Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées.
- Giovanni Battista Venturi (1746-1822): Italiaanse natuurkundige, die de stroming van water bestudeerde en een methode ontwikkelde om het debiet te meten, hetgeen we nu de venturi-meter noemen.
- Claude Navier (1785-1836): Frans ingenieur, die de basiswetten opstelde voor stroming van viskeuze fluïda.
- Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797-1884): Duits fysicus en hydraulisch ingenieur, die laminaire en turbulente stroming bestudeerde.
- Jean-Louis Marie Poiseuille (1799-1869): Frans natuurkundige die de stroming van vloeistoffen in leidingen bestudeerde, omdat hij geïnteresseerd was in de circulatie van de bloedsomloop; hij formuleerde voor het eerst de wet voor laminaire stroming in leidingen; de eenheid poise voor viscositeit werd naar hem genoemd.
- Henri Philibert Gaspard Darcy (1803-1858): Frans ingenieur, verantwoordelijk voor de watervoorziening in Dijon; stelde proefondervindelijk wetten op voor stroming van water doorheen zandfilters en leidingen, weergegeven in “Les Fontaines Publique de la Ville de Dijon, Delmont, Paris, 1856”; de basiswet voor grondwaterstroming is naar hem genoemd.
- Henri Arsène Jules Etienne Juvénal Dupuit (1804-1866): Frans ingenieur, stelde een formule voor om grondwaterstroming te berekenen.
- Julius Weibach (1806-1871): Duits hydraulicus, die de turbulente stroming in leidingen bestudeerde.
- William Froude (1810-1879): Engelse scheepsbouwkundige.
- Robert Manning (1816-1897): hoofdingenieur bij de Office of Public Works, Ierland; stelde in 1890 een formule op voor de berekening van de stroming in rivieren en kanalen.
- George Gabriel Stokes (1819-1903): Britse wis- en natuurkundige, die de basiswetten van de hydrodynamica opstelde; de eenheid stokes voor kinematische viscositeit werd naar hem genoemd.
- Osborne Reynolds (1842-1912): Britse wis- en natuurkundige; hij onderzocht turbulente stroming en stelde in 1883 een methode voor om laminaire en turbulente stroming te onderscheiden.
- Ludwig Prandtl (1874-1953): Duits natuurkundige, professor aan de universiteit van Göttingen, die de wetten van de grenslaag opstelde en grondlegger is van de moderne vloeistofdynamica.
- Lewis Ferry Moody (1880-1953): Amerikaanse onderzoeker, die een methode op punt stelde om de stromingsweerstand in leidingen te berekenen.
- Theodore von Kármán (1881-1963): Hongaarse wetenschapper, studeerde bij Prandtl in Göttingen, werd daarna professor aan de universiteit van Aken en later aan de California Institute of Technology in de VS; grondlegger van de theorie van de turbulente stroming.

Het doel van deze cursus is de basisprincipes, -eigenschappen en -wetten van de vloeistofstroming aan te leren. De onderwerpen die hierbij aan bod komen zijn, o.a.:

- Eigenschappen van vloeistoffen, zoals dichtheid, viscositeit en oppervlaktespanning; welke parameters hierbij van belang zijn, hoe deze bepaald worden, enz.
- Fysische grootheden, zoals druk, snelheid en debiet, en hoe deze gemeten of berekend kunnen worden.
- Speciale fenomenen zoals capillariteit, cavitatie, drijvende voorwerpen, turbulentie, enz.
- Kenmerken van verschillende stromingsregimes, zoals perfecte-, laminaire-, turbulente- of poreuze-stromingen.
- Berekenen van krachten op structuren uitgeoefend door in rust of in beweging zijnde vloeistoffen.
- Het ontwerpen van leidingen, pompen, afvoerkanalen, e.d.

Meer gespecialiseerde en gevorderde onderwerpen komen later aan bod in andere cursussen, zoals “Rivierhydraulica” en “Surface water hydrology” in het 1<sup>e</sup> jaar Master in de Ingenieurwetenschappen Bouwkunde, en “Waterbouw en -beheer” in het 2<sup>e</sup> jaar Master in de Ingenieurwetenschappen Bouwkunde.

Voor deze cursus wordt verondersteld dat een aantal basisbegrippen gekend zijn uit de vector- en tensorrekening, zoals scalair en vectorieel product, gradiënt, divergentie en rotatie, en uit de mechanica, zoals plaats, tijd, massa, snelheid, versnelling, kracht en energie, alsook begrippen uit de continuümmechanica, zoals spanningen, vervormingen, behoud van massa, en impulsvergelijking. Voor de dimensies worden volgende symbolen gebruikt: L voor lengte, T voor tijd, M voor massa en  $F = ML/T^2$  voor kracht. Alle grootheden worden uitgedrukt in SI-eenheden: m (meter), s (seconde), kg (kilogram) en de daarvan afgeleide eenheden, tenzij expliciet anders vermeld wordt. Alle eenheden worden geschreven zonder hoofdletter, maar de afkorting wordt wel geschreven met een hoofdletter indien de eenheid afgeleid is van een eigennaam. Zo is de eenheid van massa “kilogram”, afgekort tot kg, maar voor kracht is dit “newton”, afgeleid van Newton, en de afkorting is N. Soms worden voorvoegsels gebruikt, zoals  $\mu$  (micro =  $10^{-6}$ ), m (milli =  $10^{-3}$ ), c (centi =  $10^{-2}$ ), k (kilo =  $10^3$ ), M (mega =  $10^6$ ) en G (giga =  $10^9$ ).

Enkele nuttige referentiewerken zijn:

- Berlamont, J., 1992. Hydraulica. Wouter Uitgeverij, Leuven, 472 pp. ISBN 90-5497.003-0.
- Çengel, Y.A, and J.M. Cimbala, 2006. Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications, McGraw-Hill: 956 pp. ISBN 0-07-247236-7.
- Nortier, W. en P. de Koning, 1991. Toegepaste vloeistofmechanica - Hydraulica voor waterbouwkundigen. Stam techniek, 489 pp. ISBN 90-40-10.318-6.

Deze boeken en nog vele andere zijn aanwezig in de bibliotheek van de VUB.

## 1. EIGENSCHAPPEN VAN VLOEISTOFFEN

---

### 1.1 Soorten materialen

De eigenschappen van materialen worden voornamelijk bepaald door de beweging van de moleculen en aantrekkingskrachten tussen de moleculen. Materialen worden ingedeeld in vaste stoffen, vloeistoffen en gassen, afhankelijk van de grootte van de aantrekkingskrachten en de bewegingsvrijheid van de moleculen. Bij vaste stoffen zijn de aantrekkingskrachten zo groot dat de moleculen zich zeer dicht naast elkaar bevinden in een vast patroon. Hierdoor kan de vorm en het volume van een vast materiaal slechts in zeer beperkte mate veranderen onder invloed van uitwendige krachten. In de continuüm mechanica worden de vervormingen van vaste stoffen bestudeerd door een verband te leggen tussen de spanningen en de vervormingen, hetgeen verder uitgewerkt wordt in de elasticiteitstheorie en de sterkteleer.

Gassen daarentegen kenmerken zich door zeer kleine aantrekkingskrachten tussen de moleculen, waardoor ze vrij van elkaar kunnen bewegen. Hierdoor bezit een gas geen vast volume of vorm. De moleculen van een gas verspreiden zich dan ook volledig in de ruimte waarin het gas zich bevindt. Het uiteindelijk volume en de vorm worden dus bepaald door de omgeving. In de continuümmechanica wordt de vervorming of beweging van een gas verklaard door een verband te leggen tussen spanningen en verplaatsingssnelheden. De eigenschappen van gassen worden bestudeerd in de chemie en fysica, en vooral in de aërodynamica.

De eigenschappen van vloeistoffen situeren zich tussen die van vaste stoffen en gassen, omdat vloeistoffen gekenmerkt worden door gemiddelde aantrekkingskrachten tussen de moleculen. Hierdoor zijn de moleculen in zekere mate aan elkaar gebonden maar is er toch nog veel vervorming mogelijk. Als gevolg hiervan hebben vloeistoffen een vrij constant volume maar geen vaste vorm. In afwezigheid van uitwendige krachten zal een vloeistof een bolvorm aannemen, maar onder invloed van een uitwendige kracht zal een vloeistof de vorm aannemen van de ruimte waarin ze gedwongen wordt. Dit gedrag is te wijten aan het feit dat vloeistoffen geen weerstand kunnen bieden aan schuifspanningen. Onder invloed van schuifspanningen gaan vloeistoffen dus bewegen of vloeien. In de continuümmechanica wordt er voor vloeistoffen een verband gelegd tussen spanningen en verplaatsingssnelheden, zoals bij de gassen. Men spreekt dan globaal over fluïda, een verzamelnaam voor zowel vloeistoffen als gassen. Echter bij praktische toepassingen moet men dikwijls wel een onderscheid maken tussen deze twee soorten stoffen en is het aangewezen om vloeistoffen apart te behandelen.

De moleculen in een materiaal bewegen zich ook relatief ten opzichte van elkaar, wat aangeduid wordt als moleculaire beweging. Bij vaste stoffen wordt door de grote aantrekkingskrachten tussen de moleculen de beweging gereduceerd tot een vibratie rondom een evenwichtstoestand. Daarentegen bewegen de moleculen van gassen zich met een zeer grote snelheid bijna ongehinderd doorheen de ruimte waarin het gas zich bevindt. De moleculen van een vloeistof bewegen zich zoals bij een gas met een zeer grote snelheid, maar de verplaatsingen zijn beperkt omdat de moleculen voortdurend met elkaar in botsing zijn. De snelheden zijn in de orde van grootte van 900 m/s, waarbij er slechts afstanden worden afgelegd van ongeveer  $10^{-10}$  m. Dergelijke bewegingen worden gekwantificeerd door middel van de fysische grootheden temperatuur en warmte, waarbij de temperatuur een maat is voor de intensiteit van de moleculaire beweging en de warmte een uitdrukking is van de energie van deze beweging. Bij stijgende temperatuur worden de afstanden tussen de moleculen



groter waardoor de aantrekkingskracht tussen de moleculen afneemt. Hierdoor zal bij een kritische waarde van de temperatuur de vloeistof veranderen in een gas. Daarentegen komen moleculen dicht bij elkaar bij dalende temperatuur, waardoor de aantrekkingskrachten toenemen en bij een zekere kritische waarde de vloeistof zal veranderen in een vaste stof. Dergelijke fenomenen worden niet bestudeerd in de vloeistofmechanica of hydraulica maar wel in de scheikunde en thermodynamica..

In de vloeistofdynamica en de hydraulica zijn we niet geïnteresseerd in de beweging van individuele moleculen maar wel in globale beweging van een zeer groot aantal moleculen, waarbij de relatieve moleculaire beweging uitgemiddeld wordt. Dit is de continuüm benadering wat een redelijke werkwijze is gezien de gemiddelde afstand tussen de moleculen in een vloeistof ongeveer  $10^{-7}$  mm bedraagt, zodat er ongeveer  $10^{21}$  moleculen aanwezig zijn in een kubieke millimeter water. Het doel is dus om alleen de macroscopische eigenschappen van de stroming te verklaren, waarbij macroscopische grootheden zoals stroomsnelheid, druk en debiet beschouwd worden, wat meestal volstaat voor courante toepassingen in de praktijk.

## 1.2 Druk

Vloeistoffen kunnen geen weerstand bieden aan schuifspanningen. Deze eigenschap onderscheidt de vloeistoffen van de vaste stoffen. Een vloeistof zal dus bewegen onder de invloed van schuifspanningen, zodat bij rust er alleen maar normaalspanningen aanwezig zijn. Dit heeft tot gevolg dat bij rust een vloeistof altijd de vorm aanneemt van het vat waarin het zich bevindt onder invloed van een uitwendige kracht, zoals bijvoorbeeld de zwaartekracht. Het is eenvoudig aan te tonen dat bij afwezigheid van schuifspanningen de normaalspanningen isotroop moeten zijn, d.w.z. gelijk in elke richting.

Om dit te bewijzen beschouwen we een elementair volume vloeistof in rust alleen onderworpen aan normaalspanningen, zoals weergegeven in Fig. 1.1.

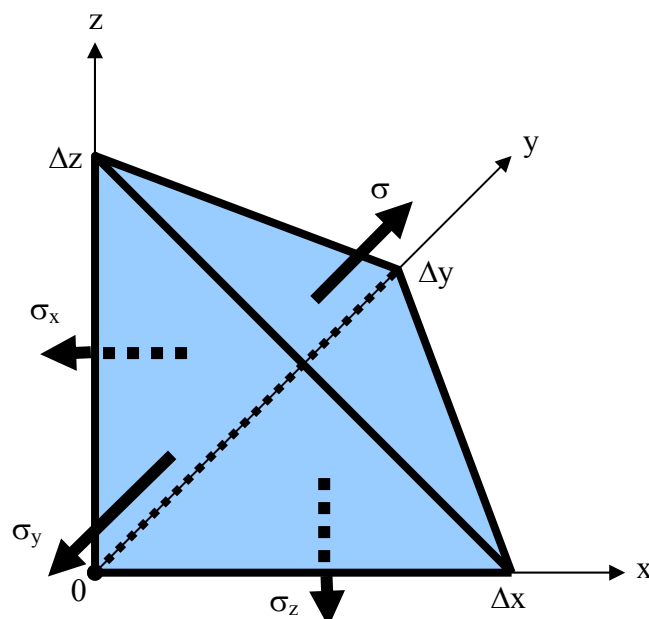


Fig. 1.1 Een elementair volume vloeistof alleen onderworpen aan normaalspanningen.

Het betreft een tetraëder met zijden  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  en  $\Delta z$ , langsheen de coördinaatsassen  $x$ ,  $y$  en  $z$ . Op de wanden van dit volume werken alleen maar normaalspanningen. Veronderstel dat de normaalspanningen de volgende waarden aannemen op de verschillende wanden van de tetraëder:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  en  $\sigma_z$  op respectievelijk de oppervlakken loodrecht op de  $x$ -,  $y$ - en de  $z$ -as en  $\sigma$  op de schuine wand. Bij rust zullen de totale krachten op het volume in elke richting in evenwicht zijn. De componenten van de krachten in een bepaalde richting kunnen berekend worden door gebruik te maken van de principes van de vectorrekening. Bijvoorbeeld voor de schuine wand geldt

$$\underline{F} = \sigma \underline{S} \quad (1.1)$$

waarbij  $\underline{F}$  de totale kracht is op het oppervlak en  $\underline{S}$  de vectoriële uitdrukking van de grootte van dit oppervlak (positief naar buiten gericht) (merk op dat we vectoriële symbolen onderlijnen). De component van de kracht  $F_n$  in een bepaalde richting  $n$  wordt bekomen door de projectie van de kracht in deze richting, hetgeen hetzelfde is als het scalair product te nemen met de eenheidsvector  $\underline{n}$  in de richting  $n$

$$F_n = \underline{F} \cdot \underline{n} = \sigma \underline{S} \cdot \underline{n} = \sigma S_n \quad (1.2)$$

waarbij  $S_n$  de projectie is van het oppervlak  $\underline{S}$  loodrecht op de richting  $\underline{n}$ . Bijvoorbeeld de component in de  $x$ -richting van de kracht op de schuine wand is

$$F_x = \sigma S_x = \sigma \frac{\Delta y \Delta z}{2} \quad (1.3)$$

Gelijkaardige resultaten worden bekomen voor de andere vlakken en richtingen. Het evenwicht van alle krachten in de richting  $x$ , geeft dan volgende vergelijking

$$-\sigma_x \frac{\Delta y \Delta z}{2} + \sigma \frac{\Delta y \Delta z}{2} + f_x \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6} = 0 \quad (1.4)$$

Hierin stelt  $f_x$  de  $x$ -component voor van een eventueel uitwendig krachtenveld (zoals bijvoorbeeld de zwaartekracht), uitgedrukt als kracht per volume vloeistof, met dimensies  $[F/L^3]$ . Wanneer we delen door  $\Delta y \Delta z$  en de limiet nemen voor  $\Delta x$  gaande naar nul, volgt hieruit dat  $\sigma_x - \sigma = 0$ , ofwel  $\sigma_x = \sigma$ . Hetzelfde geldt voor de andere richtingen, zodat  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$ , wat bewijst dat alle normaalspanningen gelijk zijn. Men definieert deze isotrope normaalspanning in een vloeistof als de druk, meestal aangeduid door het symbool  $p$ , een scalaire grootheid onafhankelijk van de richting. De dimensies van druk zijn  $[F/L^2]$ . In het SI-stelsel gebruikt men de eenheid pascal voorgesteld door het symbool Pa ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ), genoemd naar de Franse onderzoeker Pascal, die voor het eerst de wet formuleerde dat in een vloeistof in rust de druk gelijk is in elke richting. Omdat de eenheid pascal nogal klein uitvalt gebruikt men in de praktijk meestal kilo-pascal (kPa). Een verouderde eenheid is de bar ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 100 \text{ kPa}$ ). Merk ook op dat de druk door een positieve waarde wordt voorgesteld, in tegenstelling met de mechanica van het continuüm en de sterkteleer waar een trekspanning als positief wordt beschouwd.

Op de aarde is er steeds een druk aanwezig ten gevolge van de atmosfeer. Dit noemt men de lucht- of atmosferedruk, die voor het eerst werd aangetoond door Torricelli, met behulp van een omgekeerde kolom gevuld met kwik, zoals weergegeven in Fig. 1.2. De druk van de

atmosfeer op zeeniveau is gelijk aan het gewicht van een laag kwik van ongeveer 760 mm hoogte afhankelijk van de meteorologische omstandigheden. De druk van de atmosfeer daalt met de plaatshoogte, zoals vastgesteld door Toricelli, omdat er dan minder atmosfeer aanwezig is. Vroeger werd de atmosferedruk uitgedrukt in millimeter kwik, wat aangeduid werd met de eenheid torr, genoemd naar Torricelli. De atmosferedruk bedraagt dus ongeveer 760 torr. Later gebruikte men de eenheid atmosfeer (1 atm = 760 torr), maar nu meestal de eenheid pascal; uitgedrukt in het SI-stelsel bedraagt de atmosferedruk op zeeniveau ongeveer 101,3 kPa. In hoofdstuk 3 zullen we aantonen dat de druk niets anders is dan het gewicht per oppervlakte-eenheid van de fluïdum, dus het gewicht van de lucht in geval van de atmosfeer of het gewicht van 760 mm kwik in geval van de kwikbarometer van Toricelli. Dit komt overeen met een waterlaag van 10,34 m hoogte. Torricelli kon dus moeilijk een waterkolom gebruiken om de atmosferedruk te meten en had geluk omdat men toen juist vloeibare kwik ontdekt had.



*Evangelista Torricelli*

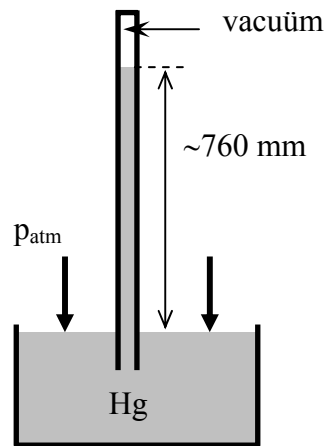


Fig. 1.2 De atmosferedruk opgemeten met een kwikmanometer.

In water of een andere vloeistof zal de druk toenemen met de diepte onder het vrij oppervlak, door het bijkomend gewicht van de bovenliggende vloeistof, zoals uiteengezet zal worden in hoofdstuk 4 over de hydrostatica. Men noemt dit de absolute druk. Echter meestal gebruikt men in praktische toepassingen de relatieve druk, zijnde het verschil tussen de absolute druk en de atmosferedruk. Ook in de hydraulica is deze conventie gebruikelijk en verstaan we onder het begrip druk en het symbool  $p$  de relatieve of de bijkomende druk t.o.v. de atmosferedruk, tenzij het anders vermeld wordt.

### 1.3 Densiteit

Elk materiaal heeft een densiteit of dichtheid, aangeduid door het symbool  $\rho$  en gedefinieerd als de massa  $M$  per volume  $V$  in de limiet gaande naar nul

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M}{V} \quad (1.5)$$

De dimensies zijn  $[M/L^3]$  en in het SI-systeem zijn de eenheden  $kg/m^3$ , maar in de praktijk

wordt voor vloeistoffen ook dikwijls  $\text{g/cm}^3$  gebruikt. Vermits de massa constant is en in geval van een vloeistof ook het volume bijna onveranderlijk is, volgt hieruit dat de densiteit vrij constant is, zij het evenwel dat er een beperkte invloed is van de temperatuur en de absolute druk. Tabel 1.1 geeft enkele voorbeelden van densiteiten van vloeistoffen, bij een temperatuur van  $20^\circ\text{C}$  en een normale atmosferedruk. De densiteit van water in functie van de temperatuur en bij een normale atmosferedruk wordt gegeven in Fig. 1.3 en in Tabel 1.2. Voor de praktische berekeningen wordt de densiteit van water bij normale omstandigheden meestal afgerond tot  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

Tabel 1.1 De densiteit van enkele vloeistoffen bij een temperatuur van  $20^\circ\text{C}$  en normale atmosferedruk.

Vloeistof	Densiteit $\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )
Kwik	13.560
Tetrachloorkoolstof	1.590
Zwavelkoolstof	1.263
Glycerine	1.260
Water	998
Benzeen	895
Terpentijn	870
Tolueen	867
Petroleum	850
Aceton	791
Benzine	700 - 800
Ethylalcohol	789
Diëthylether	715

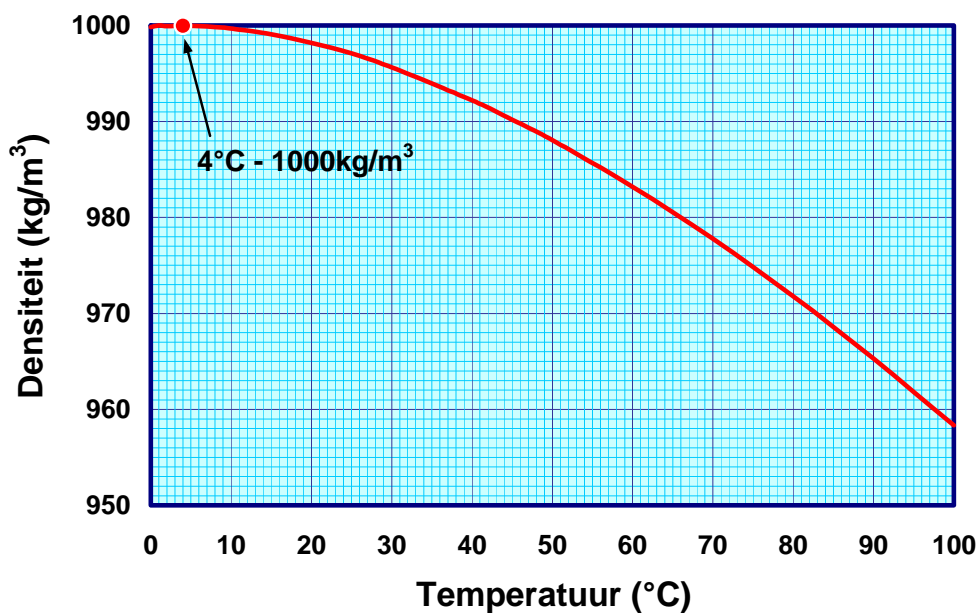


Fig. 1.3 De densiteit van water in functie van de temperatuur bij normale atmosferedruk.

Tabel 1.2 Eigenschappen van water in functie van de temperatuur bij normale atmosferedruk.

Temperatuur	Densiteit	Viscositeit	Kinematische Viscositeit	Elasticiteitsmodulus	Oppervlakte spanning
T (°C)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (mPa·s)	$\nu$ (μm <sup>2</sup> /s)	$E_v$ (GPa)	$\tau_s$ (mN/m)
0	999,8	1,781	1,785	2,02	75,6
5	999,9	1,518	1,519	2,06	74,9
10	999,7	1,307	1,306	2,10	74,2
15	999,1	1,139	1,139	2,14	73,5
20	998,0	1,002	1,003	2,18	72,8
25	997,0	0,890	0,893	2,22	72,0
30	995,7	0,798	0,800	2,25	71,2
35	994,1	0,723	0,727	2,24	70,4
40	992,2	0,656	0,661	2,27	69,6
45	990,2	0,599	0,605	2,29	68,8
50	988,1	0,549	0,556	2,30	67,9
55	985,7	0,506	0,513	2,31	67,0
60	983,2	0,469	0,477	2,28	66,2
65	980,6	0,436	0,444	2,26	65,2
70	977,8	0,406	0,415	2,25	64,4
75	974,9	0,380	0,390	2,23	63,5
80	971,8	0,357	0,367	2,21	62,6
85	968,6	0,336	0,347	2,17	61,6
90	965,3	0,317	0,328	2,16	60,8
95	961,9	0,299	0,311	2,11	59,8
100	958,4	0,284	0,296	2,07	58,9

Vloeistoffen zijn slechts in beperkte mate samendrukbaar bij toename van de druk, dit in tegenstelling tot gassen die zeer samendrukbaar zijn. De samendrukking wordt gedefinieerd als de relatieve afname in volume t.g.v. een toename in de druk. Vermits de massa onveranderd blijft, is dit ook gelijk aan de relatieve toename van de densiteit. De samendrukking kan dan als volgt gedefinieerd worden

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} = C\Delta p = \frac{\Delta p}{E_v} \quad (1.6)$$

De evenredigheidscoëfficiënt C wordt de samendrukbaarheid of compressibiliteit genoemd en is het inverse van de volumetrische elasticiteitsmodulus  $E_v$  uit de elasticiteitstheorie. De eenheden zijn [L<sup>2</sup>/F] voor C en [F/L<sup>2</sup>] voor  $E_v$ . Deze materiaaleigenschappen zijn in beperkte mate afhankelijk van de temperatuur en de absolute druk. Tabel 1.3 geeft karakteristieke waarden voor enkele vloeistoffen bij 20°C en normale atmosferedruk. De volumetrische elasticiteitsmodulus van water, in functie van de temperatuur bij een normale atmosferedruk

wordt gegeven in Tabel 1.2.

Tabel 1.3 Samendrukbaarheid en volumetrische elasticiteitsmodulus van enkele vloeistoffen bij 20°C en normale atmosferedruk.

Vloeistof	C (atm <sup>-1</sup> )	E <sub>v</sub> (GPa)
kwik	4,1·10 <sup>-6</sup>	24,7
glycerine	2,2·10 <sup>-5</sup>	4,51
water	4,6·10 <sup>-5</sup>	2,18
olie	5,3-7,8·10 <sup>-5</sup>	1,3-1,9
petroleum	±8,4·10 <sup>-5</sup>	±1,2
tetrachloorkoolstof	9,2·10 <sup>-5</sup>	1,10
ethylalcohol	1,1·10 <sup>-4</sup>	0,90
benzeen	9,6·10 <sup>-5</sup>	1,06

Vloeistoffen zijn ongeveer 10.000 keer minder samendrukbaar dan gassen. Alhoewel in de praktijk vloeistoffen, in het bijzonder water, meestal als onsamendrukbaar kunnen beschouwd worden, mag men niet uit het oog verliezen dat bijvoorbeeld de samendrukbaarheid van water nog 100 maal groter is dan die van staal en 10 maal groter dan die van beton, zodat in bijzondere gevallen de samendrukbaarheid toch nog van belang kan zijn. Ter illustratie berekenen we de relatieve volumeverandering van water bij een verdubbeling van de atmosferedruk:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{\rho} = -C\Delta p = -4,6 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1} \times 1 \text{ atm} \approx -0,005\% \quad (1.7)$$

Dit is uiterst gering. Om het volume van water samen te drukken met 1% is er een druk nodig van 217 atm. We kunnen dus besluiten dat in de praktijk bij normale natuurlijke omstandigheden vloeistoffen en in het bijzonder water quasi onsamendrukbaar zijn.

## 1.4 Viscositeit

De wrijving veroorzaakt door een vloeistof werd bestudeerd door Newton, door middel van een slinger ondergedompeld in water, waarbij hij vaststelde dat de wrijving functie was van de snelheid van de slingerbeweging. Later werd door Stokes het begrip viscositeit van een vloeistof geïntroduceerd, aan de hand van het volgende gedachte-experiment. Beschouw een vloeistof tussen twee platen, waarbij de bovenste plaat in beweging wordt gebracht met een snelheid  $v$  en de onderste plaat onbeweeglijk blijft, zoals schematisch weergegeven in Fig. 1.4. De vloeistof bovenaan aan de bewegende plaat krijgt daardoor dezelfde snelheid  $v$ , terwijl de vloeistof onderaan aan de onderste plaat onbeweeglijk blijft. Hierdoor ontstaat een snelheidsgradiënt in vloeistof, zoals weergegeven in de figuur. Om deze beweging te bestendigen moet er een kracht uitgeoefend worden om de bovenste plaat in beweging te houden, terwijl er een zelfde maar tegengestelde kracht nodig is om de onderste plaat in rust te houden. Deze krachten zijn in evenwicht (actie is gelijk aan reactie) en het is duidelijk dat

de kracht van de ene plaat overgebracht wordt naar de andere plaat door de wrijving uitgeoefend door de vloeistof.

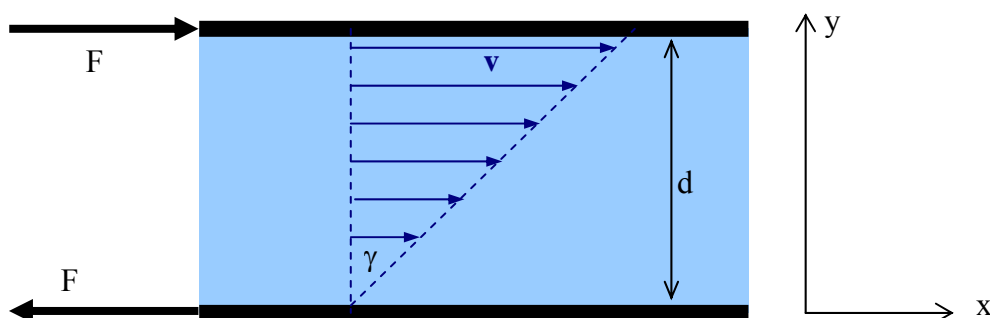


Fig. 1.4 Het experiment van Stokes voor bepaling van de viscositeit.

Voor kleine snelheden zal de kracht  $F$  lineair evenredig zijn met de oppervlakte  $S$  van de platen en met de snelheid  $v$  van de beweging en omgekeerd evenredig met de afstand  $d$  tussen de platen. Uiteraard is de kracht ook afhankelijk van het soort van vloeistof. Dit wordt de wet van Newton genoemd

$$F = \mu \frac{Sv}{d} \quad (1.8)$$

waarbij de evenredigheidsparameter  $\mu$  de (dynamische) viscositeit is van de vloeistof. Het woord viscositeit is afgeleid van viscum, de Latijnse benaming voor maretak, een plant die een plakkerige vloeistof afscheidt. De viscositeit is dus een eigenschap van de vloeistof die aangeeft in welke mate de vloeistof in beweging kan worden gebracht door schuifkrachten en daarbij wrijving veroorzaakt. De dimensies van de viscositeit zijn  $[FT/L^2 = M/LT]$  en gebruikelijke eenheden zijn Pa·s of het equivalente kg/m·s, maar in de praktijk wordt ook de poise gebruikt, met symbool P ( $1 P = 1 \text{ g/cm}\cdot\text{s} = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ), genoemd naar Poiseuille, die in 1838 experimenteel de wet van Newton (feitelijk van Stokes) bevestigde.

De viscositeit is afhankelijk van de temperatuur en in beperkte mate ook van de druk. Waarden voor de viscositeit van verschillende vloeistoffen bij 20°C en een normale atmosferedruk worden gegeven in Tabel 1.4. Waarden voor de viscositeit van water in functie van de temperatuur bij een normale atmosferedruk worden gegeven in Tabel 1.2. De viscositeit van water bij 20°C en normale atmosferedruk bedraagt ongeveer  $1 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  ofwel 1 cP (centi-poise). Waarden voor de viscositeit van verschillende fluïda, in functie van de temperatuur en bij normale atmosferedruk, worden gegeven in Fig. 1.5a.

Introduceert men de schuifspanning,  $\tau = F/S$ , dan kan men vergelijking 1.8 ook schrijven als

$$\tau = \mu \frac{v}{d} = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad (1.9)$$

waaruit duidelijk blijkt dat een schuifspanning stroming veroorzaakt in de vloeistof; meer bepaald ontstaat er een snelheidsgradiënt afhankelijk van de viscositeit van de vloeistof.

Hoe kan er nu schuifspanning door de vloeistof overgebracht worden van de ene plaat naar de andere? Globaal duiden we dit aan als wrijving, maar de eigenlijke verklaring dient gezocht te worden op microscopische schaal. Macroscopisch gezien stroomt de vloeistof parallel langs de platen met verschillende snelheden afhankelijk van de afstand tot de wand. De aantrekkingskrachten aanwezig tussen de moleculen zorgen voor een zekere cohesie tussen de moleculen, waardoor er overdracht van momentum plaatsvindt. Moleculen met een grotere snelheid sleuren aanliggende moleculen met een tragere snelheid mee, waardoor de snelle moleculen afgeremd worden en de trage moleculen versneld worden, hetgeen de wrijving of overdracht van schuifspanningen met zich meebrengt. Vermits bij toenemende temperatuur de microscopische beweging van de moleculen vergroot, waardoor de cohesie tussen de moleculen vermindert, zal de viscositeit van een vloeistof afnemen met stijgende temperatuur.

Tabel 1.4 Viscositeit van enkele vloeistoffen bij een temperatuur van 20°C en normale atmosferedruk.

Vloeistof	Viscositeit $\mu$ (mPa·s = cP)	Kinematische viscositeit, $\nu$ ( $\mu\text{m}^2/\text{s} = \text{cSt}$ )
Kwik	1,554	0,1147
Tetrachloorkoolstof	0,958	0,603
Zwavelkoolstof	0,376	0,298
Glycerine	1.530	1.210
Water	1,002	1,004
Benzeen	0,649	0,725
Terpentijn	1,50	1,72
Tolueen	0,6	0,7
Petroleum	0,5 - 2,4	0.6 - 2,8
Aceton	0,316	0,399
Benzine	0,33	0,44
Ethylalcohol	1,19	1,51
Diëthylether	0,224	0,313
Smeerolie	80 - 400	100 - 700

Bij gassen is er weinig of geen cohesie tussen de moleculen waardoor er veel minder wrijving zal zijn. Evenwel zijn gassen ook in beperkte mate viskeus omdat er overdracht van momentum plaatsvindt door de microscopische chaotische beweging van de moleculen. Hierdoor kunnen moleculen met een grote macroscopische snelheid terechtkomen tussen moleculen met een tragere snelheid en omgekeerd, waardoor er botsingen ontstaan en impulsen worden overgebracht. Vermits bij hogere temperaturen de microscopische beweging toeneemt, zal bij een gas de viscositeit stijgen met de temperatuur, terwijl dit omgekeerd is bij vloeistoffen. De overdracht van schuifspanningen kan dus ook beschouwd worden als een verspreiding of diffusie van impuls. Dit wordt duidelijker wanneer we de wet van Newton op de volgende wijze herschrijven



$$\tau = \nu \frac{\Delta(\rho v)}{\Delta y} \quad (1.10)$$

waarin  $\nu = \mu/\rho$  de kinematische viscositeit is met dimensies  $[L^2/T]$ , die hetzelfde zijn als bij een diffusiecoëfficiënt. Vergelijking 1.10 stelt dat een gradiënt in  $\rho v$ , dit is impuls per volume, een overdracht van schuifspanning of wrijving veroorzaakt afhankelijk van de kinematische viscositeit van het medium. De eenheden van de kinematische viscositeit in het SI-stelsel zijn  $m^2/s$ , maar in de praktijk wordt dikwijls de stokes gebruikt, met symbool St ( $1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/s = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/s$ ), genoemd naar Stokes. Waarden voor de viscositeit van verschillende vloeistoffen bij  $20^\circ\text{C}$  en een normale atmosferedruk worden gegeven in Tabel 1.4. Waarden voor de kinematische viscositeit van water in functie van de temperatuur en bij een normale atmosferedruk worden gegeven in Tabel 1.2. De kinematische viscositeit van water bij  $20^\circ\text{C}$  en normale atmosferedruk bedraagt ongeveer  $1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/s$  ofwel 1 cSt (centistokes). Het verband tussen de kinematische viscositeit voor water en de temperatuur wordt bij benadering gegeven door volgende empirische formule

$$\nu \approx \frac{1,78 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,0337 \times T + 0,00022 \times T^2} \quad (1.11)$$

waarin  $\nu$  uitgedrukt is in  $m^2/s$  en  $T$  de temperatuur voorstelt in  $^\circ\text{C}$ . Waarden voor de kinematische viscositeit van verschillende fluïda in functie van de temperatuur en bij normale atmosferedruk worden gegeven in Fig. 1.5b.

We schrijven nu de formules in een meer wetenschappelijke en wiskundige vorm. Indien we een vloeistoflaagje met dikte  $dy$  beschouwen, dan volgt uit vergelijking 1.9

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1.12)$$

en indien  $s$  de verplaatsing is van de vloeistof in de  $x$ -richting dan is  $v = ds/dt$  en kan het verband tussen de schuifspanning en de vervormingen ook geschreven worden als

$$\tau = \mu \frac{d}{dy} \left( \frac{ds}{dt} \right) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dy} \right) = \mu \frac{d\gamma}{dt} \quad (1.13)$$

met  $\gamma = ds/dy$  de hoekverdraaiing van de vervorming van de vloeistof, ofwel de afschuivingsnelheid zoals gedefinieerd in de mechanica van het continuüm, zoals weergegeven in Fig. 1.4. De schuifspanning blijkt dus evenredig te zijn met de snelheid van de hoekverdraaiing, dit in tegenstelling met lineair elastische materialen waar de schuifspanning proportioneel is met de hoekverdraaiing zelf.

Het gedrag van verschillende materialen onder invloed van schuifspanningen wordt schematisch weergegeven in Fig. 1.6. Fluïda zijn viskeuze stoffen waarbij de overgebrachte schuifspanning afhankelijk is van de snelheid van de vervorming. De fluïda worden ingedeeld in newtoniaanse en niet-newtoniaanse fluïda. De newtoniaanse fluïda voldoen aan de viscositeitwet van Newton, d.w.z. dat de schuifspanningen lineair evenredig zijn met de gradiënten van de snelheid. Alle gassen en dunne vloeistoffen, zoals water, zijn quasi newtoniaanse fluïda, terwijl dikke vloeistoffen meestal niet-newtoniaans zijn, d.w.z. dat de

schuifspanningen niet lineair evenredig zijn met gradiënten van de snelheid. Niet-newtoniaanse vloeistoffen kunnen ofwel pseudo-plastisch zijn indien de viscositeit afneemt met de schuifspanning, zoals bijvoorbeeld mayonaise verf, of tandpasta, ofwel dilatant indien de viscositeit toeneemt met de schuifspanning, zoals bij stroop of pudding.

Een ideaal fluïdum is een vloeistof of gas dat geen viscositeit bezit, wat impliceert dat de stroming zonder wrijving plaatsvindt en er dus geen krachten overgebracht worden. Ideale fluïda bestaan niet in werkelijkheid, doch gassen kunnen bij benadering als ideaal verondersteld worden. Bij vloeistoffen is dit minder het geval, behalve in zeer bijzondere omstandigheden, zoals vloeibaar helium bij een temperatuur dicht bij het absolute nulpunt. Echter in sommige praktische omstandigheden is de wrijving klein in vergelijking met de andere optredende krachten, zodat in dergelijke gevallen het fluïdum als ideaal mag beschouwd worden. Dit zal de berekeningen sterk vereenvoudigen zoals aangetoond wordt in hoofdstuk 4. Bij vaste stoffen is de schuifspanning onafhankelijk van de snelheidsgradiënt, terwijl stoffen zoals plastic, zich gedragen als een vaste stof wanneer de schuifspanningen klein zijn en als een vloeistof wanneer de schuifspanningen een zekere kritische waarde overstijgen. Sommige onderzoekers zijn van oordeel dat vaste stoffen ook fluïda zijn, echter met een zeer hoge viscositeit, zoals  $10^{12}$  Pa·s of meer (panta rhei zei Plato).



Isaac Newton, in zijn sterfjaar 1727, geportretteerd door J. Vanderbanck

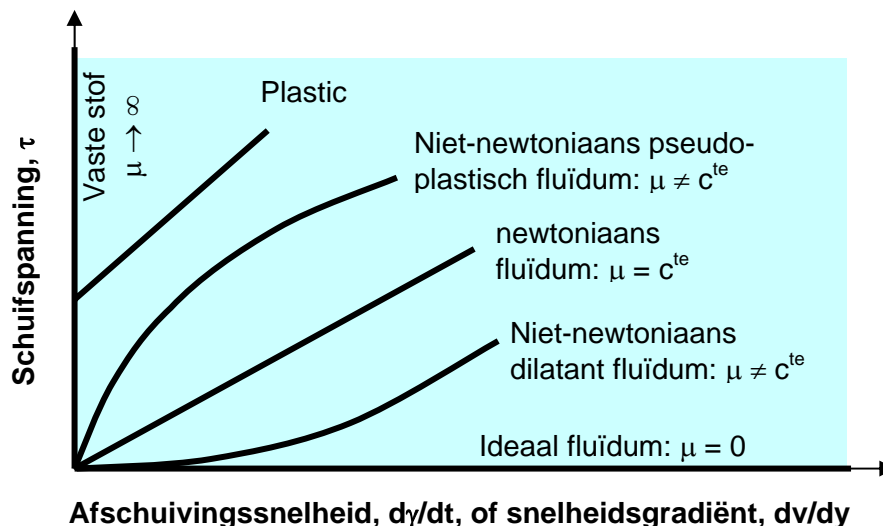


Fig. 1.6 Verband tussen de schuifspanning en de vervorming voor verschillende materialen.

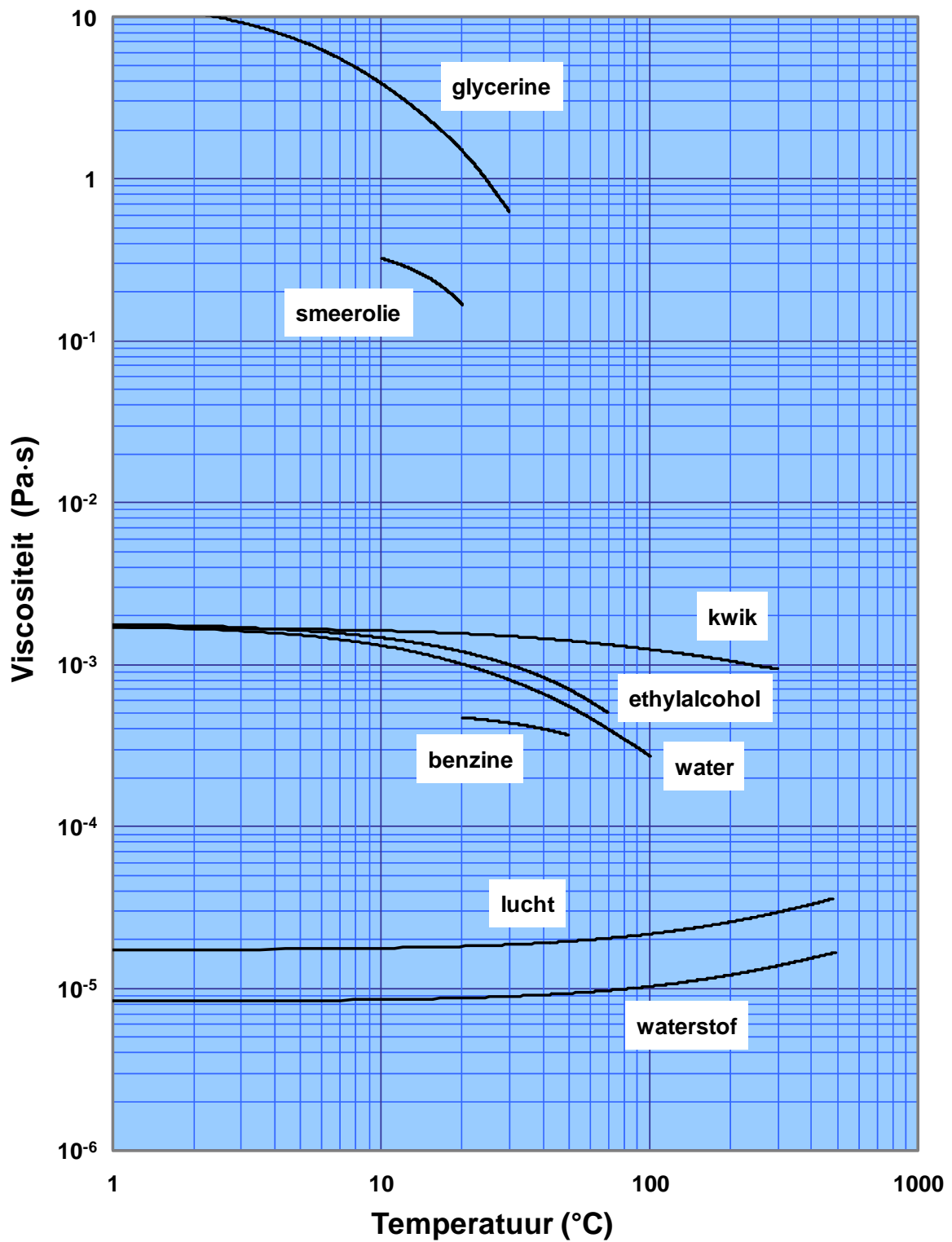


Fig. 1.5a Viscositeit van enkele vloeistoffen en gassen in functie van de temperatuur bij normale atmosferedruk.

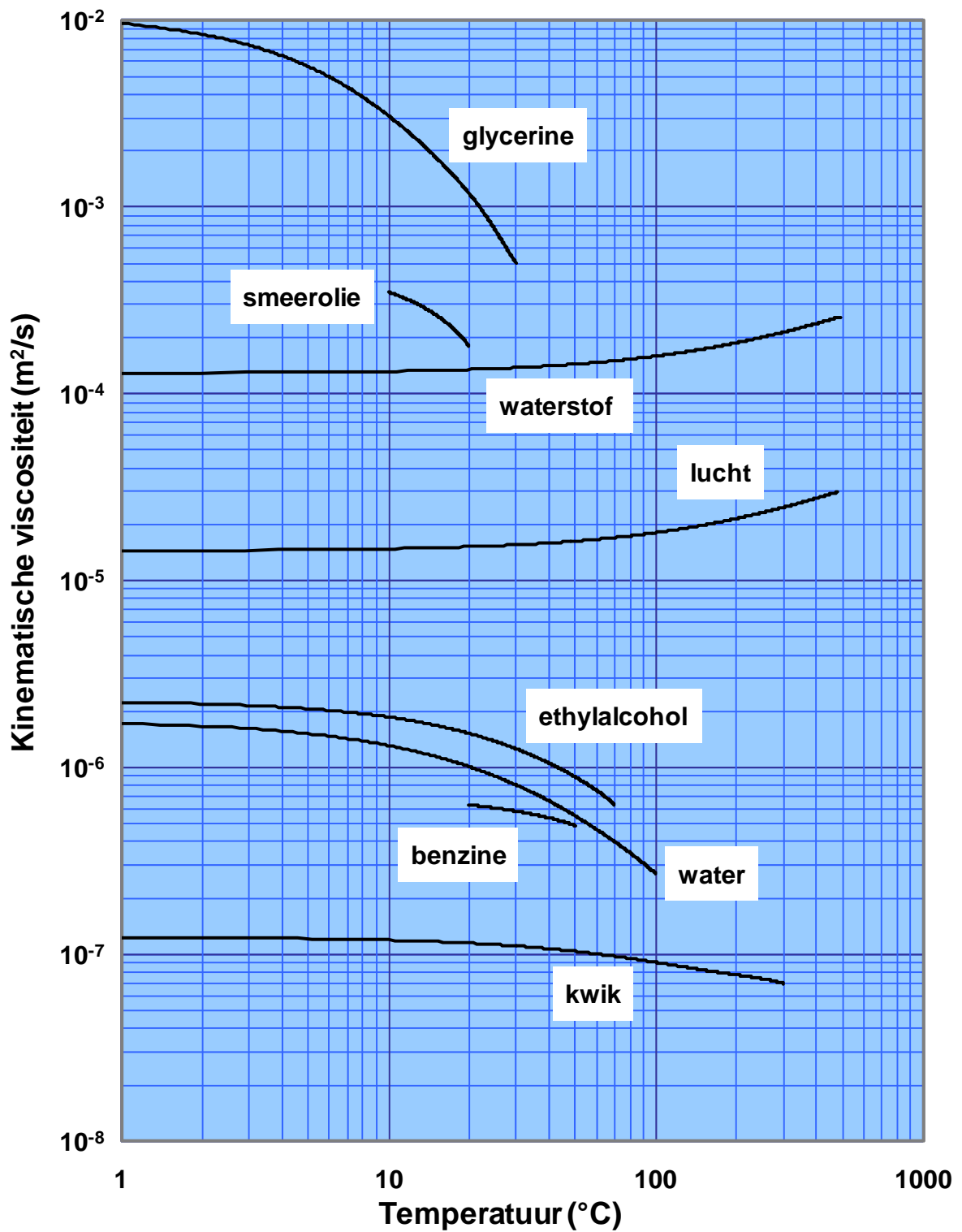


Fig. 1.5b Kinematische viscositeit van enkele vloeistoffen en gassen in functie van de temperatuur bij normale atmosferedruk.

## 1.5 Cohesie, adhesie en oppervlaktespanning

Moleculen oefenen wederzijdse aantrekkingskrachten uit op elkaar. Deze onderlinge aantrekking wordt cohesie genoemd indien de moleculen tot dezelfde stof behoren en adhesie in geval van moleculen van verschillende soort.

Beschouw een molecule in een vloeistof (Fig. 1.7a). Daar de aantrekkingskrachten met de andere moleculen snel afnemen met de afstand, is iedere molecule slechts onderworpen aan de aantrekkingskrachten van de moleculen in zijn onmiddellijke nabijheid, tot op een afstand van ongeveer  $10^{-8}$  m. Wanneer een molecule volledig omringd is door andere moleculen neutraliseren de aantrekkingskrachten elkaar, zodat er verder geen macroscopisch effect merkbaar is.



Fig. 1.7 Moleculen in een vloeistof en onderlinge aantrekkingskrachten: (a) binnenin de vloeistof en (b) aan de rand van de vloeistof.

Dit is echter niet het geval voor moleculen die zich aan de rand bevinden (Fig. 1.7b), omdat deze niet volledig omringd worden door andere moleculen van de vloeistof. Er zijn wel andere aantrekkingskrachten tussen de moleculen van de vloeistof en de moleculen van het fluïdum (meestal lucht), aanwezig aan de andere kant van het scheidingsoppervlak. Maar deze aantrekkingskrachten zijn over het algemeen kleiner, waardoor de buitenste moleculen tegen de vloeistof worden getrokken en daardoor meer gebonden zijn en minder vrij dan de moleculen binnenin de vloeistof. Hierdoor gedragen de buitenste moleculen zich op een speciale wijze; namelijk macroscopisch gezien gedragen zij zich als een zwak membraan dat om de vloeistof heen zit. Dit kan men vaststellen wanneer men bijvoorbeeld voorzichtig een glas vult met water tot juist boven de rand. Een ander voorbeeld zijn insecten die over een wateroppervlak kunnen lopen omdat ze licht genoeg zijn om het membraan niet te breken (er bestaan ook insecten die langs de binnenzijde in het water aan het wateroppervlak hangen).

De buitenste moleculen zijn dus meer gebonden, waarbij de toename in bindingsenergie ook aanzien kan worden als een oppervlaktespanning in een membraan. Oppervlaktespanning is een energie per oppervlakte-eenheid ofwel kracht per lengte-eenheid, wat aangeduid wordt door het symbool  $\tau_s$ , met dimensies [F/L]. De oppervlaktespanning is afhankelijk van het soort van vloeistof, het andere fluïdum dat in contact is met de vloeistof, de temperatuur en de absolute druk. De oppervlaktespanning van water in contact met lucht wordt gegeven in Tabel 1.2; Tabel 1.6 geeft waarden voor verschillende vloeistoffen in contact met lucht, bij 20°C en normale atmosferedruk.

Tabel 1.6 Oppervlaktespanning van enkele vloeistoffen in contact met lucht, bij een temperatuur van 20°C en normale atmosferedruk.

Vloeistof	Oppervlaktespanning $\tau_s$ (N/m)
Kwik	0,440
Tetrachloorkoolstof	0,027
Zwavelkoolstof	0,032
Glycerine	0,063
Water	0,073
Benzeen	0,029
Terpentijn	0,027
Tolueen	0,029
Petroleum	0,023 - 0,038
Aceton	0,020
Benzine	0,022
Ethylalcohol	0,023
Diëthylether	0,018
Smeerolie	0,037

Over het algemeen zijn oppervlaktespanningen erg klein zodat het effect ervan beperkt is. Trouwens wanneer het membraan vlak is, neutraliseren de oppervlaktespanningen elkaar, zoals schematisch weergegeven in Fig. 1.8a. Echter bij een gekromd oppervlak is er een resultante gericht naar de concave zijde (Fig. 1.8b). Hieruit volgt dat er een drukverschil is tussen de twee fluïda aan beide kanten van het scheidingsoppervlak. Dit drukverschil is afhankelijk van de kromming van het oppervlak, zoals verder aangetoond zal worden.



Fig. 1.8 Effecten van de oppervlaktespanning: (a) bij een vlak scheidingsoppervlak en (b) bij een gekromd scheidingsoppervlak.

Bijvoorbeeld zal water in afwezigheid van uitwendige krachten een bolvorm aannemen door de oppervlaktespanning, waardoor het water onder druk komt te staan, zoals weergegeven in Fig. 1.9. Om deze druk te berekenen volstaat het om het krachtenevenwicht uit te drukken van een halve bol, waaruit volgt

$$p = \frac{2\tau_s}{r} \quad (1.15)$$

Dus hoe kleiner de straal, hoe hoger de druk. Dit is bijvoorbeeld ook het geval bij waterdruppels. Omdat bij kleine volumes in vrije val het eigen gewicht weinig of geen effect heeft, nemen de druppels een bolvorm aan, enigszins vervormd door de zwaartekracht en de wrijving met de lucht. Bijvoorbeeld in een druppel van 5 mm doorsnede bedraagt de druk

$$p = \frac{2 \times 0,074 \text{ N/m}}{0,0025 \text{ m}} = 59,2 \text{ Pa} \quad (1.16)$$

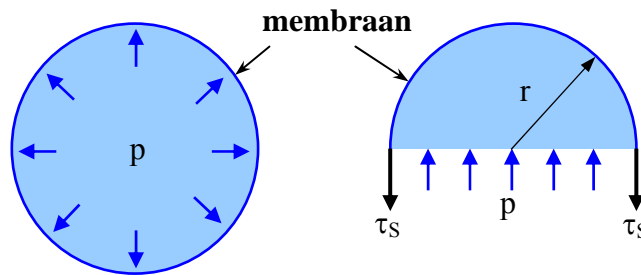


Fig. 1.9 Een vloeistof in afwezigheid van uitwendige krachten.

Er bestaan ook aantrekkingskrachten tussen vloeistofmoleculen en de moleculen van vaste stoffen. Deze aantrekkingskracht wordt adhesie genoemd en kan ook worden voorgesteld door een oppervlaktespanning. Adhesie is van belang wanneer twee fluïda in contact zijn met een vaste stof, omdat het ene fluïdum het andere kan verdringen, indien zijn moleculen meer aangetrokken worden door de vaste stof ( $\tau_1 < \tau_2$ ).

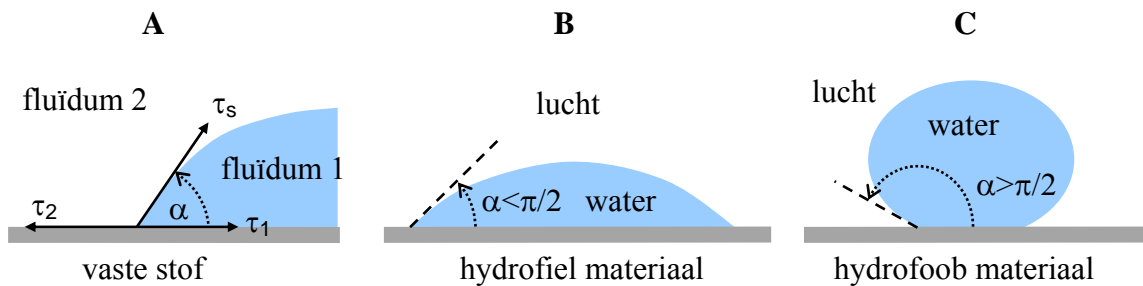


Fig. 1.10 Adhesie: (a) gekenmerkt door de contacthoek, (b) hydrofiel materiaal, en (c) hydrofoob materiaal.

Dit kan ook worden uitgedrukt door de contacthoek  $\alpha$ , gevormd door het scheidingsoppervlak tussen de twee fluïda en de wand, zoals weergegeven in Fig. 1.10a. Evenwicht in de horizontale richting impliceert

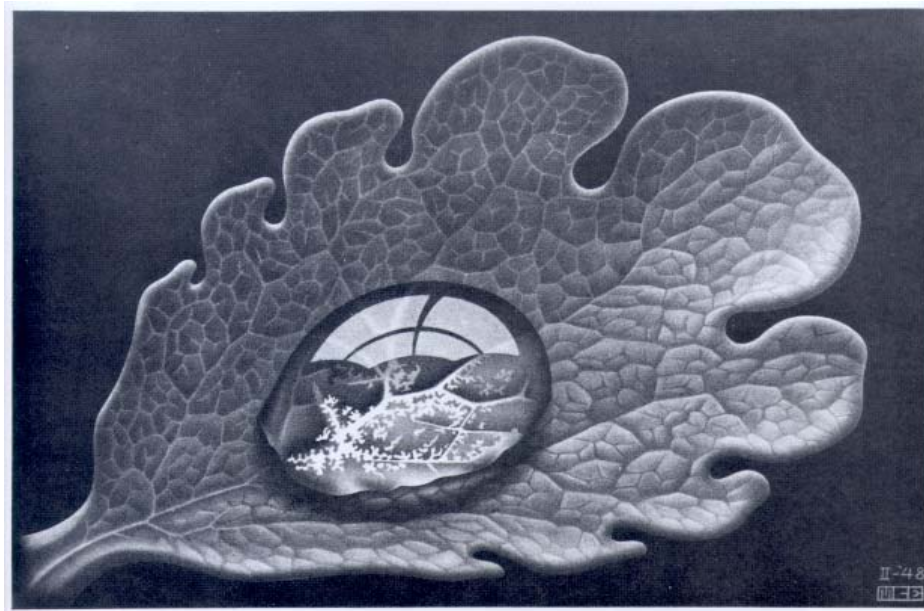
$$\tau_2 = \tau_1 + \tau_s \cos \alpha \quad (1.17)$$

ofwel

$$\cos \alpha = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_s} \quad (1.17)$$

Dus wanneer de contacthoek kleiner is dan  $\pi/2$  dan heeft het eerste fluïdum meer affiniteit voor de vaste stof dan het andere fluïdum en wanneer  $\alpha > \pi/2$  dan is het omgekeerde waar.

Wanneer water in contact met lucht een grote adhesie vertoont voor een vaste stof, dan wordt deze stof hydrofiel genoemd (Fig. 1.10b); in het omgekeerde geval spreken we van een hydrofobe stof (Fig. 1.10c). Bijvoorbeeld organische materialen zijn hydrofoob, hetgeen verklaart waarom waterdruppels snel over het blad van een plant aflopen. De eigenschappen cohesie en adhesie zullen in een hoofdstuk 8 gebruikt worden om processen te verklaren zoals capillariteit en absorptie van water in poreuze media.



*M.C. Escher, Druppel (Dauwdruppel)*



*Een spinnetje dat over water loopt*



## 2 BASISVERGELIJKINGEN

---

### 2.1 Basisbegrippen

De grondbeginselen van de hydraulica zijn gebaseerd op de wetten van de mechanica van het continuüm. Er zijn vier fundamentele behoudswetten:

- 1) behoud van massa of continuïteitswet;
- 2) behoud van impuls (tweede wet van Newton);
- 3) behoud van moment van impuls (wet van Newton uitgebreid naar krachtkoppels);
- 4) behoud van energie.

De drie eerste wetten volstaan meestal voor de beschrijving van stroming van vloeistoffen.

In de continuümmechanica zijn er twee benaderingen mogelijk om beweging te beschrijven. De eerste is die van Lagrange, waarbij de waarnemer elk deeltje van de stof volgt in zijn beweging. De tweede benadering is die van Euler, waarbij de waarnemer vast staat in een bepaald punt in de ruimte en waarneemt wat er op die plaats gebeurt. De aanpak van Lagrange is fundamenteeler maar meestal erg moeilijk om in de praktijk toe te passen, terwijl de aanpak van Euler meer praktisch is en eenvoudiger om toe te passen. In de hydraulica gaan we voornamelijk gebruik maken van de aanpak volgens Euler, waarbij we niet zozeer geïnteresseerd zijn in het gedrag van elk individueel deeltje van de vloeistof, maar eerder in de algemene kenmerken van de stromende vloeistof in een bepaalde plaats.

Het doel is om vergelijkingen op te stellen die de toestand van een vloeistof, zoals de druk en de snelheid, beschrijven in elk punt van de ruimte en de tijd. De ruimtelijke plaats wordt meestal aangegeven door een cartesiaans coördinatenstelsel

$$\underline{x} = (x, y, z)^T \quad (2.1)$$

hierin is  $\underline{x}$  de plaatsvector, waarbij het streepje onder het symbool aangeeft dat het een vectoriële grootheid betreft;  $x$ ,  $y$  en  $z$  zijn de plaatscoördinaten met dimensie [L] en  $^T$  betekent transpositie, d.w.z. het verwisselen van de rijen en kolommen van een vector of een tensor. De tijd wordt voorgesteld door het symbool  $t$  met dimensies [T]. De snelheid van een deeltje is de verhouding tussen de plaatsverandering en de tijd en wordt voorgesteld door de snelheidsvector  $\underline{v}$

$$\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)^T = d\underline{x}/dt \quad (2.2)$$

met  $v_x$ ,  $v_y$  en  $v_z$  de snelheidscomponenten, met dimensies [L/T], volgens de richtingen  $x$ ,  $y$  en  $z$ . In deze vergelijking is  $\underline{x}$  de plaatsvector van een deeltje dat gevolgd wordt in zijn beweging.

Ruimtelijke afgeleiden worden bekomen door gebruik te maken van  $\nabla$  de nabla operator

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \quad (2.3)$$

De ruimtelijke afgeleide van een scalaire grootheid  $\phi(\underline{x})$  is de gradiënt

$$\text{grad}(\phi) = \nabla\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^T \quad (2.4)$$

De ruimtelijke afgeleide van een vectoriële grootheid  $\underline{v}(\underline{x})$  is de divergentie, wanneer we het scalair product nemen van  $\nabla$  en  $\underline{v}$

$$\text{div}(\underline{v}) = \nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.5)$$

ofwel de rotatie in geval van het vectoriëel product

$$\text{rot}(\underline{v}) = \nabla \times \underline{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^T \quad (2.6)$$

Om de vervorming te bepalen kijken we naar de verschillen in snelheid volgens de plaats

$$\nabla \underline{v}^T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Dit is een tweede orde tensor die men kan ontbinden in een symmetrisch deel en een antisymmetrisch deel

$$\nabla \underline{v}^T = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{array} \right\} + \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & 0 \end{array} \right\}$$

In de cursus Mechanica van het Continuüm wordt aangetoond dat het antisymmetrische deel een starre rotatie beschrijft welke geen vervorming veroorzaakt. Dus alleen het symmetrische deel beschrijft de vervorming; dit noemt men de tensor van de snelheidsgradiënten  $\underline{V}$

$$\underline{\underline{V}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

De versnelling is de verandering van de snelheid in de tijd, gegeven door  $\underline{dv}/dt$ , waarbij volgens Lagrange een deeltje gevolgd wordt in zijn beweging

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{v}(\underline{x} + \underline{v}\Delta t, t + \Delta t) - \underline{v}(\underline{x}, t)}{\Delta t} \quad (2.10)$$

Men noemt dit de materiële of Langrange afgeleide. Dit wordt geïllustreerd in Fig. 2.1.

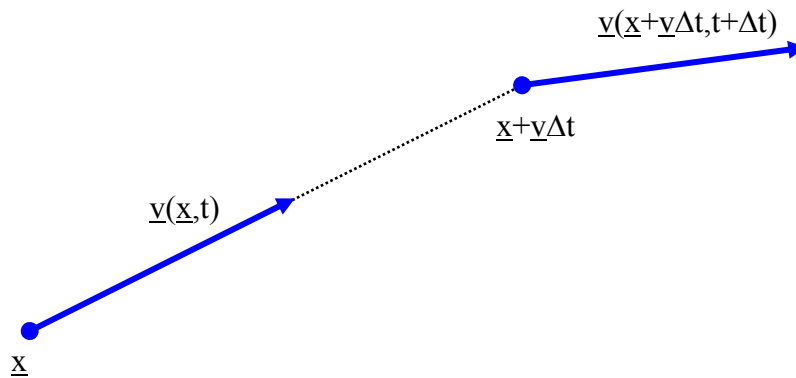


Fig. 2.1 Een deeltje in beweging.

Werken we de totale afgeleide uit volgens de regels van partiële afgeleiden dan geeft dit

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} \quad (2.11)$$

ofwel

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \quad (2.12)$$

De eerste term in het rechterlid noemt men de lokale versnelling en de tweede term de convectieve versnelling. Deze betrekking geldt trouwens voor elke materiële afgeleide van een fysische grootheid  $f(\underline{x}, t)$  en wordt dikwijls voorgesteld door  $D/Dt$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) f \quad (2.13)$$

## 2.2 Behoud van massa

Behoud van massa impliceert

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (2.14)$$

Hierin is  $d/dt$  de materiële afgeleide, d.w.z. dat volgens Lagrange de massa  $M$  gevolgd wordt in zijn beweging. Beschouw het volume  $V$  dat de massa  $M$  omvat (Fig. 2.2), dan wordt behoud van massa

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho dV \right) = 0 \quad (2.15)$$

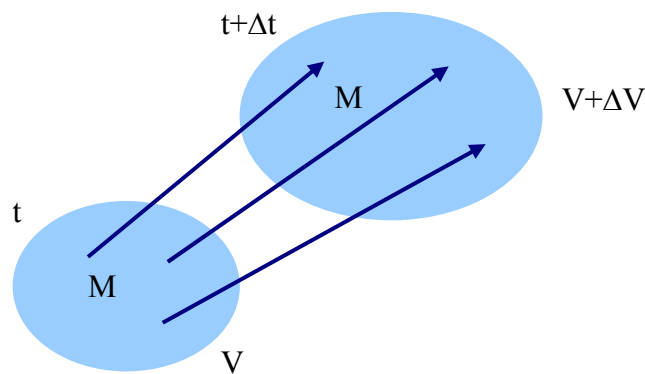


Fig. 2.2 Een fluidum met volume  $V$  en massa  $M$  in beweging.

De omwisseling van de afgeleide en integratie is niet eenvoudig omdat het volume  $V$  ook afhankelijk is van de tijd. In de continuümmechanica wordt aangetoond dat deze uitdrukking kan uitgewerkt worden met de transportstelling van Reynolds

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho dV \right) = \int_V \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \underline{v}) \right) dV = 0 \quad (2.16)$$

Vermits het gekozen volume  $V$  willekeurig is, volgt hieruit

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \underline{v}) = 0 \quad (2.17)$$

Dit is de continuïteitswet volgens Lagrange. De fysische betekenis van de continuïteitswet is duidelijk, nl. de verandering van de densiteit in de tijd is een gevolg van de divergentie (of convergentie) van de stroming; indien de stroming divergeert ( $\nabla \cdot \underline{v} > 0$ ) dan moet de densiteit afnemen in de richting van de stroming ( $d\rho/dt < 0$ ) (Fig. 2.2) en omgekeerd als de stroming convergeert ( $\nabla \cdot \underline{v} < 0$ ) dan zal de densiteit toenemen volgens de stroming ( $d\rho/dt > 0$ ).

Er is echter ook een andere interpretatie mogelijk van de continuïteitswet volgens Euler. Werkt men de materiële afgeleide in vergelijking 2.17 verder uit op dezelfde wijze als in

vergelijking 2.12, dan volgt

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \underline{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla)\rho + \rho(\nabla \cdot \underline{v}) = 0 \quad (2.18)$$

ofwel

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (2.19)$$

Dit is de continuïteitswet volgens Euler, welke ook eenvoudig te interpreteren is, nl. in een bepaald punt in de ruimte zal de densiteit lokaal toenemen ( $\partial\rho/\partial t > 0$ ) indien de impuls per volume  $\rho \underline{v}$  convergeert naar dit punt ( $\nabla \cdot \rho \underline{v} < 0$ ), en omgekeerd zal de densiteit lokaal afnemen ( $\partial\rho/\partial t < 0$ ) als de impuls per volume er divergeert ( $\nabla \cdot \rho \underline{v} > 0$ ) (Fig. 2.3). Merk op dat de impuls per volume hierbij ook geïnterpreteerd kan worden als een massaflux (immers massa per volume maal lengte per tijd is ook massa per oppervakte per tijd).

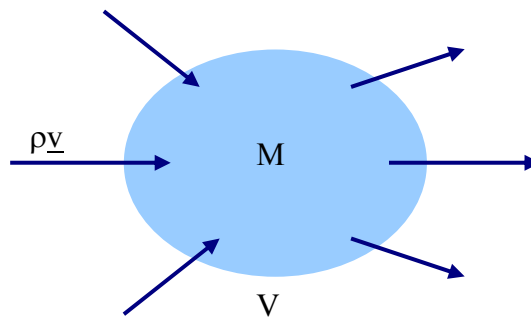


Fig. 2.3 De continuïteitswet volgens Euler.

We beschouwen nog enkele speciale gevallen van de continuïteitswet. Bij een permanente stroming is er geen temporele verandering, zodat

$$\nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (2.20)$$

wat betekent dat de massaflux  $\rho \underline{v}$  divergentieloos is; de densiteit verandert niet in de tijd maar nog wel kan verschillen van plaats tot plaats. Voor onsamendrukbare fluïda is de densiteit overall en altijd constant, waaruit volgt

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2.21)$$

hetgeen betekent dat de stroming divergentieloos is. De wet van behoud van massa wordt nu een wet van behoud van volume. Indien de stroming ook nog rotatieloos is ( $\nabla \times \underline{v} = 0$ ), dan kan de snelheid afgeleid worden uit een potentiaal  $\phi$

$$\underline{v} = \nabla \phi = \text{grad}(\phi) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^T \quad (2.22)$$

omdat de rotatie van een gradiënt altijd nul is ( $\nabla \times \nabla \phi = 0$ ). Voor een divergentie- en

rotatieloze stroming wordt de continuïteitswet dan

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.23)$$

met  $\nabla^2$  de Laplace operator, waaruit blijkt dat de potentiaal  $\phi$  een harmonische functie is, d.w.z. dat ze voldoet aan de Laplace vergelijking.

### 2.3 Behoud van impuls

Behoud van impuls is een uitdrukking van de tweede wet van Newton, welke stelt dat een verandering in de beweging het gevolg is van krachten, die inwerken op de materie. Deze wet wordt geformuleerd in vectorvorm als: de verandering van impuls in de tijd is gelijk aan de som van alle inwerkend krachten. Beschouw een volume  $V$  omsloten door een oppervlak  $S$ , zoals weergegeven in Fig. 2.4, dan wordt behoud van impuls

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho \underline{v} dV \right) = \int_V \rho \underline{f} dV + \int_S \underline{T} d\underline{S} \quad (2.24)$$

hierin zijn  $\underline{f} = (f_x, f_y, f_z)^T$  de uitwendige krachten (zoals de zwaartekracht) uitgedrukt per massa van het fluïdum, met dimensies  $[F/M = L/T^2]$ , en  $\underline{T}$  de inwendige spanningen, zijnde krachten per oppervlak, met dimensies  $[F/L^2]$ .  $\underline{T}$  is de spanningstensor gegeven door

$$\underline{T} = \begin{Bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

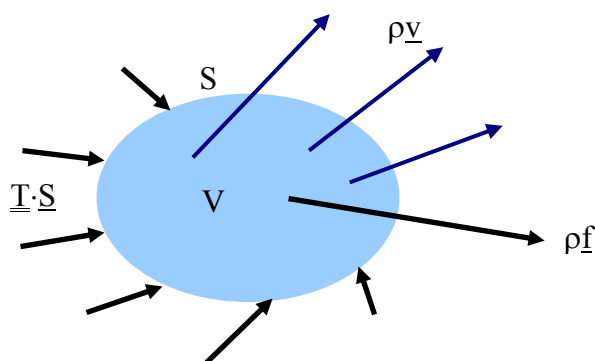


Fig. 2.4 Behoud van impuls.

De componenten van de spanningstensor  $\tau_{ij}$  geven de spanning in de  $i$ -richting op een vlak met een normaal in de  $j$ -richting. Wanneer de 2 indices verschillend zijn betreft het dus schuifspanningen en anders normaalspanningen, welke dikwijls ook aangeduid worden door  $\sigma_i = \tau_{ii}$ . Alle componenten van de spanningstensor worden voorgesteld in Fig. 2.5. De kracht

op een elementair oppervlak  $d\mathbf{S}$  wordt dan gegeven door het tensorproduct  $\underline{\underline{T}}d\mathbf{S}$ .

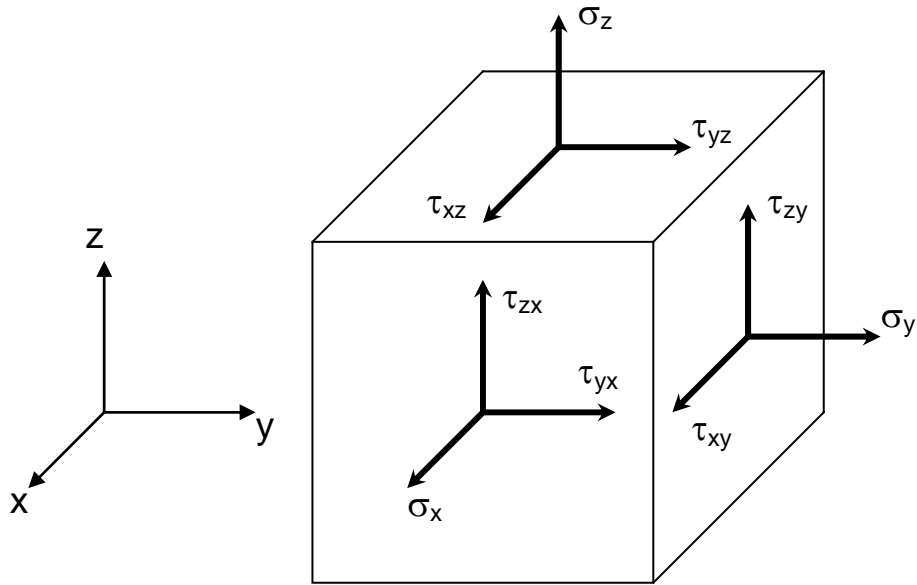


Fig. 2.5 Componenten van de spanningstensor.

Uitwerking van vergelijking 2.24 met de transportstelling van Reynolds en het theorema van Gauss voor de laatste term in het rechterlid, geeft

$$\int_V \frac{d\rho \underline{v}}{dt} dV + \int_V \rho \underline{v} (\nabla \cdot \underline{v}) dV = \int_V \rho \underline{f} dV + \int_V (\nabla \cdot \underline{\underline{T}}) dV \quad (2.26)$$

Vermits dit geldig is voor elk volume  $V$ , volgt hieruit

$$\frac{d\rho \underline{v}}{dt} + \rho \underline{v} (\nabla \cdot \underline{v}) = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad (2.27)$$

Verdere uitwerking van de eerste term, waarbij gebruik wordt gemaakt van de continuïteitsvergelijking 2.17, resulteert in

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad (2.28)$$

wat duidelijk uitdrukt dat de versnelling het gevolg is van uitwendige en inwendige krachten. Dit is de impulswet volgens Lagrange. We kunnen deze wet ook schrijven volgens Euler door de materiële afgeleide uit te werken

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \right) = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad (2.29)$$

Hetzelfde kan gebeuren met vergelijking 2.27, wat resulteert in

$$\frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \rho \underline{v} + \rho \underline{v} (\nabla \cdot \underline{v}) = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad (2.30)$$

ofwel

$$\frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}^T) = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad (2.31)$$

Deze vergelijking is fysisch interpreteerbaar als volgt: de lokale verandering in impuls op een bepaalde plaats,  $\partial \rho \underline{v} / \partial t$ , is afhankelijk van de uitwendige en inwendige krachten en van de divergentie van  $\nabla \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}^T)$ , dit is de impuls per volume  $\rho \underline{v}$  die wordt getransporteerd door de stroming  $\underline{v}$ . Dit betekent dat impuls een eigenschap of kenmerk is van de vloeistof die mee verplaatst wordt met de stroming, zoals bijvoorbeeld massa of temperatuur. Merk op dat  $\underline{v} \underline{v}^T$  geen scalair product is maar wel een tweede orde tensor met componenten  $v_i v_j$ . Vergelijkingen 2.28, 2.29 en 2.31 zijn gelijkwaardig en drukken allemaal de tweede wet van Newton uit.

Behoud van moment van impuls, in geval er geen uitwendige koppels aangrijpen op het fluïdum (hetgeen altijd het geval is bij een vloeistof, tenzij in zeer uitzonderlijke situaties zoals bij een magnetische vloeistof in een magnetisch veld), geeft als resultaat dat de spanningstensor symmetrisch is (zie cursus Mechanica van het Continuüm)

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T \quad (2.32)$$

dus  $\tau_{ij}$  is gelijk aan  $\tau_{ji}$  enz., zodat de spanningstensor eigenlijk slechts 6 componenten bevat i.p.v. 9. Merk op dat de impulsvergelijking met de continuïteitsvergelijking een onoplosbaar stelsel vormt, er zijn immers slechts 4 vergelijkingen maar 10 onbekenden, zijnde de densiteit, de drie snelheidscomponenten en de zes componenten van de spanningstensor. Er moeten dus nog bijkomende vergelijkingen geformuleerd worden om een probleem oplosbaar te maken. Dit zijn de zogenaamde constitutieve betrekkingen die eigenschappen van het materiaal uitdrukken.

We beschouwen nog enkele speciale gevallen van de impulsvergelijking. In het geval er geen stroming is, dan drukt de tweede wet van Newton het evenwicht uit tussen de uitwendige en inwendige krachten

$$\rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} = 0 \quad (2.33)$$

Deze vergelijking is eveneens van toepassing in het geval dat de verplaatsingen zeer traag zijn, zodat de inertietermen in de impulsvergelijking verwaarloosd kunnen worden. Dit noemt men kruipstroming.

In geval van een divergentieloze stroming ( $\nabla \cdot \underline{v} = 0$ ) zijn er geen verdere vereenvoudigingen mogelijk. Echter, omdat  $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \nabla(v^2/2) - \underline{v} \times (\nabla \times \underline{v})$  (zie cursus Mechanica van het Continuüm), volgt uit vergelijking 2.29 dat voor een rotatieloze stroming ( $\nabla \times \underline{v} = 0$ ) de impulsvergelijking als volgt kan geschreven worden

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad (2.34)$$

met  $v$  de grootte van de snelheid, waarin men in de tweede term van het linkerlid de



kinetische energie herkent. We zullen later aantonen dat de impulsvergelijking meteen ook het behoud van energie uitdrukt.

## 2.4 Vloeistofstroming

Een vloeistof is een onsamendrukbaar fluïdum, zodat we over volgende vergelijkingen beschikken: (1) behoud van volume

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2.35)$$

en (2) behoud van impuls

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v} \underline{v}^T) = \underline{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{T} \quad (2.36)$$

Dit zijn 4 vergelijkingen en 9 onbekenden, zijnde de drie snelheidscomponenten en de zes componenten van de spanningstensor. Er zijn dus nog bijkomende voorwaarden of veronderstellingen nodig om een probleem op te lossen.

Een eerste benadering bestaat erin om een vloeistof als een perfect fluïdum te veronderstellen; d.w.z. dat er is geen wrijving is en ook geen schuifspanningen, waardoor er alleen maar druk is in de vloeistof, zodat  $\underline{T} = -p\underline{I}$ , met  $\underline{I}$  de eenheidstensor (merk op dat de druk als positief verondersteld wordt, hetgeen het minteken verklaard). Hieruit volgt

$$\nabla \cdot \underline{T} = -\nabla p \quad (2.37)$$

De stromingsvergelijkingen voor een perfecte vloeistof worden dan

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v} \underline{v}^T) = \underline{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.39)$$

Dit zijn 4 vergelijkingen en 4 onbekenden, de drie snelheidscomponenten en de druk, wat principieel oplosbaar is. Dit stelsel wordt de vergelijkingen van Euler genoemd. We zullen in hoofdstuk 4 zien welke toepassingen in de praktijk mogelijk zijn met deze vergelijkingen.

Een tweede aanpak bestaat erin te veronderstellen dat de vloeistof viskeus is en voldoet aan de viscositeitswet van Newton. In de continuümmechanica toont men aan dat voor Newtoniaanse vloeistoffen de spanningstensor  $\underline{T}$  een lineaire functie is van de tensor van de vervormings-snelheden  $\underline{V}$

$$\underline{T} = a\underline{I} + b\underline{V} \quad (2.40)$$

met a en b coëfficiënten die we als volgt bepalen. In geval er geen stroming is, dan is  $\underline{V} = 0$  en is er alleen maar druk mogelijk, d.w.z.  $\underline{T} = -p\underline{I}$ , waaruit volgt dat  $a = -p$ . In geval van stroming, hernemen we het geval van stroming tussen 2 platen, zoals besproken bij de wet van Newton in hoofdstuk 1 (Fig. 1.4). In dit geval zijn alle snelheidscomponenten nul, behalve  $v_x$ , en alle afgeleiden van de snelheidscomponenten zijn eveneens gelijk aan nul

behalve  $\partial v_x / \partial y$ , zodat

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{b}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.41)$$

Vergelijken we dit met de viscositeitswet van Newton (vergelijking 1.12) dan volgt hieruit dat  $b = 2\mu$ , zodat voor Newtoniaanse viskeuze vloeistoffen geldt

$$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{V}} \quad (2.42)$$

De spanningen bestaan uit twee bijdragen: een isotrope druk  $-p\underline{\underline{I}}$  en de zogenaamde viskeuze spanningen  $2\mu\underline{\underline{V}}$  die het effect zijn van de stroming en de viscositeit van de vloeistof. Uit vergelijkingen 2.42 en 2.9 volgt dan

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} \quad (2.43)$$

waarbij ook gebruik werd gemaakt van het feit dat de stroming divergentieloos is. De stromingsvergelijkingen voor een viskeuze vloeistof worden nu

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v} \underline{v}^T) = \underline{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{v} \quad (2.45)$$

Dit zijn de Navier-Stokes vergelijkingen, die bestaan uit 4 vergelijkingen met 4 onbekenden, zijnde de druk en de drie componenten van de snelheid. Deze vergelijkingen zijn vrij ingewikkeld en in de praktijk zijn er niet veel oplossingen gekend, wat blijkt wanneer we deze vergelijkingen voluit schrijven

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x v_z}{\partial z} = \\ & f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_x v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y^2}{\partial y} + \frac{\partial v_y v_z}{\partial z} = \\ & f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_x v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_y v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z^2}{\partial z} = \\ & f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

De moeilijkheid zit voornamelijk in de niet-lineaire convectieve versnellingstermen. Enkele triviale oplossingen worden besproken in hoofdstuk 5. Een bijkomend probleem is ook nog het fenomeen van de turbulentie, wat aan bod komt in hoofdstuk 6. Indien de viscositeit gelijk gesteld wordt aan nul reduceren de Navier-Stokes vergelijkingen zich tot de Euler vergelijkingen voor een perfecte vloeistof. Dit is ook het geval voor een rotatieloze stroming, vermits uit vergelijkingen 2.22 en 2.23 volgt dat  $\nabla^2 \underline{v} = \nabla^2(\nabla\phi) = \nabla(\nabla^2\phi) = 0$ , zodat er geen viskeuze spanningen of wrijving zijn. Stroming zonder wrijving komt aan bod in hoofdstuk 4. Wanneer er geen stroming is dan reduceren de vergelijkingen zich tot de evenwichtsvergelijkingen 2.33, waarbij er uiteraard geen verschil is tussen viskeuze of perfecte vloeistoffen, vermits er bij rust geen wrijving is. Dit wordt behandeld in hoofdstuk 3.

Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.

One of the seven Millennium price problems: <http://www.claymath.org/millennium/>

Zie ook: <http://www.navier-stokes.net/>

### 3 HYDROSTATICA

---

#### 3.1 De hydrostatische wet

De hydrostatica behandelt de vloeistoffen in rust. In vorig hoofdstuk werd aangetoond dat in afwezigheid van beweging er evenwicht is tussen uitwendige en inwendige krachten

$$\underline{\rho f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} = 0 \quad (3.1)$$

en dat de inwendige krachten alleen bestaan uit een isotrope druk, zodat

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} = -\nabla p \quad (3.2)$$

Als uitwendige krachten is voornamelijk de zwaartekracht van belang. Indien de z-as verticaal wordt genomen en positief naar boven gericht, dan is  $\nabla z$  een eenheidsvector verticaal naar boven, zodat de zwaartekracht voorgesteld kan worden als

$$\underline{f} = -g\nabla z \quad (3.3)$$

met g de valversnelling  $[L/T^2]$ , waarvoor de waarde gelijk genomen wordt aan  $9,81 \text{ m/s}^2$  voor alle praktische berekeningen. Combinatie van voorgaande vergelijkingen geeft

$$-\rho g \nabla z - \nabla p = 0 \quad (3.4)$$

ofwel

$$\nabla(\rho g z + p) = 0 \quad (3.5)$$

Integratie geeft

$$\rho g z + p = c^{\text{te}} \quad (3.6)$$

waaruit volgt dat de druk alleen varieert met de hoogte z. Deze relatie kan ook geschreven worden als

$$h = z + \frac{p}{\rho g} = c^{\text{te}} \quad (3.7)$$

waarbij h gedefinieerd wordt als de piëzometrische hoogte. De piëzometrische hoogte h bestaat uit twee bijdragen, namelijk de plaatshoogte z en de drukhoogte  $p/\rho g$ . De waarde van de integratieconstante wordt bekomen door in rekening te brengen dat de (relatieve) druk aan het contactoppervlak met de atmosfeer gelijk is aan nul, waaruit volgt

$$h = z + \frac{p}{\rho g} = z_0 \quad (3.8)$$

met  $z_0$  de hoogte van het bovenoppervlak van de vloeistof, gemeten vanaf een willekeurig horizontaal referentievlak. Dit bovenoppervlak wordt gekenmerkt door  $p = 0$  moet dus horizontaal zijn,  $z_0 = c^{\text{te}}$ . We noemen dit het vrij oppervlak van de vloeistof. Onder het vrij oppervlak wordt de druk gegeven door

$$p = \rho g(z_0 - z) = \rho g d \quad (3.9)$$

Dit is de wet van de hydrostatica, die stelt dat bij rust de druk lineair toeneemt met de diepte  $d$  onder het vrij oppervlak. De waarde van de druk blijkt gelijk te zijn aan het gewicht van de bovenliggende vloeistof per oppervlakte (Fig. 3.1a). Echter het is niet nodig dat de vloeistof daarboven effectief aanwezig is, zoals weergegeven in Fig. 3.1b. De piëzometrische hoogte  $h$  is dus gelijk aan  $z + d$ . Vermits het nulniveau van de plaatshoogte  $z$  willekeurig gekozen kan worden, geldt dit ook voor  $h$ , waaruit volgt dat er geen natuurlijk nulpunt is voor de piëzometrische hoogte.

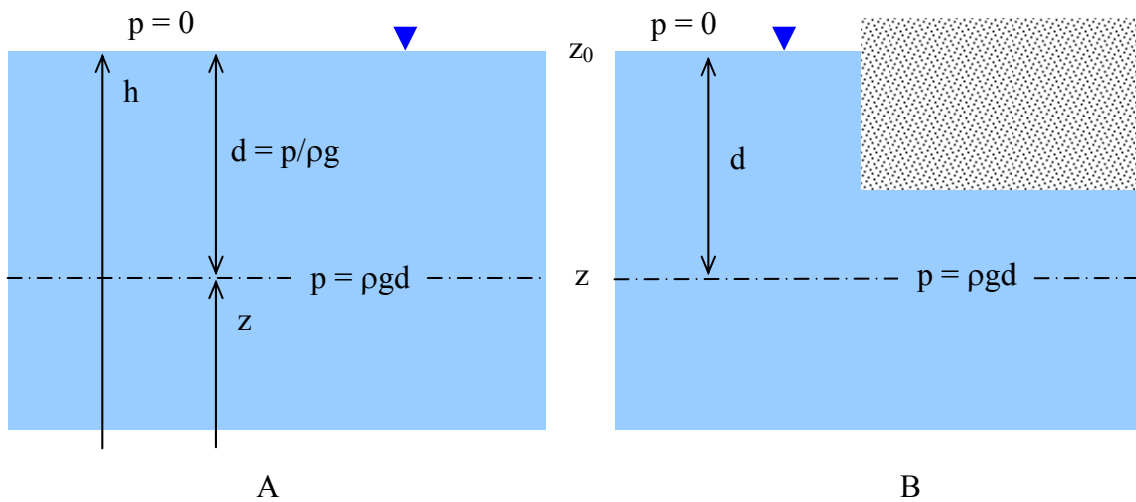


Fig. 3.1 De hydrostatische wet.

De hydrostatische wet werd voor het eerst opgesteld door Pascal, die hiermee een aantal wetmatigheden formuleerde, zoals

- Bij verbonden vaten staat bij evenwicht het vrij oppervlak steeds op dezelfde hoogte en is de druk op een bepaalde hoogte steeds gelijk (Fig. 3.2a).
- Met een hydraulische pers kan men door een kleine kracht  $F_1$  uit te oefenen op een kleine zuiger  $S_1$  een grote kracht  $F_2$  bekomen op een grote zuiger  $S_2$  (Fig. 3.2b); immers uit de gelijkheid van de druk volgt

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad (3.10)$$

Merk op dat de energie behouden blijft. Immers, omdat het volume van het verplaatste water hetzelfde moet zijn, zal de kleine zuiger over een grotere afstand moeten bewegen dan de grote zuiger.

- Door slechts een zeer klein volume vloeistof toe te voegen kan men een vat doen barsten: (Fig. 3.2c). Pascal gebruikte dit experiment om toeschouwers te verbazen. De vloeistof wordt toegevoegd door een hoge en nauwe buis en vermits  $p = \rho g d$  ontstaat er een grote druktoename in het vat, waardoor dit uit zijn voegen barst.

Ook de paradox van Simon Stevin (1586) kan verklaard worden door de hydrostatische wet: blijkbaar resulteert de druk van een vloeistofvolume  $V$  in een erlenmeyer op bodem  $S$  van de

fles in een kracht die groter is dan het gewicht van de vloeistof:  $F = pS = \rho g d S < \rho g V$  (?) (Fig. 3.2d).

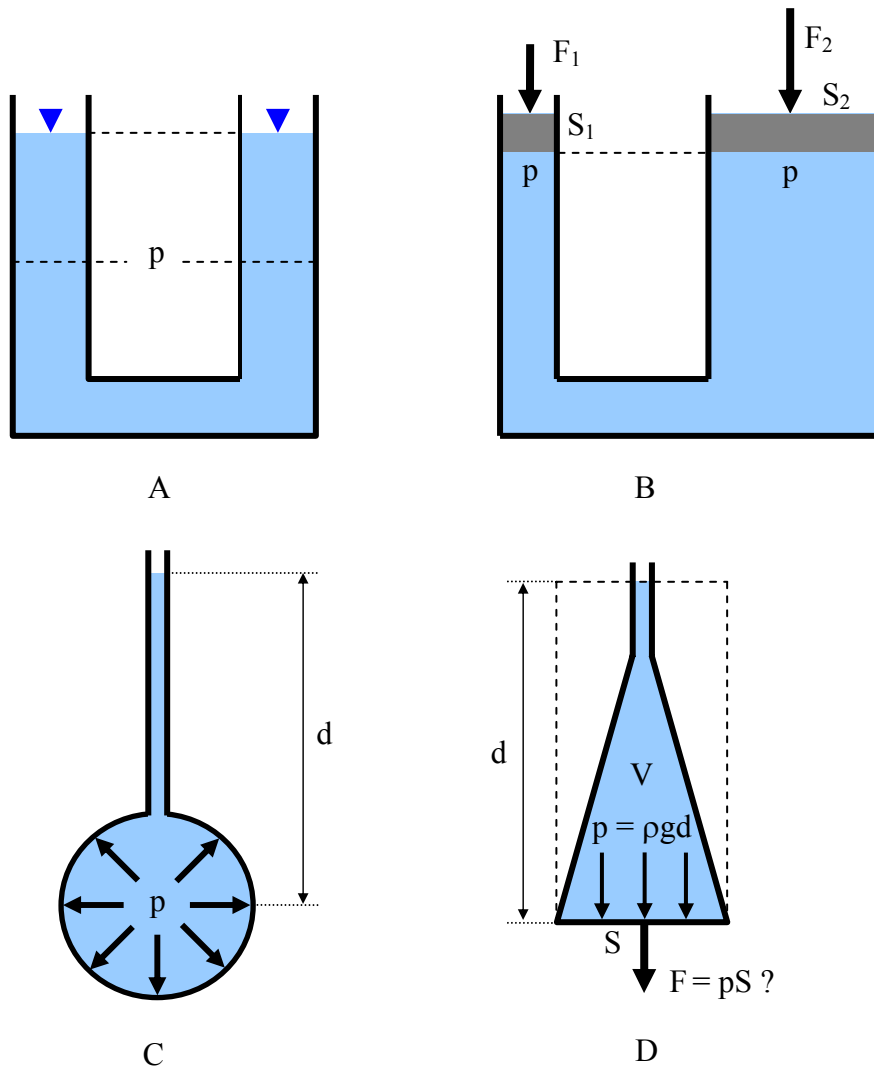


Fig. 3.2 Enkele toepassingen van de hydrostatische wet: (a) verbonden vaten, (b) de hydraulische pers, (c) het experiment van Pascal en (d) de paradox van Stevin.

### 3.2 Metingen van de druk en de piëzometrische hoogte

Voor het opmeten van de druk en de piëzometrische hoogte bestaan er verschillende technieken. De meest eenvoudige methode bestaat erin om een verticale buis aan te brengen in de vloeistof op de plaats waar men de meting wil uitvoeren, zoals weergegeven in Fig. 3.3. De vloeistof zal in de buis opstijgen en op een zekere hoogte tot rust komen. Wegens de hydrostatische wet zal het vloeistofniveau in de buis overeenkomen met de piëzometrische hoogte van de vloeistof. Men noemt daarom een dergelijk meettoestel een piëzometer. Bovendien geeft het verschil in hoogte tussen het meetpunt en het niveau van de vloeistof in de buis de drukhoogte van de vloeistof in het meetpunt. Met behulp van vergelijking 3.8 kan dan de druk berekend worden. Een piëzometer kan ook gebruikt worden om drukken in

stromende vloeistoffen op te meten. Immers het volstaat dat alleen de vloeistof in de buis in rust is, opdat de hydrostatische wet geldig zou zijn. De buis moet dan wel dwars geplaatst worden in de richting van de stroming (zie de buis van Pitot in hoofdstuk 4). Ook moet de diameter van de buis minstens 13 mm zijn, om capillaire effecten te vermijden.

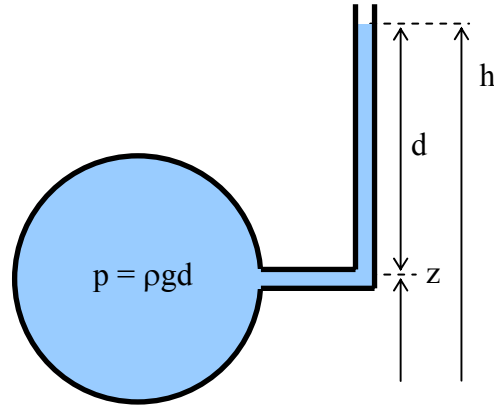


Fig. 3.3 Meting van de druk met een piëzometer.

Grote drukken kunnen opgemeten worden met een manometer, bestaande uit een U-vormige buis gevuld met een zwaardere vloeistof (Fig. 3.4).

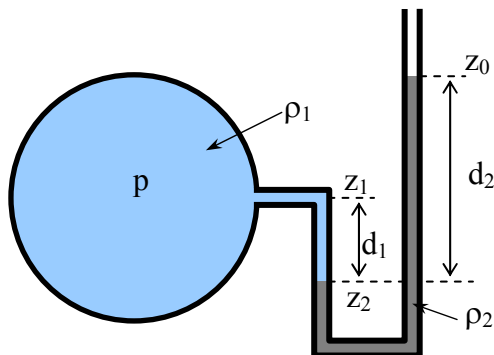


Fig. 3.4 Meting van de druk met een manometer.

Gebruik makend van de hydrostatische wet om de drukverschillen tussen de verschillende niveau's te berekenen, volgt

$$p = \rho_2 g(z_0 - z_2) - \rho_1 g(z_1 - z_2) = g(\rho_2 d_2 - \rho_1 d_1) \quad (3.11)$$

In geval het fluïdum in de container een gas is, mag men de tweede term in het rechter lid van vergelijking 3.11 verwaarlozen.

Differentieelmanometers worden gebruikt om drukverschillen op te meten (Fig. 3.6). Uit de hydrostatische wet volgt

$$p_1 - p_2 = (\rho_2 - \rho_1)g(z_2 - z_1) = g(\rho_2 - \rho_1)d \quad (3.12)$$

Deze vergelijking geldt alleen voor het geval dat de aansluitpunten van de manometer op gelijke hoogte gelegen zijn en het fluïdum in de beide reservoirs hetzelfde is. In andere gevallen wordt de vergelijking iets ingewikkelder.

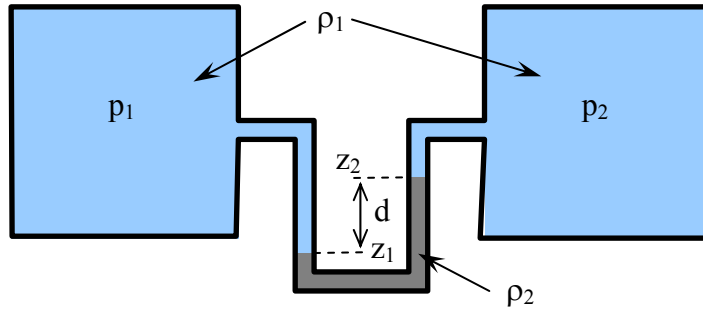


Fig. 3.5 Een differentieelmanometer.

Voor industriële toepassingen gebruikt men andere types van drukmeters, omdat deze meer duurzaam zijn in gebruik. Een bourdon of buisveer drukmeter (uitgevonden en gepatenteerd in 1849 door Eugene Bourdon, Frankrijk) bestaat uit een hol gekromd metalen buisje, dat aan één kant gesloten is en aan de andere kant verbonden wordt met het fluïdum waarvan men de druk wenst te bepalen (Fig. 3.6a). Door het drukverschil tussen de binnen- en buitenzijde, zal het buisje recht getrokken worden wat d.m.v. een vergrotende hefboommechanisme aan een wijzer verbonden wordt waardoor men een aflezing bekommt. Door het toestel af te ijken kan de wijzerstand omgezet worden in een druk. Het toestel meet dus de relatieve druk t.o.v. de atmosfeer. Een druksensor bestaat uit een membraan of diafragma dat vervormt wanneer de drukken aan beide zijden verschillen (Fig. 3.6b). Door de verplaatsing over te brengen, hetzij mechanisch of elektronisch, kan men een aflezing bekomen, welke na ijking omgezet kan worden in een drukmeting.

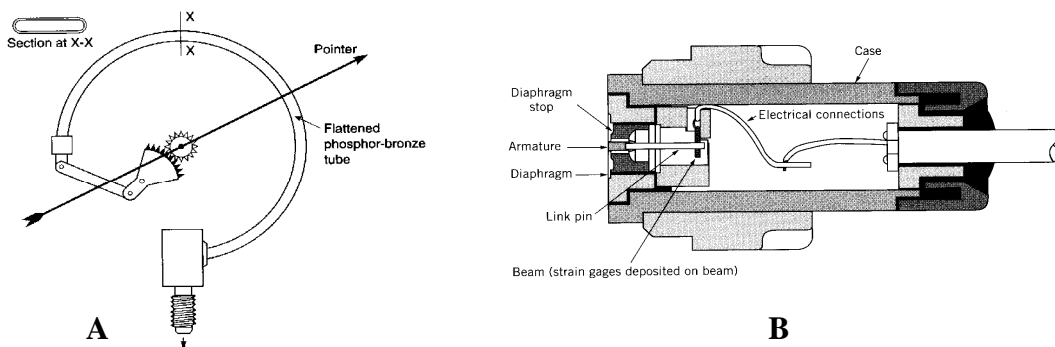


Fig. 3.6 Industriële drukmeters: (a) bourdonmeter en (b) diafragma-druksensor.



### 3.3 Krachten uitgeoefend door vloeistoffen in rust

Objecten in contact met vloeistoffen in rust ondervinden de hydrostatische druk van de vloeistof. Dikwijls is het belangrijk om de resultante van deze drukken te kennen. De resulterende kracht  $\underline{F}$  wordt bekomen door integratie van de drukken over het oppervlak

$$\underline{F} = -\int_S p d\underline{S} \quad (3.13)$$

Het aangrijppunt van de resultante  $\underline{x}_F$  wordt het drukcentrum genoemd en kan bepaald worden door de gelijkheid van het moment op het oppervlak uit te drukken

$$\underline{x}_F \times \underline{F} = -\int_S \underline{x} \times p d\underline{S} \quad (3.14)$$

Dergelijke berekeningen kunnen ingewikkeld worden indien het oppervlak gekromd is.

Bijvoorbeeld in geval van een verticale wand (Fig. 3.7) in contact met een stilstaande vloeistof over een hoogte  $H$ , kan de grootte van  $F$  per eenheidsbreedte in de derde dimensie berekend worden als

$$F = \int_0^H p dz = \int_0^H \rho g (H - z) dz = \rho g \frac{H^2}{2} \quad (3.15)$$

De plaats van het drukcentrum wordt bekomen als volgt

$$z_F F = \int_0^H z p dz = \int_0^H z \rho g (H - z) dz = \rho g \frac{H^3}{6} = \frac{H}{3} F \quad (3.16)$$

waaruit volgt dat de resultante aangrijpt op  $1/3$  van de hoogte gemeten vanaf de bodem, of op  $2/3$  van de hoogte gemeten vanaf het vrij oppervlak.

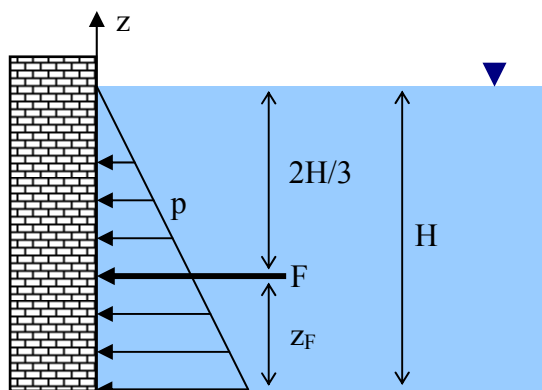


Fig. 3.7 Kracht uitgeoefend door een vloeistof in rust op een verticale wand.



*De sluisdeuren staan in een hoek tegen elkaar om de druk van het water op te vangen.*

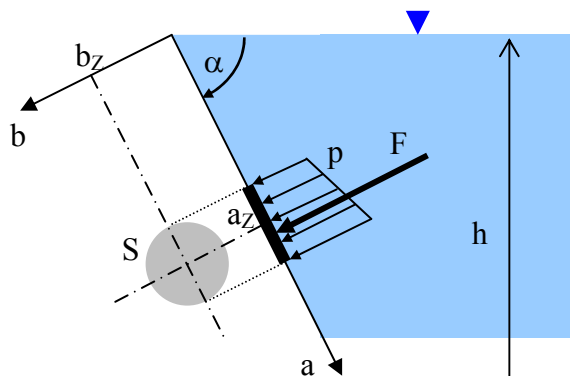


Fig. 3.8 Kracht uitgeoefend door een vloeistof in rust op een recht oppervlak.

De kracht op een oppervlak gelegen in een vlak (Fig. 3.8) kan berekend worden als volgt. Omdat de richting van de kracht gekend is, namelijk loodrecht op het oppervlak, moet alleen nog de grootte van de kracht berekend worden

$$F = \int_S p dS = \int_S \rho g (h - z) dS = \rho g \left( h \int_S dS - \int_S z dS \right) = \rho g (h - z_z) S = p_z S \quad (3.17)$$

met  $z_z$  de hoogte van het zwaartepunt van het oppervlak en  $p_z$  de druk van de vloeistof in dit zwaartepunt. Voor de bepaling van het drukcentrum maken we gebruik van een lokaal assenstelsel (a,b) in het schuin vlak, zoals weergegeven in Fig. 3.8, waarbij het oppervlak neergeslagen werd in het blad van de figuur. Het moment om respectievelijk de b- en de a-as

geeft

$$a_F F = \int_S a p dS = \int_S a^2 \rho g(\sin \alpha) dS = \rho g(\sin \alpha) \int_S a^2 dS = \rho g(\sin \alpha) I_{aa} \quad (3.18a)$$

$$b_F F = \int_S b p dS = \int_S a b \rho g(\sin \alpha) dS = \rho g(\sin \alpha) \int_S a b dS = \rho g(\sin \alpha) I_{ab} \quad (3.18b)$$

waarin  $I_{aa}$  en  $I_{ab}$  traagheidsmomenten zijn van het oppervlak. Vermits de grootte van de kracht gelijk is aan  $\rho g a_z(\sin \alpha) S$ , volgt hieruit

$$a_F = \frac{I_{aa}}{a_z S} = \frac{a_z^2 S + I_{aa}^z}{a_z S} = a_z + \frac{I_{aa}^z}{a_z S} \quad (3.19a)$$

$$b_F = \frac{I_{ab}}{a_z S} = \frac{a_z b_z S + I_{ab}^z}{a_z S} = b_z + \frac{I_{ab}^z}{a_z S} \quad (3.19b)$$

met  $I_{aa}^z$  en  $I_{ab}^z$  de traagheidsmomenten t.o.v. het zwaartepunt van het oppervlak. Merk op dat  $a_F$  altijd groter is dan  $a_z$ , zodat het drukcentrum altijd lager is dan het zwaartepunt, en dat  $b_F$  gelijk is aan  $b_z$  in geval van een symmetrisch oppervlak ( $I_{ab}^z = 0$ ).

Voor een gebogen oppervlak worden de vergelijkingen nog ingewikkelder en is het beter om anders te werk te gaan. Er bestaan speciale methodes afhankelijk van de vorm van het oppervlak, welke men kan terugvinden in de vakliteratuur. Een algemene methode voor gebogen oppervlakken bestaat erin om de componenten van de kracht afzonderlijk te bepalen (Fig. 3.9).

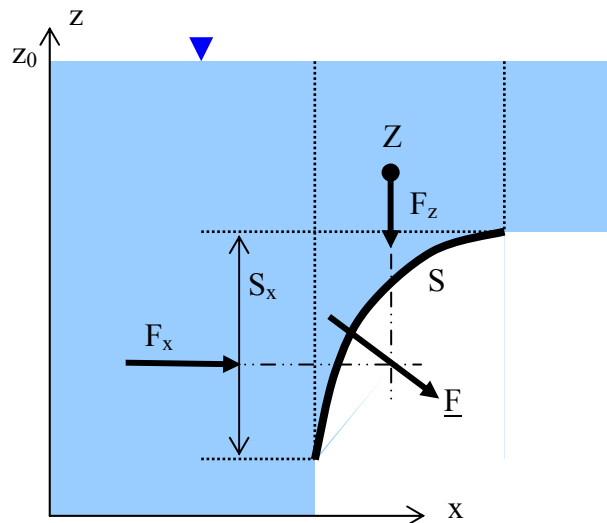


Fig. 3.9 Berekening van krachten uitgeoefend door een vloeistof in rust op een gebogen oppervlak.

De horizontale componenten kunnen bekomen worden als volgt. Voor een component  $F_n$  in de richting  $\underline{n}$  geldt

$$F_n = \underline{F} \cdot \underline{n} = - \int_S p d\underline{S} \cdot \underline{n} = - \int_{S_n} p dS_n \quad (3.20)$$

waarbij  $S_n$  de projectie is van  $S$  in de  $n$ -richting. Het bijzondere is dat  $S_n$  gelegen is in een vlak zodat  $F_n$  berekend kan worden met de vorige methode. Men kan aldus afzonderlijk  $F_x$  en  $F_y$  berekenen alsook hun richting en aangrijppunt. De verticale component wordt bekomen als volgt

$$F_z = -\int_{S_z} p dS_z = -\int_{S_z} \rho g(z_0 - z) dS_z = -\rho g V \quad (3.21)$$

met  $V$  het volume gelegen tussen het oppervlak en het vrij oppervlak van de vloeistof. Deze verticale kracht grijpt aan in het zwaartepunt  $Z$  van  $V$ . De verticale component is dus niets anders dan het gewicht van de vloeistof boven het oppervlak, waarbij dit water zelfs niet effectief aanwezig moet zijn. Indien het oppervlak in contact is met de vloeistof aan zijn onderzijde, dan is  $F_z$  naar boven gericht i.p.v. naar beneden.

Nadat men alle componenten berekend heeft, volstaat het om de verschillende krachten samen te tellen op vectoriele wijze.

We beschouwen nog het speciaal geval van een buis gevuld met een vloeistof, die onder een bepaalde druk staat (Fig. 3.10). Om de wanddikte van buis te dimensioneren is het nodig de spanningen in de wand te berekenen. Dit kan op eenvoudige wijze gebeuren door het evenwicht uit te drukken van een halve buis, waaruit volgt

$$2Rp = 2d\sigma \quad (3.22)$$

met  $d$  de dikte van de wand. Hieruit blijkt dat de wand van de buis onderworpen is aan een trekspanning gegeven door

$$\sigma = p \frac{R}{d} \quad (3.23)$$

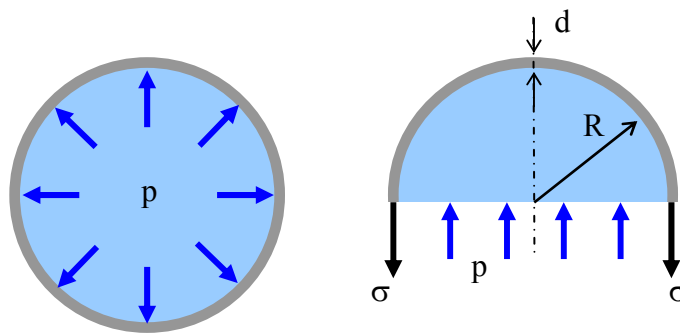


Fig. 3.10 Spanning uitgeoefend in de wand van een met vloeistof gevulde buis.

### 3.4 Ondergedompelde en drijvende voorwerpen

De totale kracht te wijten aan de hydrostatische druk op een ondergedompeld voorwerp (Fig. 3.11) kan berekend worden als volgt

$$\underline{F} = -\oint_S p d\underline{S} \quad (3.24)$$

met  $S$  het oppervlak dat het voorwerp omhuld. Door de stelling van Green te gebruiken en de hydrostatische wet volgt hieruit

$$\underline{F} = -\int_V \nabla p dV = -\int_V \rho g \nabla (h - z) dV = \int_V \rho g \nabla z dV = \rho g V \nabla z = -\underline{G}_v \quad (3.25)$$

met  $V$  het volume van het ondergedompelde voorwerp en  $\underline{G}_v$  het gewicht van het voorwerp, indien dit zou bestaan uit vloeistof.

Vergelijking 3.25 is de wet van Archimedes, namelijk een ondergedompeld voorwerp ondervindt een opwaartse stuwkracht gelijk aan het gewicht van de verplaatste vloeistof. Dit kan ook op een andere eenvoudige wijze bewezen worden: de druk is alleen afhankelijk van de vorm van het voorwerp en niet van het gewicht; veronderstel nu dat het ondergedompelde voorwerp uit dezelfde vloeistof bestaat; vermits de vloeistof in rust is, moet de resultante van de hydrostatische druk dan tegengesteld zijn aan het gewicht van deze vloeistof.

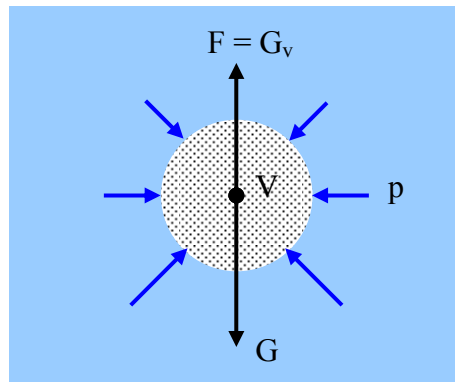


Fig. 3.11 Krachten op een ondergedompeld voorwerp.

Uit de wet van Archimedes volgt dat indien het soortelijk gewicht van het voorwerp groter is dan deze van de vloeistof, het voorwerp naar beneden zal zinken, omdat de zwaartekracht groter is dan de stuwkracht. In het omgekeerde geval zal het voorwerp naar boven stijgen en gaan drijven op de vloeistof, waarbij een gedeelte van het volume  $V_o$  onder het vrij oppervlak van de vloeistof blijft zitten. Uit de wet van Archimedes volgt dan dat de grootte van de stuwkracht gegeven is door

$$F = \rho g V_o \quad (3.26)$$

Dit principe wordt gebruikt bij de hydrometer, dit is een eenvoudig toestel om de densiteit van vloeistoffen te bepalen. De hydrometer bestaat uit een vrijwel gewichtloos gesloten buisje met straal  $r$  en onderaan een gekend gewicht  $G$ . Wanneer de hydrometer in de vloeistof wordt geplaatst gaat deze drijven (Fig. 3.12) en kan men met de ondergedompelde diepte  $d$  de densiteit van de vloeistof berekenen uitgaande van vergelijking 3.26.

$$\rho = \frac{G}{g\pi r^2 d} \quad (3.27)$$

In de praktijk zijn er merktekens op het buisje aangebracht waarmee men de densiteit rechtstreeks kan aflezen.

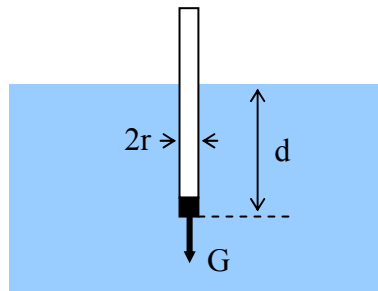


Fig. 3.12 Principe van een hydrometer.

De stabiliteit van een drijvend voorwerp is verzekerd wanneer het zwaartepunt  $Z$  lager gelegen is dan het aangrijppunt  $Z_0$  van de stuwkracht (Fig. 3.13a); dit geldt ook voor ondergedompelde voorwerpen (zoals bijvoorbeeld een duikboot); men noemt dit gewichtsevenwicht. Een drijvend voorwerp kan ook stabiel zijn wanneer het zwaartepunt hoger gelegen is dan aangrijppunt van de stuwkracht, wat meestal het geval is voor drijvende voorwerpen zoals bijvoorbeeld een schip (Fig. 3.13b). De verklaring volgt uit het feit dat bij een schommeling van het drijvende voorwerp de vorm van het ongedompelde volume verandert, waardoor de stuwkracht van plaats verandert en samen met het gewicht van het voorwerp een koppel vormt dat het drijvende voorwerp terug in evenwicht brengt (Fig. 3.13c); men noemt dit vormevenwicht.

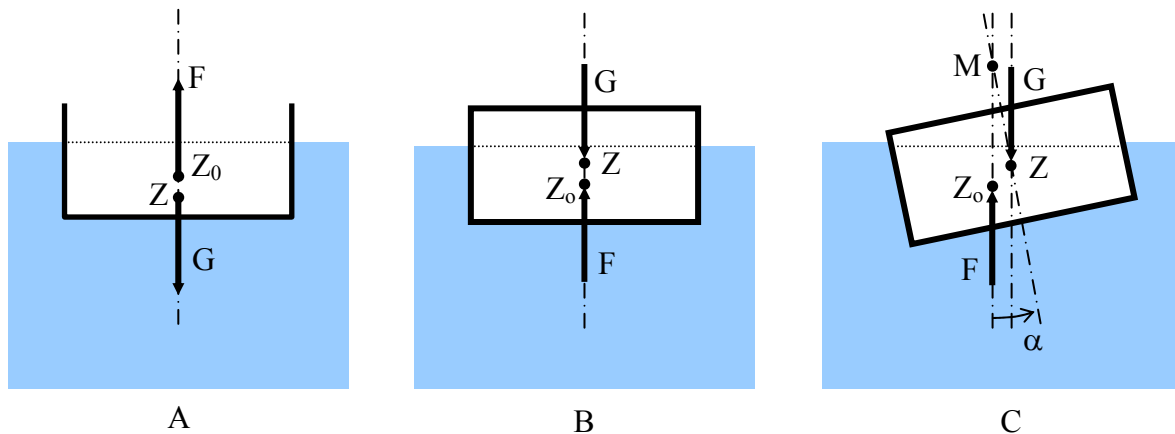


Fig. 3.13 Stabiliteit van een drijvend voorwerp: (a) zwaartepunt lager dan stuwpunt, (b) zwaartepunt hoger dan stuwpunt, en (c) bij een afwijking.

Het punt  $M$  (Fig. 3.13c) wordt het metacentrum genoemd en de afstand  $MZ$  de metacentrische hoogte  $h_M$ . Het blijkt dat voor kleine schommelingen de metacentrische hoogte constant is, zodat bij een hoek  $\alpha$  het terug in evenwicht richtend koppel gelijk is aan  $Gh_M \sin \alpha$ . Het drijvend voorwerp komt dus terug in evenwicht als het metacentrum  $M$  boven het zwaartepunt  $Z$  gelegen is, anders zal het voorwerp kantelen. De stabiliteit van een drijvend voorwerp neemt toe met de metacentrische hoogte. Bijvoorbeeld voor vrachtschepen bedraagt de metacentrische hoogte 0,3 m tot 0,7 m; voor oorlogsschepen of zeiljachten is dit meer (tot 1,5 m) waardoor deze stabiel zijn maar ook sneller rollen.

### 3.5 Vloeistoffen in een permanent versnellingsveld

Wanneer een vloeistof onderworpen is aan een permanente versnelling dan is de traagheidskracht constant en kan deze aanzien worden als een uitwendige kracht die inwerkt op de vloeistof. Het evenwicht tussen de krachten wordt dan

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\rho g \nabla z - \nabla p \quad (3.28)$$

Voor een waarnemer die mee beweegt met deze versnelling is de vloeistof in rust, vermits beiden onderworpen zijn aan dezelfde versnelling. Er kan ook geen wrijving optreden vermits alle vloeistofdeeltjes op dezelfde wijze bewegen.

Ter illustratie beschouwen we enkele voorbeelden. Het eerste betreft een horizontale versnelling, bijvoorbeeld vloeistof in een container op een vertrekkende vrachtwagen (Fig. 3.14).

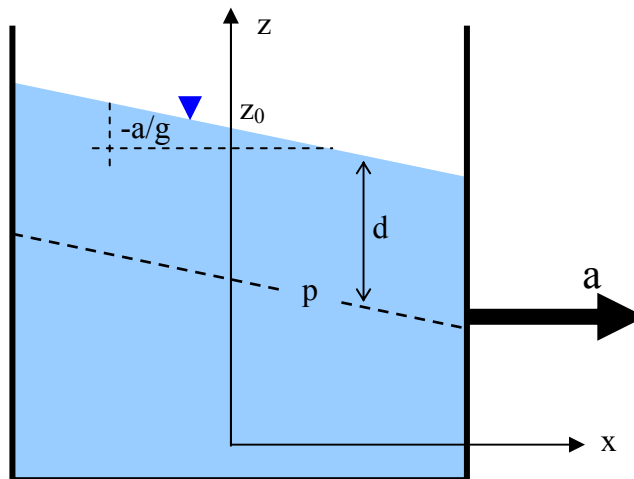


Fig. 3.14 Vloeistof met een permanente horizontale versnelling.

Stel dat een acceleratie  $a$  in de  $x$ -richting plaatsvindt, dan wordt de versnelling gegeven door

$$\frac{dv}{dt} = (a, 0, 0)^T = a \nabla x \quad (3.29)$$

Wanneer we dit substitueren in de impulsvergelijking geeft dit

$$\rho a \nabla x + \rho g \nabla z + \nabla p = 0 \quad (3.30)$$

waaruit volgt

$$\rho a x + \rho g z + p = c^{te} \quad (3.31)$$

De integratieconstante kan bekomen worden uitgaande van de gemiddelde positie van het vrij

oppervlak. Stel dat in het midden van de container ( $x = 0$ , de waarnemer beweegt mee met de vloeistof) het vrij oppervlak op een hoogte  $z_0$  gelegen is, dan volgt hieruit

$$\frac{ax}{g} + z + \frac{p}{\rho g} = z_0 \quad (3.32)$$

Het vrij oppervlak wordt bekomen voor  $p = 0$ , waaruit volgt

$$z = z_0 - (a/g)x \quad (3.33)$$

Dit is een vlak met een helling  $-a/g$  t.o.v. de horizontale; dus hoe groter de versnelling hoe schuiner het bovenvlak van de vloeistof. De druk in de vloeistof wordt gegeven door

$$p = \rho g[z_0 - (a/g)x - z] = \rho g d \quad (3.34)$$

met  $d$  de diepte onder het vrij oppervlak. Deze vergelijking is hetzelfde als de hydrostatische wet.

Een tweede voorbeeld betreft een vloeistof in een vat dat roteert met een hoeksnelheid  $\omega$  (Fig. 3.15). Er is dan een permanente versnelling in de radiale richting, welke in cilindrische coördinaten  $(r, \alpha, z)$  gegeven wordt door

$$\frac{dv}{dt} = (-\omega^2 r, 0, 0)^T = -\omega^2 r \nabla r \quad (3.35)$$

In dit geval is  $\nabla$  de nabla operator in cilindrische coördinaten

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \quad (3.36)$$

De impulsvergelijking wordt dan

$$-\rho \omega^2 r \nabla r + \rho g \nabla z + \nabla p = 0 \quad (3.37)$$

waaruit volgt

$$-\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + \rho g z + p = c^{te} \quad (3.38)$$

De integratieconstante kan bekomen worden door uit te drukken dat in het midden ( $r = 0$ ) het vrij oppervlak ( $p = 0$ ) op een hoogte  $z_0$  staat, zodat

$$-\frac{\omega^2 r^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = z_0 \quad (3.39)$$

Het vrij oppervlak ( $p = 0$ ) wordt dan gegeven door

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad (3.40)$$

Dit is een parabolische vorm. Deze eigenschap werd vroeger gebruikt om het toerental,  $f$ , van



een roterend voorwerp op te meten, immers

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{2g\Delta z}}{2\pi R} \quad (3.41)$$

met  $R$  de straal van de cylinder en  $\Delta z$  het hoogteverschil van het vrij oppervlak aan de rand van een vloeistofreservoir dat mee draait met de rotor (Fig. 3.15). De druk in de vloeistof wordt gegeven door

$$p = \rho g(z_0 - z) + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = \rho g d \quad (3.42)$$

met  $d$  de diepte onder het vrij oppervlak. Dit is opnieuw de hydrostatische wet.

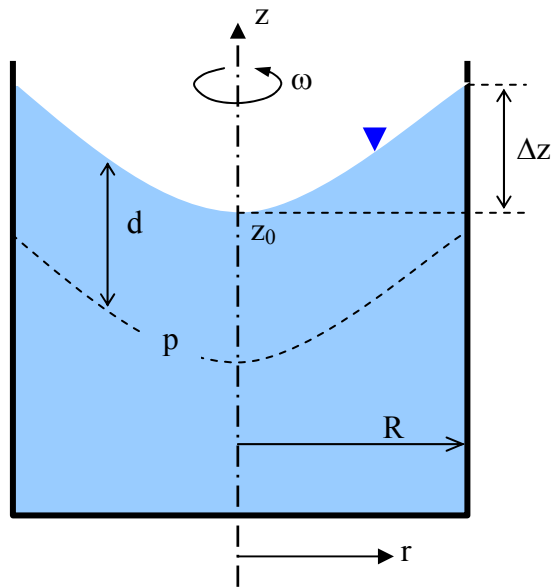


Fig. 3.15 Vloeistof in een roterend vat.

## 4 STROMING ZONDER WRIJVING

---

### 4.1 Stromingsvergelijkingen

De Euler-vergelijkingen gelden voor perfecte vloeistoffen ( $\mu = 0$ ) of indien de stroming rotatieloos is ( $\nabla \times \underline{v} = 0$ ). In beide gevallen zijn er geen schuifspanningen of wrijving aanwezig in de vloeistof. Dit is een vreemde zaak, want vloeistoffen worden in beweging gebracht door schuifspanningen. Het is alsof we met een lepel in de soep roeren en de soep onbeweeglijk blijft. Dit impliceert ook dat stromende perfecte vloeistoffen niet gestopt kunnen worden en eeuwig onveranderlijk blijven doorstromen zonder energieverlies. Uiteraard bestaan dergelijke stromingen niet (uitgezonderd vloeibaar helium bij een temperatuur lager dan  $2,2^\circ\text{K}$ ), maar is het toegestaan te veronderstellen dat de vloeistof zich gedraagt op een perfecte wijze in geval er weinig wrijving is. Dit zijn meestal lokale situaties waar de wrijving van ondergeschikt belang is en de Euler-vergelijkingen bij benadering toepasbaar zijn

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \tag{4.1a}$$

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\rho g \nabla z - \nabla p \tag{4.1b}$$

waarbij we als uitwendige krachten alleen de zwaartekracht beschouwen. Dit is een stelsel van vier vergelijkingen en vier onbekenden,  $p$  en  $\underline{v}$ , hetgeen theoretisch oplosbaar is. Echter gezien de complexiteit van de vergelijkingen, zijn er in de praktijk nog verdere vereenvoudigingen nodig om bruikbare resultaten te bekomen.

Veronderstel dat we over een oplossing beschikken voor een bepaald probleem. We kennen dan de druk en de snelheid in elk punt en op elk tijdstip. Volgens het standpunt van Lagrange volgen we elk deeltje in zijn beweging. Vertrekkende van een beginpositie  $\underline{x}(0)$  op tijdstip  $t = 0$  komen we in een positie  $\underline{x}(t)$  terecht na een tijd  $t$ ; een dergelijk traject wordt een stroombaan genoemd (Fig. 4.1a). De vergelijking van een stroombaan is

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{v} \tag{4.2}$$

ofwel

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt \tag{4.3}$$

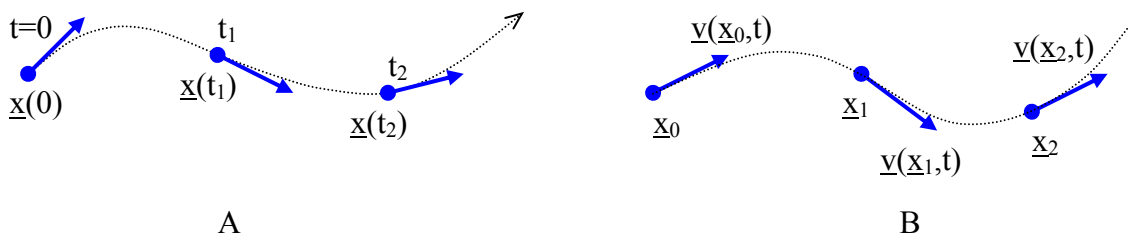


Fig. 4.1 Een stroombaan (A) en een stroomlijn (B).

Stroombanen zijn meestal erg moeilijk te bepalen. Indien we echter het standpunt van Euler volgen dan nemen we op een bepaald tijdstip in elk punt van de ruimte een zekere snelheid waar. We kunnen dan op elk ogenblik dit stromingspatroon visualiseren door zogenaamde stroomlijnen; dit zijn curven die rakend zijn aan de snelheidsvectoren (Fig. 1.4b). De vergelijking van een stroomlijn is

$$d\underline{x} = \underline{c}^{te} \underline{v} \quad (4.4)$$

ofwel

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \underline{c}^{te} \quad (4.5)$$

hetgeen iets eenvoudiger is om op te lossen, maar toch nog altijd redelijk ingewikkeld. Er zijn ook nog emissielijnen die gevormd worden door deeltjes die doorheen een bepaald punt gegaan zijn (bijvoorbeeld een merkstof die continu geïnjecteerd wordt in een vast punt, zoals de rooksluier uit een schouw).

Voor een permanente stroming verandert de snelheid niet met de tijd en vallen de stroombanen, stroomlijnen en emissielijnen samen. Deze banen zijn dikwijls bij benadering gekend zonder dat men deze exact moet berekenen. De stromingsvergelijkingen in zulk geval worden dan

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (4.6a)$$

$$\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \rho g \nabla z + \nabla p = 0 \quad (4.6b)$$

Beschouw nu een gesloten kromme en alle stroombanen die er doorheen gaan (Fig. 4.2).

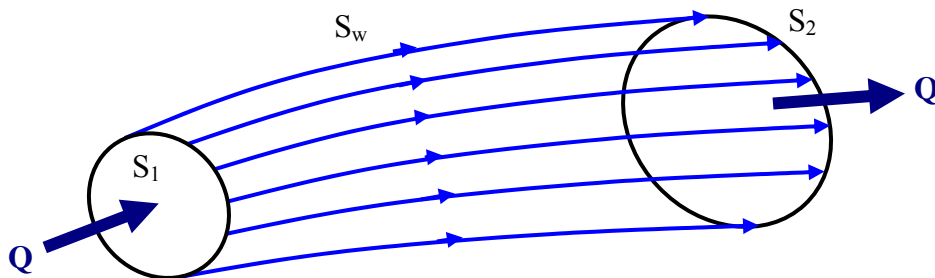


Fig. 4.2 Een stroombuis.

Hierdoor ontstaat een oppervlak dat we aanduiden als een stroombuis. We onderzoeken de continuïteitsvergelijking in het volume  $V$ , dat omvat wordt door de wand van de stroombuis  $S_w$  en twee willekeurige oppervlakken  $S_1$  en  $S_2$  die de stroombuis afbakenen aan het begin en einde, zoals weergegeven in Fig. 4.2. Integratie van de continuïteitsvergelijking over dit volume geeft

$$\int_V (\nabla \cdot \underline{v}) dV = 0 \quad (4.7)$$

Toepassing van het theorema van Gauss geeft

$$\int_V (\nabla \cdot \underline{v}) dV = \oint_S \underline{v} \cdot d\underline{S} = \int_{S_1} \underline{v} \cdot d\underline{S} + \int_{S_w} \underline{v} \cdot d\underline{S} + \int_{S_2} \underline{v} \cdot d\underline{S} = 0 \quad (4.8)$$

De integraal over het oppervlak  $S_w$  is nul, omdat de snelheid parallel is aan de wand van de stroombuis en  $\underline{v}$  dus loodrecht staat op  $d\underline{S}$ , waaruit volgt

$$\int_{S_1} \underline{v} \cdot (-d\underline{S}) = \int_{S_2} \underline{v} \cdot d\underline{S} = Q \quad (4.9)$$

waarin  $Q$  staat voor het debiet, zijnde het vloeistofvolume dat per tijdseenheid de stroombuis verlaat aan de uitgang  $S_2$  of binnenstroomt aan de ingang  $S_1$  (merk op dat omdat  $d\underline{S}$  positief wordt genomen naar buiten gericht, het debiet positief is voor uitstroming en negatief voor instroming). Vermits de oppervlakken  $S_1$  en  $S_2$  willekeurig zijn, is de grootte van het debiet alleen afhankelijk van de gekozen stroombuis. Hieruit volgt dat het debiet constant is in een stroombuis bij permanente stroming, hetgeen een vereenvoudigde uitdrukking is van de continuïteitswet. De dimensies van het debiet zijn  $[L^3/T]$  en als eenheden worden meestal  $m^3/s$  gebruikt.

In het bijzonder kunnen we in een stroombuis een dwarsdoorsnede  $S$  beschouwen, welke loodrecht staat op elke stroombaan in de stroombuis, waaruit volgt

$$Q = \int_S \underline{v} \cdot d\underline{S} = \int_S v dS = \langle v \rangle S \quad (4.10)$$

met  $\langle v \rangle$  de gemiddelde snelheid in de stroombuis in een dwarsdoorsnede. Dit is de formule van Castelli, welke stelt dat het debiet gelijk is aan de gemiddelde snelheid maal de oppervlakte van een dwarsdoorsnede van de stroombuis. In het bijzonder zal in een stroombuis de gemiddelde snelheid toenemen als de dwarsdoorsnede verkleint en omgekeerd.

We beschouwen nu de impulsvergelijking voor een permanente stroming en nemen het scalair product met de snelheid

$$\underline{v} \cdot (\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \rho g \nabla z + \nabla p) = 0 \quad (4.11)$$

De eerste term kan verder uitgewerkt worden

$$\underline{v} \cdot (\rho \underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = (\rho \underline{v} \cdot \nabla) \left( \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right) = \rho \underline{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \underline{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \quad (4.12)$$

waaruit volgt

$$\underline{v} \cdot \left[ \nabla \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \rho g \nabla z + \nabla p \right] = \underline{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p \right) = \underline{v} \cdot \nabla E = 0 \quad (4.13)$$

Dit betekent dat de gradiënt van  $E$  loodrecht staat op de snelheid, waaruit volgt dat  $E$  constant moet zijn langsheen een stroombaan (Fig. 4.3). Langs een stroombaan geldt dus

$$E = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = c^{te} \quad (4.14)$$

De fysische betekenis is onmiddellijk duidelijk:  $E$  is de energie van de vloeistof per volume

die drie bijdragen omvat: de kinetische energie  $\rho v^2/2$ , de gravitaire energie  $\rho gz$  en de drukenergie  $p$ . Langsheen een stroombaan blijkt de energie dus constant te zijn en de verklaring hiervoor is evident, immers een perfecte vloeistof kan stromen zonder wrijving dus zonder energieverlies. Dit is de wet van Bernoulli, welke een reeks van belangrijke toepassingen heeft in de praktijk, zoals verder aangetoond wordt.



*Daniel Bernoulli*

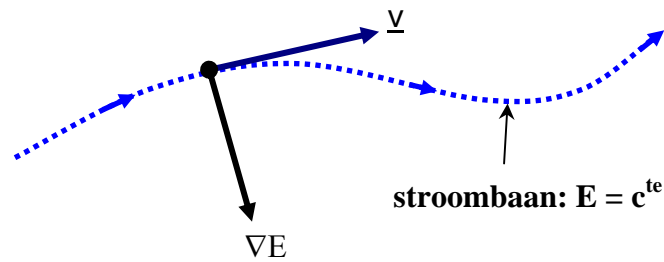


Fig. 4.3 De wet van Bernoulli.

Een verdere vereenvoudiging is mogelijk door te veronderstellen dat de stroming rotatieloos is. In hoofdstuk 2 werd aangetoond dat voor een rotatieloze stroming de snelheid afgeleid kan worden uit een potentiaal  $\phi$ , die voldoet aan de Laplace-vergelijking. Elke harmonische functie geeft dus een mogelijk stromingsveld; indien we deze functie kunnen bepalen dan is het probleem opgelost en alles berekenbaar ( $\underline{v} = \nabla\phi$  en  $p$  wordt bekomen met vergelijking 4.14). Echter in de praktijk blijkt het erg moeilijk te zijn om de juiste functie te vinden die voldoet aan alle randvoorwaarden, zoals instromingen, uitstromingen, wanden, openingen, e.d. Daarom zal men meestal de stroomlijnen niet exact kennen maar slecht visueel kunnen benaderen, hetgeen dikwijls voldoende is om tot bruikbare resultaten te komen.

In geval de stroming rotatieloos is werd in hoofdstuk 2 aangetoond dat  $(\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v} = \nabla(v^2/2)$ , zodat voor een permanente stroming vergelijking 4.6b omgevormd wordt tot

$$\rho \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \rho g \nabla z + \nabla p = 0 \quad (4.15)$$

waaruit volgt

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p\right) = 0 \quad (4.16)$$

ofwel

$$E = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = c^{te} \quad (4.17)$$

Dit is opnieuw de vergelijking van Bernoulli, doch het grote verschil met vergelijking 4.14 is dat dit nu niet alleen geldig is langsheen een bepaalde stroomlijn maar wel overal in de vloeistof. Dit betekent dat elk deeltje van de vloeistof dezelfde energie bezit. Indien men op een bepaalde plaats de energie kent geldt deze voor elk punt in de vloeistof. Deze eigenschap blijkt erg nuttig te zijn voor allerlei toepassingen.

## 4.2 De wet van Bernoulli

Indien bij een vloeistofstroming de energieverliezen klein zijn, is de wet van Bernoulli bij benadering toepasbaar. Deze wet kan uitgedrukt worden als een behoud van energie per vloeistofgewicht,  $e = E/\rho g$ , wat aangeduid wordt als de lading. De lading wordt dus gegeven door

$$e = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = c^{te} \quad (4.18)$$

De eerste term van de lading is de plaatshoogte en de tweede term de drukhoogte; de som van beide termen is de piëzometrische hoogte, welke gedefinieerd werd in vorig hoofdstuk. De derde term in de lading is de kinetische energiehoogte. De som van alle termen geeft de totale energiehoogte of de lading, waarvoor volgende eenvoudige fysische interpretatie kan worden gegeven: het is de maximale hoogte tot waar kan komen met zijn beschikbare energie indien er geen wrijvingsverliezen zijn; dus water in rust en in contact met de atmosfeer op een hoogte  $e$  bezit dezelfde energie (alleen gravitaire in dit geval). De verschillende termen worden weergegeven in Fig. 4.4.

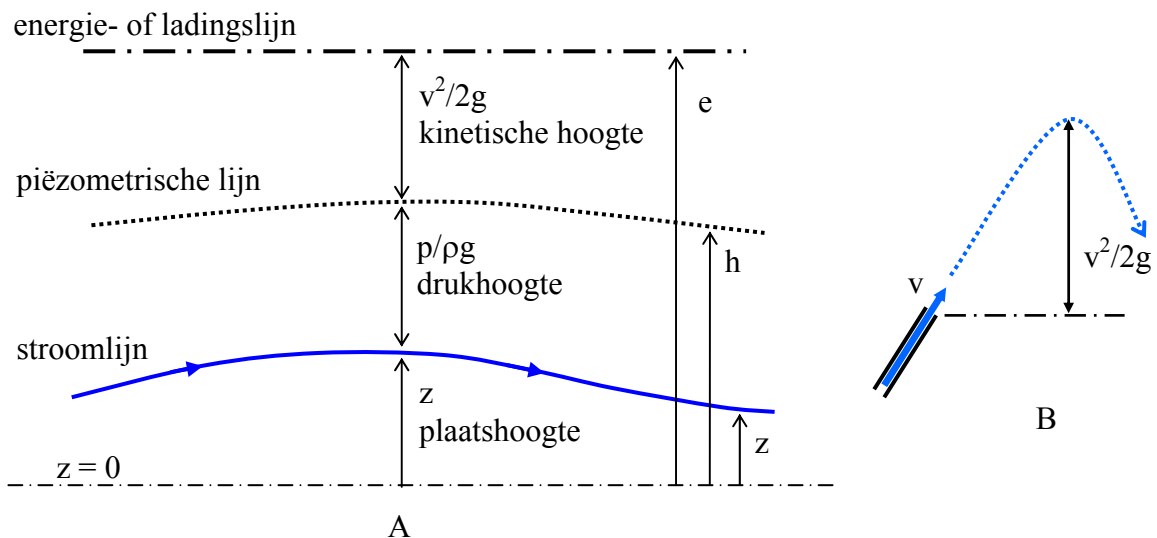


Fig. 4.4 De wet van Bernoulli langs een stroomlijn (a) en kinetische energie hoogte van een vloeistofstraal (b).

De lading of energiehoogte kan worden gemeten met een zogenaamde buis van Pitot. Dit is een buis, zoals een piëzometer, maar met een rechte inlaatsectie, welke in tegengestelde richting van de stroming wordt geplaatst, zoals weergegeven in Fig. 4.5a. Juist voor de inlaat van de pitotbuis (punt 2) ontstaat er een stagnatie, omdat de stroming er verhinderd wordt, dus  $v_2 = 0$ . Toepassing van de wet van Bernoulli tussen de punten 1 en 2 geeft dan

$$e = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \quad (4.19)$$

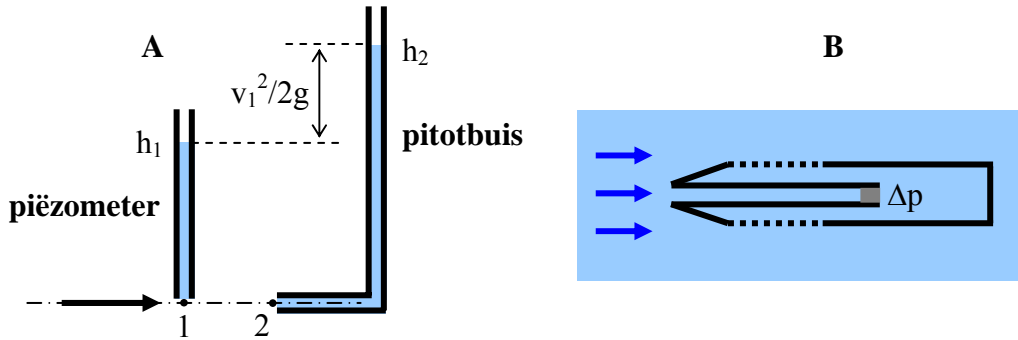


Fig. 4.5 (a) Pitotbuis, (b) Prandtl-buis.

Toepassing van de hydrostatische wet voor de vloeistof in de pitotbuis geeft

$$h_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = e \quad (4.20)$$

Hieruit volgt dat het niveau in de pitotbuis  $h_2$  overeenkomt met de ladingshoogte  $e$ . Men zegt dat de pitotbuis de dynamische druk meet en een piëzometer de statische druk. Indien de piëzometrische hoogte  $h_1$  in punt 1 wordt opgemeten met een gewone piezometer (inlaatsectie dwars op de stroming), kan volgt uit vergelijking 4.19 dat men de snelheid van de stroming kan bepalen als

$$v_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} \quad (4.21)$$

In de praktijk wordt dit gecombineerd in een zogenaamde Prandtl-buis, waarbij het verschil in statische en dynamische druk rechtstreeks wordt opgemeten, zodat  $v = \sqrt{2\Delta p/\rho}$  (Fig. 45b).

De vergelijking van Bernoulli kan ook toegepast worden op een stroombuis (Fig. 4.6).

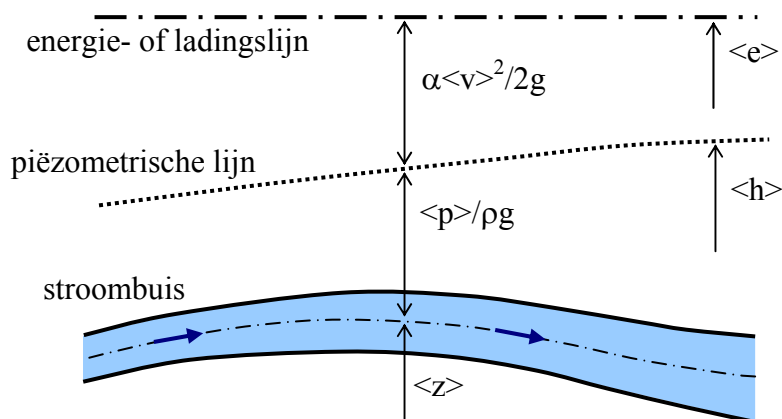


Fig. 4.6 De wet van Bernoulli voor een stroombuis.

De gemiddelde lading van de stroombuis kan berekend worden als een gewogen gemiddelde

van alle ladingen aanwezig in de stroombuis, met als gewicht de hoeveelheid van de stroming, dus het debiet

$$\langle e \rangle = \frac{1}{Q} \int_Q e dQ = \frac{1}{S \langle v \rangle} \int_S \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) v dS \quad (4.22)$$

waaruit volgt

$$\langle e \rangle = \langle z \rangle + \frac{\langle p \rangle}{\rho g} + \frac{\alpha \langle v \rangle^2}{2g} = c^{te} \quad (4.23)$$

waarbij  $\langle \rangle$  in de vergelijking betekent dat het een gemiddelde waarde betreft over een dwarse sectie van de stroombuis. Meestal worden deze symbolen weggelaten. Ook is het gebruikelijk om als gemiddelde waarde voor  $z$  de hoogte van de hartlijn van de stroombuis nemen en als gemiddelde waarde voor  $p$  de druk die voorkomt op de hartlijn. Voor de snelheid wordt de gemiddelde waarde gebruikt zoals berekend uit het debiet met de formule van Castelli, waarbij de coëfficiënt  $\alpha$  afhankelijk is van de snelheidsverdeling in de stroombuis, met volgende mogelijkheden: voor een uniforme stroming is de waarde 1 (dit is het theoretische uniforme snelheidsprofiel voor een perfecte vloeistof); voor een parabolische snelheidsverdeling is de waarde 2 (dergelijke verdeling komt voor bij laminaire stroming, zoals aangetoond zal worden in hoofdstuk 5); en voor een logaritmisch profiel bedraagt de waarde 1,05 (dergelijke verdeling is van toepassing bij turbulente stroming, zoals besproken zal worden in hoofdstuk 6). In de praktijk is de stroming meestal turbulent en vereenvoudigt men dikwijls de vergelijking door voor  $\alpha$  toch de waarde 1 te nemen, zodat de formule van Bernoulli voor een stroombuis hetzelfde wordt als voor een stroombaan.

Het wordt nu ook mogelijk om het vermogen van een vloeistofstroom te bereken, immers het vermogen  $P$  is de energie per tijdseenheid, zodat

$$P = \frac{\text{energie}}{\text{tijd}} = \frac{\text{energie}}{\text{volume}} \cdot \frac{\text{volume}}{\text{tijd}} = EQ = \rho g e Q \quad (4.24)$$

ofwel

$$P = \left( \rho g z + p + \frac{1}{2} \alpha \rho v^2 \right) Q \quad (4.25)$$

Merk op dat dit vermogen afhankelijk is van de conventies betreffende het nulniveau voor  $z$  en  $p$ ; bovenstaande formule geeft dus het vermogen t.o.v. een vloeistof in rust, in contact met de atmosfeer en op een hoogte nul. Het is nu ook duidelijk hoe we door middel van een pomp het vermogen van een vloeistofstroom kunnen verhogen; immers wanneer een pomp een bijkomend vermogen  $\Delta P$  aan een vloeistofstroom geeft, dan neemt de lading toe met een hoeveelheid  $\Delta e = \Delta P / \rho g Q$ ; men noemt dit dan de opvoerhoogte, want de lading wordt verhoogt met  $\Delta e$  (we komen hierop terug in hoofdstuk 7).

Ter illustratie bereken we het vermogen van een waterstroom uit een kraan. Stel dat de kraan een sectie heeft van  $1 \text{ cm}^2$  doorsnede en dat de gemiddelde snelheid van het uitstromende water  $10 \text{ m/s}$  is; het uitstromende water is in contact met de atmosfeer zodat  $p = 0$ , en we berekenen het vermogen t.o.v. water op dezelfde hoogte, zodat  $z = 0$ . Aldus krijgen we

$$P = \frac{1}{2} \rho v^2 Q = \frac{1}{2} \rho v^3 S = 0,5 \times 1000 \text{ kg/m}^3 \times (10 \text{ m/s})^3 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 50 \text{ W} \quad (4.24)$$



### 4.3 Toepassingen van de wet van Bernoulli

Een eerste toepassing betreft het meten van het debiet in een leiding. Dit kan gebeuren met een zogenaamde venturimeter, schematisch weergegeven in Fig. 4.7. De venturimeter is een buis met een vernauwde sectie. De vernauwing gebeurt geleidelijk zodat er zo weinig mogelijk wrijving is. Toepassing van de wet van Bernoulli tussen de secties 1 en 2 geeft

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (4.26)$$

Indien de plaatshoogtes dezelfde zijn volgt hieruit

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \quad (4.27)$$

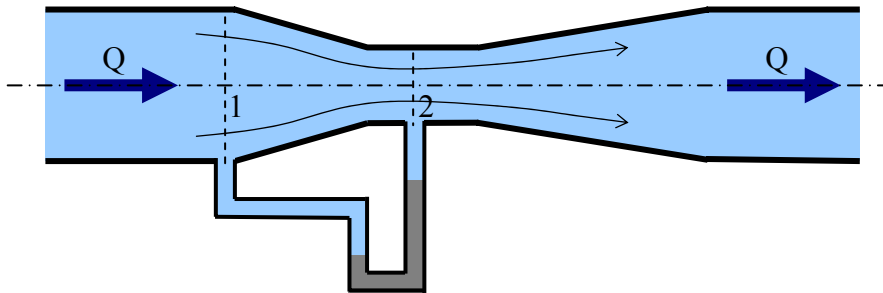


Fig. 4.7 Een venturimeter.

Met de formule van Castelli ( $Q = v_1 S_1 = v_2 S_2$ ) kan dit omgerekend worden tot

$$Q = S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - S_2^2/S_1^2)}} \quad (4.28)$$

Om het debiet te bepalen volstaat het dus om het drukverschil op te meten met bijvoorbeeld een differentieelmanometer zoals weergegeven in de figuur of in de praktijk meestal met druksensoren.

Een speciaal type venturimeter is de meetflens, waarbij de constructie gericht is op eenvoud ten koste van nauwkeurigheid (Fig. 4.8). Omdat de stroming niet vlot doorheen de opening kan gaan is er veel wrijving en verstoring van de stroming met wervels vooral achter de opening. Daarom wordt het debiet gegeven door

$$Q = CS_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(1 - S_2^2/S_1^2)}} \quad (4.29)$$

met C een correctiefactor tussen 0,6 en 0,8. In de praktijk wordt het toestel afgeijkt zodat Q kan afgeleid worden uit een meting van  $\Delta p$ .

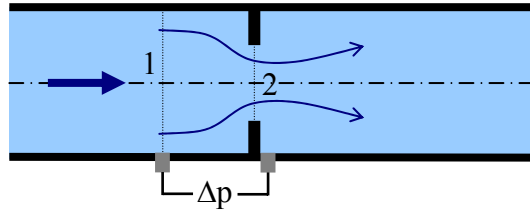


Fig. 4.8 Een meetflens.

Een tweede toepassing betreft een reservoir met een opening waardoor er een debiet kan uitstromen. De situatie wordt weergegeven in Fig. 4.9.

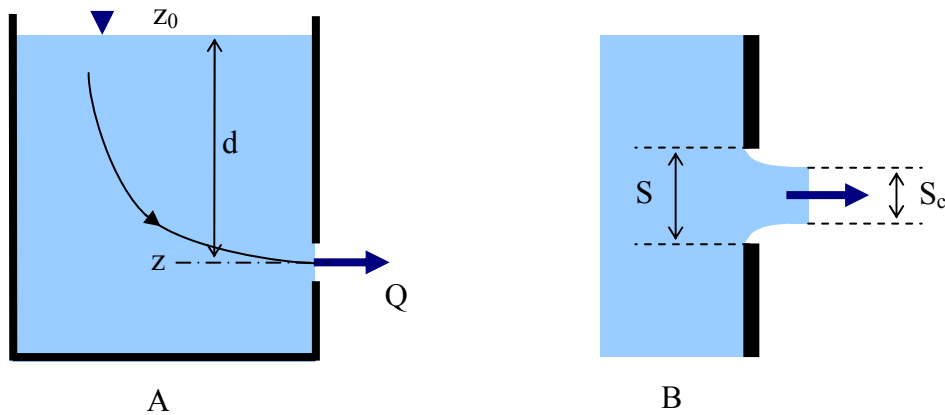


Fig. 4.9 Stroming door een opening: (a) globaal en (b) detail.

Beschouw een stroombaan tussen een punt ver verwijderd van de opening en een punt in de opening. Ver verwijderd van de opening is de stroomsnelheid verwaarloosbaar klein en is de vloeistof dus in hydrostatisch evenwicht, zodat  $e = h = z_0$ , met  $z_0$  het niveau van het vrij oppervlak. Aan de opening is de druk nul omdat de vloeistof in contact is met de atmosfeer. Rekening houdend met deze voorwaarden volgt uit de vergelijking van Bernoulli

$$e = z_0 = z + \frac{v^2}{2g} \quad (4.30)$$

zodat

$$v = \sqrt{2g(z_0 - z)} = \sqrt{2gd} \quad (4.31)$$

met  $d$  de diepte van de opening onder het vrij oppervlak van de vloeistof. Deze formule werd voor het eerst opgesteld door Torricelli. Om het debiet te bekomen volstaat het de grootte van de dwarse sectie in rekening te brengen. Echter het blijkt dat er een contractie optreedt van de stroming doorheen de opening (Fig. 4.9b), waardoor de grootte van de dwarse sectie  $S_c$  van de stroombuis kleiner is dan de grootte van de opening  $S$ . Dit wordt het vena contracta effect genoemd. Aldus volgt uit de formules van Torricelli en Castelli

$$Q = S_c \sqrt{2gd} = CS \sqrt{2gd} \quad (4.31)$$

met  $C$  een contractiecoëfficiënt, maar waarbij ook de invloed van de wrijving inbegrepen wordt, zodat het beter is te spreken over een debietcoëfficiënt. De waarde van deze coëfficiënt is begrepen tussen 0,5 en 1 en wordt experimenteel bepaald. Enkele waarden voor typische openingen worden gegeven in Fig. 4.10.

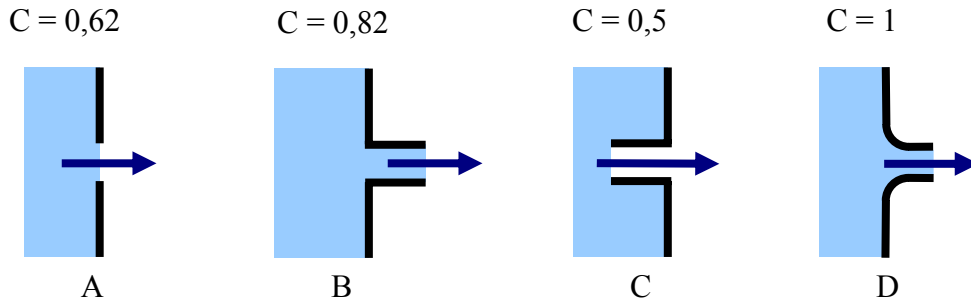


Fig. 4.10 Waarden van de debietcoëfficiënt: (a) dunne wand, (b) uitspringende uitlaat of dikke wand, (c) inspringende uitlaat, (d) afgeronde uitlaat of afgeronde dikke wand.

Een bijzonder situatie is een ondergedompeld opening waarbij de stroming terecht komt in een ander reservoir waarvan het niveau van het vrij oppervlak hoger gelegen is dan de opening (Fig. 4.11).

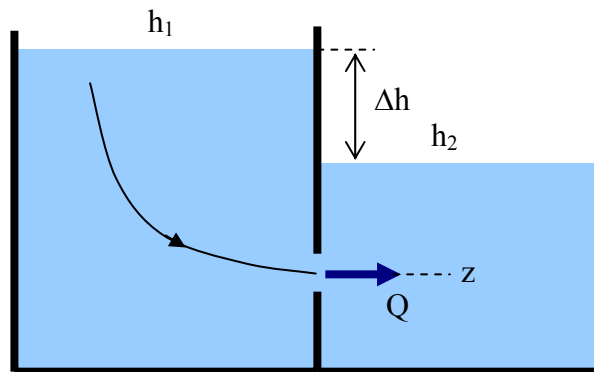


Fig. 4.11 Stroming doorheen een ondergedompelde opening.

In dit geval vertrekt de stroming van een reservoir met een piëzometrische hoogte  $h_1$  en komt terecht in een reservoir met een piëzometrische hoogte  $h_2$ . Toepassing van de wet van Bernoulli geeft dan

$$h_1 = h_2 + \frac{v^2}{2g} \quad (4.32)$$

zodat

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2g\Delta h} \quad (4.33)$$

met  $\Delta h$  het niveauverschil van het wateroppervlak in de reservoirs. Het debiet wordt bekomen zoals voor een gewone opening, met inbegrip van een debietcoëfficiënt

$$Q = CS\sqrt{2g\Delta h} \quad (4.34)$$

Een volgend geval is de stroming in een kanaalpan onder een schuifdeur, zoals weergegeven in Fig. 4.12. Ook in dit geval is er een contractie, waarbij het vloeistofniveau een constante hoogte bereikt na een zekere afstand voorbij de schuifdeur.

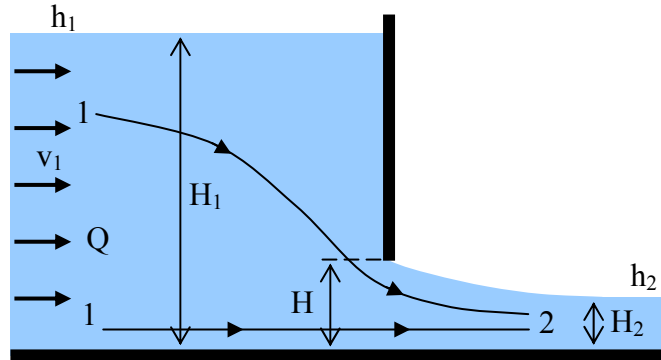


Fig. 4.12 Stroming onder een schuifdeur.

Toepassing van wet van Bernoulli tussen een punt 1 voor de opening en een punt 2 na de opening geeft

$$e = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (4.35)$$

waaruit volgt

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - h_2)} \quad (4.36)$$

Uit de vergelijking van Castelli volgt ook nog

$$Q = v_1 B H_1 = v_2 B H_2 \quad (4.37)$$

met  $B$  de breedte van het kanaal en  $H_1$  en  $H_2$  de waterdieptes respectievelijk voor en na de schuifdeur. Verdere uitwerking van deze vergelijkingen geeft

$$Q = H_2 B \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1 - (H_2/H_1)^2}} = H_1 H_2 B \sqrt{\frac{2g}{H_1 + H_2}} \quad (4.38)$$

Indien de waterhoogte achter de opening veel kleiner is dan voor de opening ( $H_2 \ll H_1$ ) kan deze formule vereenvoudigd worden tot

$$Q \approx H_2 B \sqrt{2gH_1} = CHB \sqrt{2gH_1} \quad (4.39)$$

met  $H$  de hoogte van de opening onder de hefdeur en  $C$  een debietcoëfficiënt, die experimenteel bepaald wordt als ongeveer 0,61 indien  $H/H_1 < 0,2$ . Met deze formule kan men

berekenen hoever men een schuifdeur moet opentrekken om een bepaald debiet door te laten of een bepaalde waterhoogte in het opwaarts kanaalpand in te stellen

$$H \approx \frac{Q}{CB\sqrt{2gH_1}} \quad (4.40)$$

Meestal is er in het afwaarts kanaalpand een waterhoogte die hoger is dan de opening onder de schuifdeur (Fig. 4.13). Het debiet wordt dan gegeven door

$$Q = CHB\sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1 - (CH/H_1)^2}} \quad (4.41)$$

Indien de opening van de schuifdeur veel kleiner is dan de waterdiepte in het opwaarts kanaal dan kan deze formule vereenvoudigd worden tot

$$Q \approx CBH\sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (4.42)$$

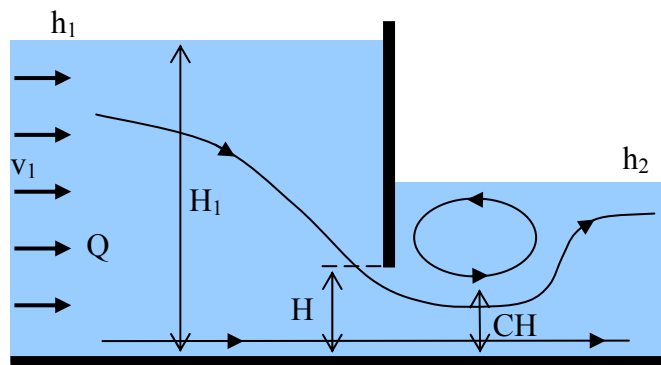


Fig. 4.13 Stroming onder een verdronken schuifdeur.

Het volgende probleem betreft een overstort (Fig. 4.14). Toepassing van de formule van Bernoulli tussen de punten 1 en 2 geeft

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (4.43)$$

waaruit volgt

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - z_2)} \quad (4.44)$$

De stroomsnelheid in de overstort is dus afhankelijk van de hoogte. Het debiet kan bekomen worden door integratie van de snelheid over de dwarse sectie

$$Q = CB \int_{h_1-H}^{h_1} v_2 dz = CB \int_{h_1-H}^{h_1} \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - z)} dz = \frac{2}{3} CB \sqrt{2g} \left[ \left(H + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2} \right] \quad (4.45)$$

met B de breedte van de overstort en C een debietcoëfficiënt. Meestal is de kinetische

energiehoogte in het opwaartse kanaal klein, zodat de formule vereenvoudigd kan worden tot

$$Q = \frac{2}{3} CB\sqrt{2gH^3} \quad (4.46)$$

Dit is de vergelijking van Poleni. De waarde van C bedraagt ongeveer 0,62 indien de overstort dezelfde breedte heeft als het kanaal en de overstorthoogte H beduidend kleiner is dan  $H_1$ .

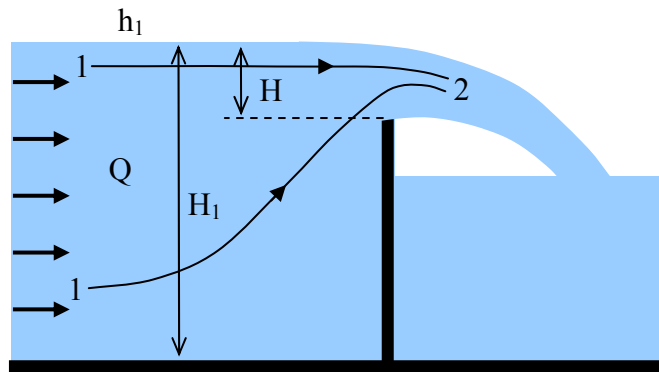


Fig. 4.14 Stroming over een overstort.

Voor een overstort met een breedte B kleiner dan de breedte van het kanaal (Fig. 4.15a) is er ook een horizontale contractie, waardoor C kleiner wordt en bij benadering gegeven wordt door

$$C \approx 0,62(1 - 0,2H/B) \quad (4.47)$$

Wanneer de breedte B van de overstort verandert met de hoogte, dan moet B mee geïntegreerd worden in vergelijking 4.45, zodat

$$Q = C \int_{h_1-H}^{h_1} B(z)\sqrt{2g(h_1 - z)}dz \quad (4.48)$$

Het resultaat wordt dan afhankelijk van de vorm van de overstort, waarbij ook de contractie een rol speelt. Bijvoorbeeld voor een driehoekige overstort (Fig. 4.15b) wordt het debiet gegeven door

$$Q = \frac{8}{15} C \cdot \text{tg}(\alpha/2)\sqrt{2gH^5} \quad (4.49)$$

met  $C \approx 0,58$ . Voor een trapezoidale overstort (Fig. 4.15c) waarvan de opstaande zijden een helling hebben van 4 op 1, geldt vergelijking 4.46 met  $C = 0,62$ . Dit is de zogenaamde overstort van Cipoletti, waarbij het verlies door zijdelinkse contractie en wrijving gecompenseerd wordt door een toename in de breedte.

Een zeer speciaal geval is de proportionele overstort, waarbij het debiet evenredig is met de hoogte (Fig. 4.15d). Dit kan alleen worden bekomen door de breedte te laten afnemen met de hoogte  $z'$  boven de basis van de overstort, indien  $B = a/\sqrt{z'}$  dan wordt het debiet gegeven door

$$Q = C \int_0^H a \sqrt{2g(H-z)'/z'} dz' = aC \sqrt{2gH} \int_0^1 \sqrt{(1-\mu)'/\mu} d\mu = \frac{\pi}{2} aC \sqrt{2gH} \quad (4.50)$$

Met een proportionele overstort kan men op eenvoudige wijze een debiet opmeten.

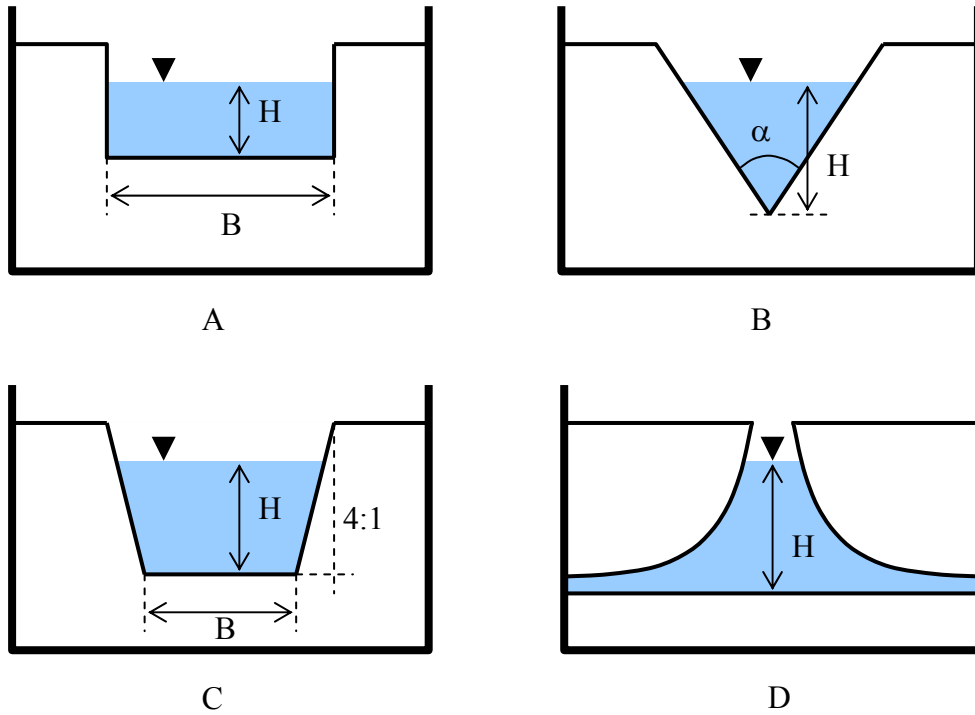


Fig. 4.15 Verschillende overstorten in vooraanzicht: (a) rechthoekig, (b) driehoekig, (c) trapezoidaal (Cipolletti), en (d) proportioneel.



*Een overstort om het debiet en waterpeil te regelen in een kanaal.*

#### 4.4 Berekening van krachten

Beschouw een bepaald volume  $V$  van een stroombuis in een perfecte vloeistofstroming, zoals weergegeven in Fig. 4.16.

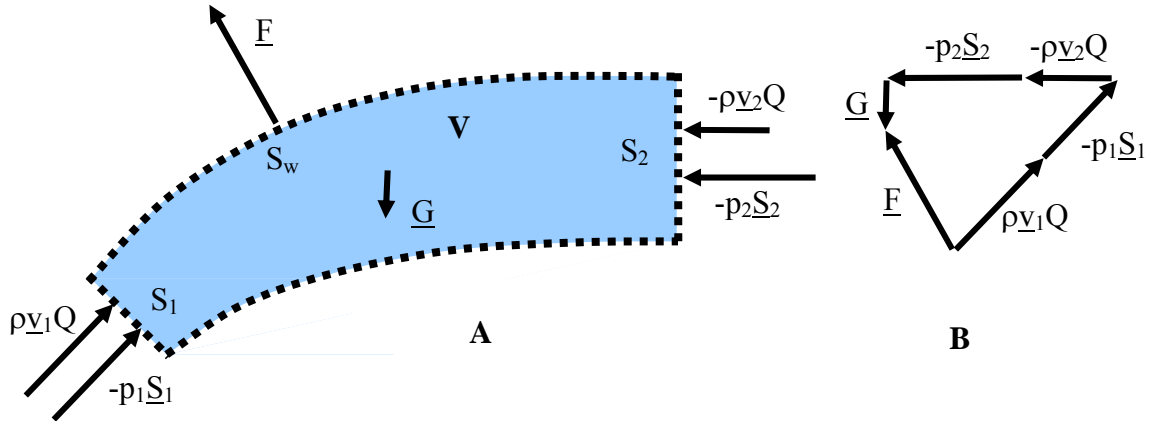


Fig. 4.16 Krachten in een stroombuis: (a) controle volume en krachten, en (b) krachterevenwicht

De impulsvergelijking in conservatieve vorm (Euler methode) werd opgesteld in hoofdstuk 2; voor een permanente stroming wordt deze vergelijking

$$\nabla \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}^T) = -\rho g \nabla z - \nabla p \quad (4.51)$$

Dit kan worden geïntegreerd over het volume van de stroombuis

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}^T) dV = \int_V \rho g (-\nabla z) dV - \int_V \nabla p dV \quad (4.52)$$

De eerste term in het rechterlid is duidelijk het totaal gewicht  $\underline{G}$  van de vloeistof die aanwezig is in de stroombuis, met  $G = \rho g V$ . Verdere uitwerking van de andere termen, waarbij gebruik wordt gemaakt van het theorema van Gauss, geeft

$$\oint_S (\rho \underline{v} \underline{v}^T) \cdot d\underline{S} = \underline{G} - \oint_S p d\underline{S} \quad (4.53)$$

ofwel

$$\oint_S \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{S}) = \underline{G} - \oint_S p d\underline{S} \quad (4.54)$$

We splitsen de integralen uit over de verschillende secties van de stroombuis, zijnde de instroomsectie  $S_1$ , de uitroomsectie  $S_2$  en de wand  $S_w$ ; merk op dat er geen uitstroming is doorheen de wand van de stroombuis, zodat

$$\int_{S_1} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{S}) + \int_{S_2} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{S}) = \underline{G} - \int_{S_1} p d\underline{S} - \int_{S_2} p d\underline{S} - \int_{S_w} p d\underline{S} \quad (4.55)$$

Gebruik makend van gemiddelde waarden voor de variabelen over de verschillende secties en de definitie van het debiet wordt dit



$$-\rho v_1 Q + \rho v_2 Q = \underline{G} - p_1 \underline{S}_1 - p_2 \underline{S}_2 - \underline{F} \quad (4.56)$$

met  $v_1$ ,  $p_1$ ,  $v_2$  en  $p_2$  gemiddelde waarden over de inlaat- of uitlaatsecties en  $\underline{F}$  de resultante van de vloeistofdrukken op de wand van de stroombuis. De fysische betekenis van deze impulsvergelijking is dat er een krachtenevenwicht bestaat in een stroombuis, namelijk de in- en uitstromende impulsen geven traagheidskrachten die in evenwicht zijn met het gewicht van de vloeistof en de drukkrachten uitgeoefend door de vloeistof op de wand en op de in- en uitlaatsecties. Dit is de formule van Euler, welke toelaat om de resultante van de drukken op de wand van een stroombuis te berekenen in geval van een perfecte vloeistofstroming.

$$\underline{F} = \rho v_1 Q + (-\rho v_2 Q) + \underline{G} + (-p_1 \underline{S}_1) + (-p_2 \underline{S}_2) \quad (4.57)$$

De resultante van de vloeistofdruk op de wand van de stroombuis wordt gegeven door de traagheidskrachten aan de in- en uitlaatsecties, het gewicht van de vloeistof in de stroombuis en de drukken uitgeoefend op de in- en uitlaatsecties, zoals weergegeven in Fig. 4.16. Bij de toepassing moet men goed opletten voor de richting waarin deze verschillende krachten werkzaam zijn.

#### 4.5 Toepassingen van de formule van Euler

Ter illustratie van de mogelijkheden geboden door de formule van Euler worden enkele voorbeelden van praktische toepassingen gegeven. Het eerste betreft de kracht uitgeoefend door een vloeistofstraal op een wand (Fig. 4.17).

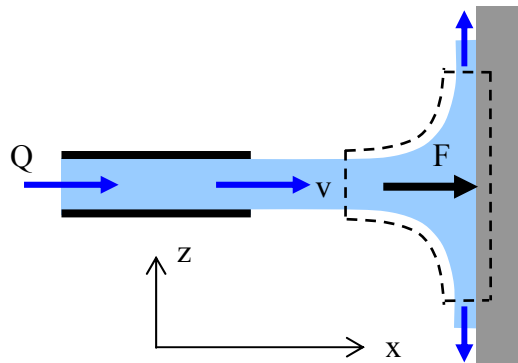


Fig. 4.17 Kracht uitgeoefend door een vloeistofstraal op een wand.

De stroombuis waarop de formule van Euler toegepast wordt is weergegeven door de stippenlijn in Fig. 4.17. De componenten van de krachten in de x-richting zijn:

- 1) instromende impuls:  $\rho v Q$
- 2) uitstromende impuls: 0
- 3) gewicht: 0
- 4) drukkracht op de inlaatsectie: 0 (immers de druk is nul omdat de vloeistof in contact is met de atmosfeer)
- 5) drukkracht op de uitlaatsectie(s): 0 (zelfde reden)

6) drukkracht op de wand:  $F$

Krachtenevenwicht in de x-richting geeft

$$F = \rho v Q \quad (4.58)$$

Het tweede voorbeeld betreft de kracht uitgeoefend op de kop van een sproeier (Fig. 4.18).

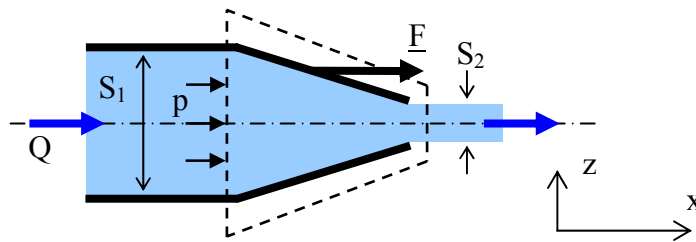


Fig. 4.18 Krachten uitgeoefend op de kop van een sproeier.

De beschouwde stroombuis wordt weergegeven door de stippenlijn. De componenten van de krachten in de x-richting zijn:

- 1) instromende impuls:  $\rho v_1 Q = \rho Q^2 / S_1$
- 2) uitstromende impuls:  $-\rho v_2 Q = -\rho Q^2 / S_2$
- 3) gewicht: 0
- 4) drukkracht op de inlaatsectie:  $p S_1$
- 5) drukkracht op de uitlaatsectie: 0 (de vloeistof is in contact met de atmosfeer)
- 6) drukkracht op de wand:  $F_x$

Uit het krachtenevenwicht in de x-richting volgt

$$F_x = \rho Q^2 \left( \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + p S_1 \quad (4.59)$$

Er zijn geen krachten in de y-richting. De componenten van de krachten in de z-richting zijn:

- 1) instromende impuls: 0
- 2) uitstromende impuls: 0
- 3) gewicht:  $-\rho g V$  ( $z$  is positief naar boven)
- 4) drukkracht op de inlaatsectie: 0
- 5) drukkracht op de uitlaatsectie: 0
- 6) drukkracht op de wand:  $F_z$

Uit het krachtenevenwicht in de z-richting volgt

$$F_z = -\rho g V \quad (4.60)$$

Een derde voorbeeld betreft de kracht uitgeoefend door een vloeistof op de wand van een gebogen buis (Fig. 4.19). De diameter van de buis is constant, zodat uit de continuïteitsvergelijking volgt dat de gemiddelde snelheid in de buis overal hetzelfde is. Bovendien volgt uit de wet van Bernoulli dat de druk dan ook constant moet zijn. De

componenten van de krachten in de x-richting zijn dan:

- 1) instromende impuls:  $\rho vQ = \rho Q^2/S$
- 2) uitstromende impuls:  $-(\cos\alpha)\rho Q^2/S$
- 3) gewicht: 0
- 4) drukkracht op de inlaatsectie:  $pS$
- 5) drukkracht op de uitlaatsectie:  $-(\cos\alpha)pS$
- 6) drukkracht op de wand:  $F_x$

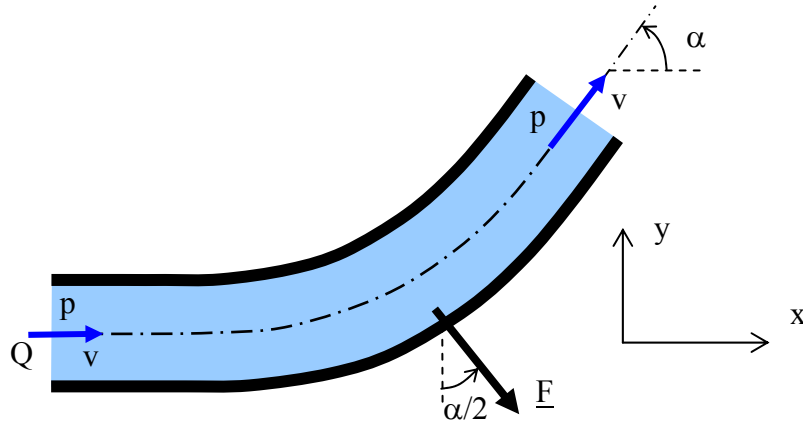


Fig. 4.19 Kracht uitgeoefend door een stromende vloeistof op de wand van een gebogen buis.

Uit het krachtenevenwicht in de x-richting volgt

$$F_x = \frac{\rho Q^2}{S}(1 - \cos\alpha) + pS(1 - \cos\alpha) = (1 - \cos\alpha)(\rho Q^2/S + pS) \quad (4.61)$$

De componenten van de krachten in de y-richting zijn:

- 1) instromende impuls: 0
- 2) uitstromende impuls:  $-(\sin\alpha)\rho Q^2/S$
- 3) gewicht: 0
- 4) drukkracht op de inlaatsectie: 0
- 5) drukkracht op de uitlaatsectie:  $-(\sin\alpha)pS$
- 6) drukkracht op de wand:  $F_y$

Het krachtenevenwicht in de y-richting geeft

$$F_y = -\frac{\rho Q^2}{S}\sin\alpha - pS\sin\alpha = -(\rho Q^2/S + pS)\sin\alpha \quad (4.62)$$

en in de z-richting wordt dit

$$F_z = -\rho gV \quad (4.63)$$

De totale drukkracht op de wand van de buis maakt in het horizontale vlak een hoek, die als volgt berekend kan worden

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{1 - \cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (4.64)$$

Tenslotte berekenen we de kracht op een geheven schuifdeur in een kanaalpan (Fig. 4.20). Het evenwicht in de stromingsrichting geeft

$$F = \rho v_1 Q - \rho v_2 Q + \rho g B \frac{H_1^2}{2} - \rho g B \frac{H_2^2}{2} \quad (4.65)$$

met B de breedte van het kanaal; verder uitwerking geeft

$$F = \frac{\rho Q^2}{B} \left( \frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} \right) + \frac{\rho g B}{2} (H_1^2 - H_2^2) \quad (4.66)$$

Dit illustreert perfect de kracht van de vergelijking van Euler. Immers het zou veel moeilijker zijn, zelfs quasi onmogelijk, om de kracht op de schuifdeur te bepalen door de drukverdeling op de deur te berekenen aan de hand van het oplossen van de stromingsvergelijkingen. Daarentegen met de vergelijking van Euler krijgen we een exact resultaat op een vrij eenvoudige wijze.

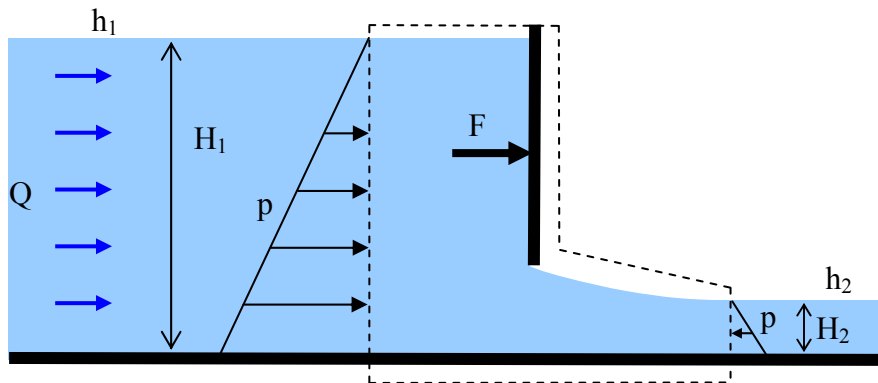


Fig. 4.20 Kracht op een geheven schuifdeur in een kanaalpan.

## 5 VISKEUZE STROMING

---

### 5.1 Stromingsvergelijkingen

In dit hoofdstuk onderzoeken we de stroming van Newtoniaanse viskeuze vloeistoffen, waarvoor de stromingsvergelijkingen werden opgesteld in hoofdstuk 2; dit zijn de Navier-Stokes vergelijkingen

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (5.1a)$$

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\rho g \nabla z - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} \quad (5.1b)$$

waarbij in dit geval de gravitatie beschouwd wordt als enige uitwendige kracht. Er zijn vier vergelijkingen en vier onbekenden,  $p$  en  $\underline{v}$ , hetgeen theoretisch oplosbaar is, doch gezien de complexiteit van de vergelijkingen zijn er alleen maar oplossingen mogelijk voor zeer eenvoudige situaties. Ook blijkt dat er in de praktijk meestal turbulentie optreedt, hetgeen de zaak ten zeerste bemoeilijkt, zodat toepassingen in de praktijk niet voor de hand liggen. De turbulente stroming zal onderzocht in het volgende hoofdstuk.

Het wordt iets eenvoudiger wanneer we een permanente stroming beschouwen; de stromingsvergelijkingen zijn dan

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (5.2a)$$

$$\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \rho g \nabla z + \nabla p = \mu \nabla^2 \underline{v} \quad (5.2b)$$

De continuïteitsvergelijking is dezelfde als bij de perfecte vloeistoffen, zodat de resultaten uit vorig hoofdstuk geldig blijven; in het bijzonder is in een stroombuis het debiet constant bij permanente stroming en is wet van Castelli eveneens geldig.

### 5.2 Stroming in een rechte buis

Beschouw de stroming van een viskeuze vloeistof in een rechte buis met constante diameter (Fig. 5.1). Wegens de vorm van de buis is het aangewezen in cilindrische coördinaten te werken:  $r$ ,  $\theta$  en  $l$ , zoals weergegeven in de figuur. Uit de continuïteitsvergelijking volgt dat het debiet  $Q$  constant is en bovendien dat er alleen maar stroming mogelijk is in de longitudinale richting, zodat

$$\underline{v} = (0, 0, v)^T \quad (5.3)$$

en

$$\langle v \rangle = Q / \pi R^2 \quad (5.4)$$

met  $R$  de inwendige straal van de buis. Uit de continuïteitsvergelijking volgt ook dat

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial v}{\partial l} = 0 \quad (5.4)$$

hetgeen impliceert dat  $v$  alleen maar afhankelijk is van  $r$  en  $\theta$ . Echter wegens de radiale

symmetrie van de stroming kan  $v$  niet afhankelijk zijn van  $\theta$ , zodat  $v$  alleen maar een functie kan zijn van  $r$ . Hieruit volgt dat alle stroombanen rechtlijnig zijn en er dus geen convectieve versnelling is ( $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = 0$ ) zodat de impulsvergelijking vereenvoudigd wordt tot

$$\rho g \nabla z + \nabla p = \rho g \nabla h = \mu \nabla^2 \underline{v} \quad (5.5)$$

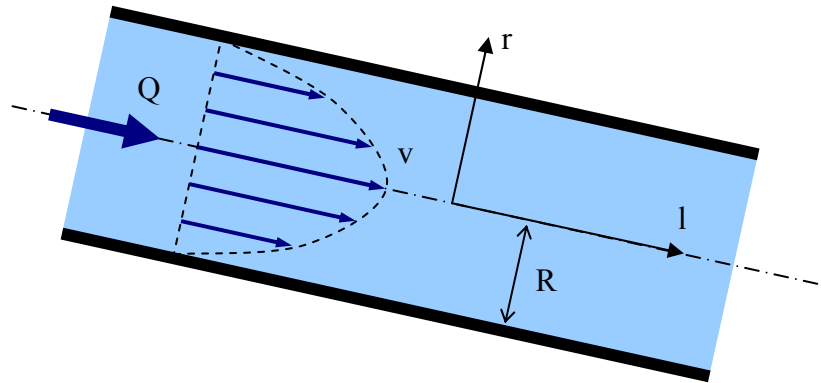


Fig. 5.1 Viskeuze stroming in een buis.

We schrijven deze vectoriële vergelijking volledig uit, waarbij we gebruik maken van de regels voor de nabla operator in cilindrische coördinaten

$$\rho g \frac{\partial h}{\partial r} = 0 \quad (5.6a)$$

$$\rho g \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \quad (5.6b)$$

$$\rho g \frac{\partial h}{\partial l} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (5.6c)$$

Uit de eerste twee vergelijkingen volgt dat piëzometrische hoogte  $h$  alleen maar een functie kan zijn van  $l$ . Dit betekent dat op een bepaalde plaats in de buis  $h$  constant is in een dwarsdoorsnede, d.w.z. dat er in een dwarsdoorsnede hydrostatisch evenwicht heerst:  $h = z + p/\rho g = c^{te}$ . We noemen een dergelijke doorsnede een hydrostatisch oppervlak.

Beschouw nu de  $l$ -component van de impulsvergelijking 5.6c. Vermits  $h$  alleen maar varieert met  $l$ , is de term in het linkerlid een functie van  $l$ . Echter, daar  $v$  alleen maar varieert met  $r$ , is het rechterlid van de vergelijking een functie van  $r$ . De enige mogelijkheid is dan dat beide termen constant zijn. Stel deze constante gelijk aan  $-\rho g J$ , voor redenen die verder duidelijk zullen worden. Hieruit volgt

$$\rho g \frac{dh}{dl} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -\rho g J \quad (5.7)$$

Los eerst op naar  $v$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{r}{\nu} gJ \quad (5.8)$$

Integratie geeft

$$r \frac{dv}{dr} = -\frac{gr^2}{2\nu} J + c^{te} \quad (5.9)$$

Wegens de symmetrie moet op de as van de buis ( $r = 0$ ) de afgeleide van  $v$  naar  $r$  gelijk zijn aan nul, waaruit volgt dat de constante gelijk moet zijn aan nul, zodat

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{gr}{2\nu} J \quad (5.10)$$

Nogmaals integreren geeft

$$v = -\frac{gr^2}{4\nu} J + c^{te} \quad (5.11)$$

Aan de wand van de buis ( $r = R$ ) moet de snelheid nul zijn, hetgeen toelaat de integratieconstante te bepalen, waaruit volgt

$$v = \frac{g(R^2 - r^2)}{4\nu} J \quad (5.12)$$

Uit deze vergelijking blijkt dat een maximale snelheid,  $v_{\max}$ , voorkomt in het midden van de buis

$$v_{\max} = \frac{gR^2}{4\nu} J \quad (5.13)$$

en dat de snelheidsverdeling in een dwarsdoorsnede een parabolisch verloop heeft, zoals weergegeven in Fig. 5.1

$$v = v_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (5.14)$$

Het debiet kan bekomen worden door de snelheid te integreren over een dwarsdoorsnede

$$Q = \int_0^R 2\pi r v dr = 2\pi \int_0^R \frac{g(R^2 - r^2)r}{4\nu} J dr = \frac{\pi g R^4}{8\nu} J \quad (5.15)$$

waaruit ook de gemiddelde snelheid volgt

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{gR^2}{8\nu} J \quad (5.16)$$

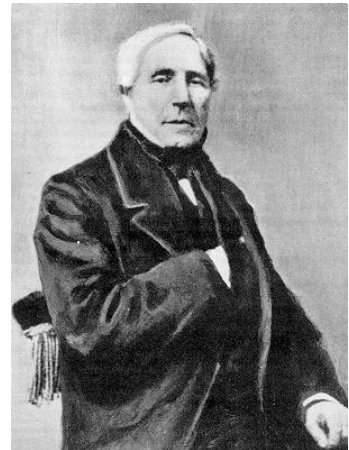
In combinatie met vergelijking 5.7, kan vergelijking 5.15 ook geschreven worden als

$$Q = -\frac{\pi g R^4}{8\nu} \frac{dh}{dl} \quad (5.17)$$

Dit is de wet van Poiseuille, welke een volledig inzicht geeft in de stroming van een viskeuze

vloeistof in een buis; de volgende vaststellingen volgen uit deze wet:

- stroming van een viskeuze vloeistof in een buis wordt veroorzaakt door een verschil in piëzometrie, d.w.z. een verschil in hoogte en/of een verschil in druk, tussen de ingang en de uitgang van de buis;
- de stroming is gericht volgens dalende piëzometrische hoogte;
- het debiet is evenredig met de gradiënt van de piëzometrische hoogte;
- het debiet is omgekeerd evenredig met de viscositeit van de vloeistof;
- het debiet is evenredig met de vierde macht van de straal (of de doormeter) van de buis.



Jean-Louis Poiseuille

De wet van Poiseuille kan gebruikt worden om de viscositeit van vloeistoffen te bepalen. Men laat een vloeistof stromen doorheen een buis met lengte  $L$  en inwendige straal  $R$  en men meet het debiet en het verschil in piëzometrische hoogte aan de in- en uitgang van de buis, zodat de kinematische viscositeit berekend kan worden met de wet van Poiseuille

$$v = \frac{\pi g R^4}{8Q} \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (5.18)$$

Poiseuille voerde in 1838 dergelijke experimenten uit waardoor hij de viscositeitswet van Newton bewezen werd. Later bleek dat de wet van Poiseuille alleen maar geldig is voor laminaire stroming en niet voor turbulente stroming.

### 5.3 Ladingsverlies en wrijving in een buis

We richten nu onze aandacht op het effect van de wrijving en de dwarskrachten, die volgens de wet van Newton gepaard gaan met snelheidsgradiënten. Uit vergelijking 5.7 volgt

$$J = -\frac{dh}{dl} = -\frac{d(z + p/\rho g)}{dl} \quad (5.19)$$

Vermits de snelheden onafhankelijk zijn van  $l$ , kan dit ook geschreven worden als

$$J = -\frac{dh}{dl} = -\frac{d(z + p/\rho g + v^2/2g)}{dl} = -\frac{de}{dl} \quad (5.20)$$

Deze vergelijking toont aan dat de energie of lading van de vloeistof daalt in de stromingsrichting.  $J$  is dus eigenlijk het energie- of ladingsverlies per afgelegde weg (merk op dat  $J$  dimensieloos is). Beschouw nu het verschil in gemiddelde lading tussen twee secties in de buis op een afstand  $L$  van elkaar gelegen, dan volgt

$$\langle z_1 \rangle + \frac{\langle p_1 \rangle}{\rho g} + \frac{\alpha \langle v_1 \rangle^2}{2g} = \langle z_2 \rangle + \frac{\langle p_2 \rangle}{\rho g} + \frac{\alpha \langle v_2 \rangle^2}{2g} + JL \quad (5.21)$$



Tussen de secties 1 en 2 is dus een verlies opgetreden in de lading van  $JL$ . Dit betekent dat de energielijn van de buis niet meer horizontaal is, zoals bij stroming van perfecte vloeistoffen. De piëzometrische lijn en energielijn worden dan zoals weergegeven in Fig. 5.2.

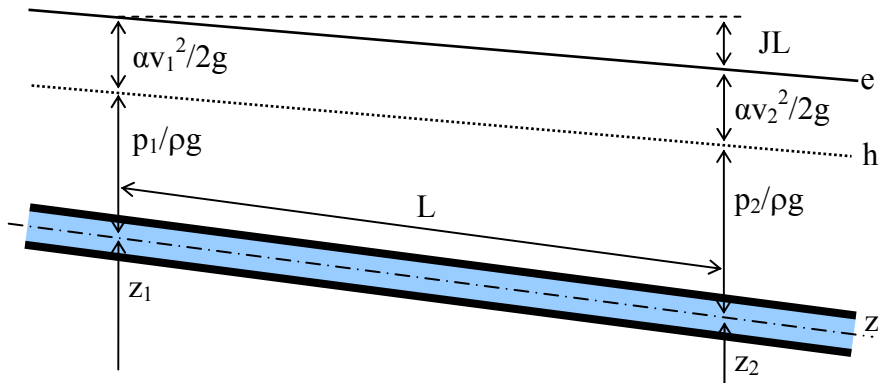


Fig. 5.1 Energie en piëzometrische lijnen bij stroming doorheen een buis.

Gebruik makend van vergelijking 5.16 kan het ladingsverlies uitgedrukt worden in functie van de gemiddelde snelheid van de stroming

$$J = \frac{8v}{gR^2} \langle v \rangle \quad (5.22)$$

Hieruit volgt dat het ladingsverlies evenredig is met de gemiddelde snelheid en de viscositeit van de vloeistof.

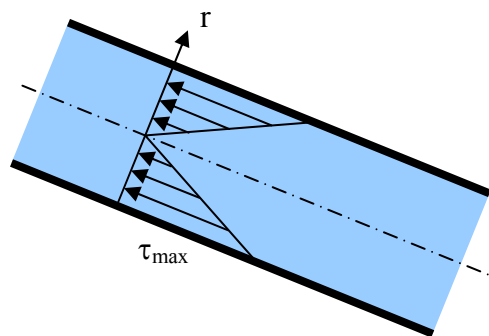


Fig. 5.3 Variatie van de schuifspanning in een buis.

Uit de wet van Newton volgt dat

$$\tau_{lr} = \mu \frac{dv}{dr} = -\frac{\rho g r}{2} J \quad (5.23)$$

De variatie van de schuifspanning in de buis wordt voorgesteld in Fig. 5.3. De totale wrijvingskracht  $F$  uitgeoefend door de vloeistof op de wand van de buis wordt dan bekomen

als

$$F = 2\pi RL(-\tau_{\max}) = \pi R^2 L \rho g J \quad (5.24)$$

hetgeen ook als volgt uitgedrukt kan worden

$$FL = V\rho g\Delta e = V\Delta E \quad (5.25)$$

met  $V$  het volume van de vloeistof in de buis. Vermits  $E$  de energie is per volume vloeistof, is  $V\Delta E$  het totaal energieverlies, waaruit blijkt dat de arbeid verricht door de wrijvingskracht gelijk is aan het totaal energieverlies van de vloeistof.

Een krachtenbalans wordt voorgesteld in Fig. 5.4. Merk op dat hierin de instromende en uitstromende impuls niet voorkomen omdat ze elkaar opheffen in een rechte buis.

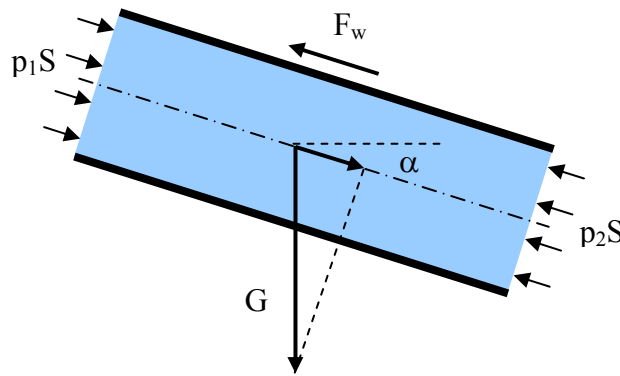


Fig. 5.4 Krachten op een vloeistof in een buis.

De krachten kunnen ontbonden worden in componenten volgens de langsrichting en de dwarsrichting van de buis. Evenwicht van de krachten die inwerken op de vloeistof in de stromingsrichting geeft

$$p_1 S + G \sin \alpha = F_w + p_2 S \quad (5.26)$$

waarbij  $F_w = -F$  de wrijvingskracht is uitgeoefend door de wand van de buis op de vloeistof. Hieruit volgt

$$F_w = (p_1 - p_2)S + G \sin \alpha \quad (5.27)$$

Dus de wrijvingskracht uitgeoefend door de wand van de buis compenseert het verschil in drukkrachten aan de in- en uitlaatsecties en de component van de zwaartekracht in de langsrichting van de buis.

#### 5.4 Stroming over een recht oppervlak

We beschouwen nu de stroming over een oppervlak met een helling  $\alpha$  (Fig. 5.5). Het is aangewezen om in lokale coördinaten te werken:  $l$  en  $y$ , in de langs- en de dwarsrichting van het oppervlak, zoals weergegeven in de figuur (er is geen derde dimensie nodig).

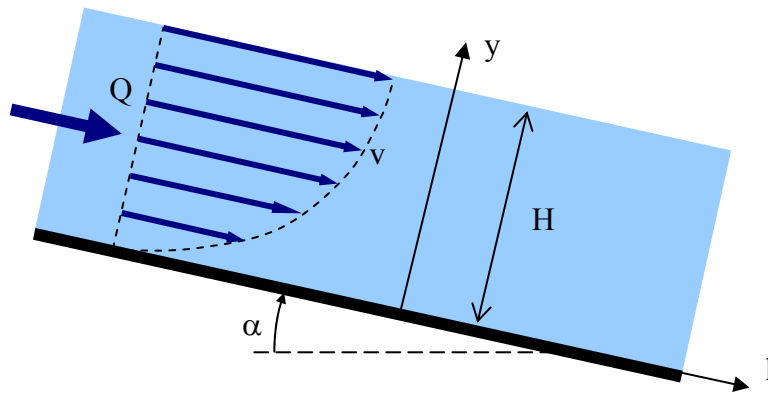


Fig. 5.5 Viskuze stroming over een recht oppervlak.

Uit de continuïteitsvergelijking volgt dat het debiet  $Q$  constant is en dat er alleen maar stroming mogelijk is in de longitudinale richting  $l$ , zodat

$$\underline{v} = (v, 0)^T \quad (5.28)$$

en

$$\langle v \rangle = Q/HB \quad (5.29)$$

met  $H$  de hoogte van de vloeistof en  $B$  de breedte van het oppervlak. Uit de continuïteitsvergelijking volgt ook dat

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial v}{\partial l} = 0 \quad (5.30)$$

hetgeen impliceert dat  $v$  alleen maar een functie kan zijn van  $y$ . Hieruit volgt dat alle stroombanen rechtlijnig zijn en er dus geen convectieve versnelling is ( $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = 0$ ) zodat de impulsvergelijking vereenvoudigd wordt tot

$$\rho g \nabla z + \nabla p = \rho g \nabla h = \mu \nabla^2 \underline{v} \quad (5.31)$$

Hieruit volgt

$$\rho g \frac{\partial h}{\partial l} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (5.32a)$$

en

$$\rho g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (5.32b)$$

Uit de tweede vergelijkingen volgt dat piëzometrische hoogte  $h$  alleen maar een functie kan zijn van  $l$ . Dit betekent dat op een bepaalde plaats  $l$ ,  $h$  constant is in een vlak loodrecht op de stromingsrichting. Dit is opnieuw een hydrostatisch oppervlak.

Beschouw nu de  $l$ -component van de impulsvergelijking. Vermits  $h$  alleen maar varieert met  $l$ , is de term in het linkerlid een functie van  $l$ . Echter, daar  $v$  alleen maar varieert met  $y$ , is het rechterlid van de vergelijking een functie van  $y$ . De enige mogelijkheid is dan dat beide leden

constant zijn. We stellen deze constante gelijk aan  $-\rho g J$ , waaruit volgt

$$\mu \frac{d^2 v}{dy^2} = \rho g \frac{dh}{dl} = -\rho g J \quad (5.36)$$

Oplossen naar  $v$  geeft

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{g y}{\nu} J + c^{te} \quad (5.37)$$

Aan het vrij oppervlak ( $y = H$ ) is er geen wrijving of overdracht van schuifspanningen, zodat de snelheidsgradiënt daar nul is ( $dv/dy = 0$ ), waaruit volgt

$$\frac{dv}{dy} = \frac{g(H-y)}{\nu} J \quad (5.38)$$

Nogmaals integreren geeft

$$v = \frac{g(Hy - y^2/2)}{\nu} J + c^{te} \quad (5.39)$$

Aan het oppervlak ( $y = 0$ ) moet de snelheid nul zijn, hetgeen toelaat de constante te bepalen

$$v = \frac{g(H-y/2)y}{\nu} J \quad (5.40)$$

Uit deze vergelijking blijkt dat de maximale snelheid  $v_{\max}$  voorkomt aan het vrij oppervlak

$$v_{\max} = \frac{gH^2}{2\nu} J \quad (5.41)$$

en dat de snelheidsverdeling in een dwarsdoorsnede een parabolisch verloop heeft, zoals weergegeven in Fig. 5.5. Het debiet kan bekomen worden door de snelheid te integreren over de vloeistoflaag

$$Q = B \int_0^H v dy = B \int_0^R \frac{g(H-y/2)y}{\nu} J dy = \frac{gBH^3}{3\nu} J \quad (5.42)$$

waaruit ook de gemiddelde snelheid volgt

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{HB} = \frac{gH^2}{3\nu} J \quad (5.43)$$

In combinatie met vergelijking 5.36 kan het debiet ook geschreven worden als

$$Q = -\frac{gBH^3}{3\nu} \frac{dh}{dl} \quad (5.44)$$

Dit is de Hele-Shaw vergelijking, waaruit volgt:

- stroming van een viskeuze vloeistof over een recht oppervlak wordt veroorzaakt door een gradiënt in de piëzometrische hoogte (zie ook verder voor een interpretatie van deze

- gradiënt);
- het debiet is evenredig met de gradiënt van de piëzometrische hoogte;
  - het debiet is omgekeerd evenredig met de viscositeit van de vloeistof;
  - het debiet is evenredig met de derde macht van de hoogte van de vloeistoflaag.

### 5.5 Ladingsverlies bij een viskeuze stroming over een oppervlak

We richten nu onze aandacht op het effect van de wrijving en de dwarskrachten, die volgens de wet van Newton gepaard gaan met snelheidsgradiënten. Uit vergelijking 5.36 volgt

$$J = -\frac{dh}{dl} = -\frac{d(z + p/\rho g)}{dl} = -\frac{d(z + p/\rho g + v^2/2g)}{dl} = -\frac{de}{dl} \quad (5.45)$$

In het bijzonder is aan het vrij oppervlak ( $z = z_0$ ) de druk nul, zodat

$$J = -\frac{dz_0}{dl} = \sin \alpha \quad (5.46)$$

Veronderstellen we dat  $\alpha$  klein is dan hebben we ook

$$J \approx \text{tg} \alpha = i \quad (5.47)$$

met  $i$  de helling van het oppervlak (Fig. 5.6). Het ladingsverlies per lengte is dus niets anders dan de helling van het basisvlak of van het vrij oppervlak van de vloeistof. Dit is begrijpelijk, vermits de kinetische energiehoogte en drukhoogte niet veranderden (immers de snelheid blijft hetzelfde en ook de laagdikte) is het enige verschil dat de vloeistof gedaald is; dus het verlies in gravitaire energie komt exact overeen met het energieverlies door wrijving.

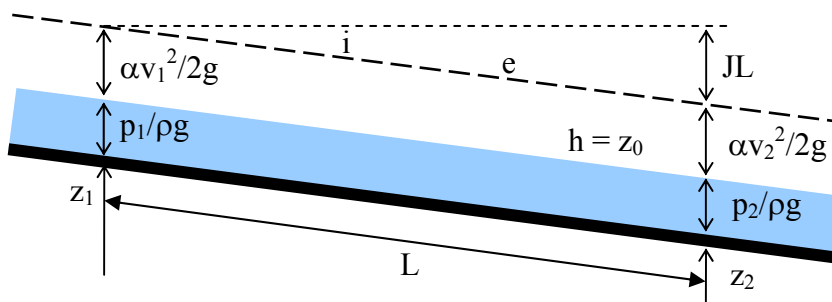


Fig. 5.6 Energie en piëzometrische lijnen bij stroming over een oppervlak.

Vermits de snelheden onafhankelijk zijn van  $l$ , kan het ladingsverlies ook geschreven worden als

$$J = -\frac{dh}{dl} = -\frac{d(\langle z \rangle + \langle p \rangle / \rho g + \alpha \langle v \rangle^2 / 2g)}{dl} = -\frac{de}{dl} \quad (5.48)$$

De piëzometrische lijn en energielijn worden gegeven in Fig. 5.6.

Gebruik makend van vergelijking 5.43 kan het ladingsverlies uitgedrukt worden in functie van de gemiddelde snelheid van de stroming

$$J = \frac{3v}{gH^2} \langle v \rangle \quad (5.49)$$

Hieruit volgt dat het ladingsverlies evenredig is met de gemiddelde snelheid en de viscositeit van de vloeistof. Dit is hetzelfde als in geval van stroming doorheen een buis. In de vloeistof laag wordt er een dwarskracht overgedragen, die berekend kan worden als

$$\tau_{l(-y)} = -\tau_{ly} = -\mu \frac{dv}{dy} = -\rho g(H-y)J \quad (5.50)$$

De schuifspanning varieert lineair over de vloeistoflaag; ze is nul aan het vrij oppervlak (er is immers geen wrijving daar) en maximaal aan het bodemvlak

$$\tau_{\max} = -\rho gHJ \quad (5.51)$$

De variatie van de schuifspanning in de buis wordt voorgesteld in Fig. 5.7. De totale wrijvingskracht,  $F$ , uitgeoefend door de vloeistof op de bodem wordt gegeven door

$$F = BL(-\tau_{\max}) = HBL\rho gJ \quad (5.52)$$

Waaruit volgt

$$FL = V\rho gJL = V\Delta E \quad (5.53)$$

met  $V$  het volume van de vloeistof in de buis. Vermits  $E$  de energie is per volume vloeistof, geeft  $V\Delta E$  het totaal energieverlies, waaruit blijkt dat de arbeid verricht door de wrijvingskracht gelijk is aan het totaal energieverlies van de vloeistof.

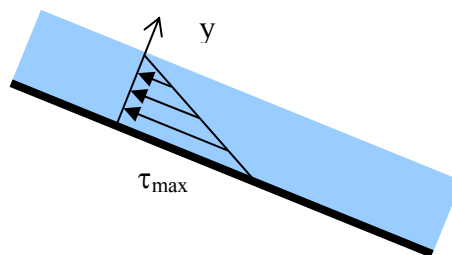


Fig. 5.7 Variatie van de schuifspanning.

Een krachtenbalans wordt voorgesteld in Fig. 5.8. Merk op dat de instromende en uitstromende impulsen niet beschouwd hoeven te worden omdat ze elkaar opheffen. De krachten kunnen ontbonden worden in componenten volgens de langsrichting en de dwarsrichting. Evenwicht van de krachten die inwerken op de vloeistof in de stromingsrichting geeft

$$p_1HB + G \sin \alpha = F_w + p_2HB \quad (5.54)$$

waarbij  $F_w = -F$  de wrijvingskracht is uitgeoefend door de bodem op de vloeistof. Hieruit volgt

$$F_w = G \sin \alpha \quad (5.55)$$

Dus de wrijvingskracht uitgeoefend door de wand van de buis compenseert de component van de zwaartekracht in de langsrichting van de stroming.

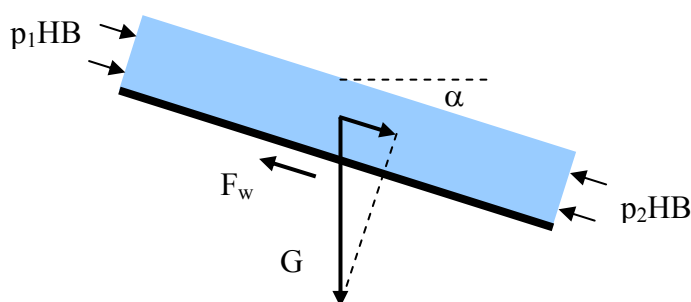


Fig. 5.8 Krachten in een vloeistofstroming over een oppervlak.

## 5.6 Het experiment van Reynolds

De vergelijkingen voor stroming van viskeuze vloeistoffen werden voornamelijk ontwikkeld in de 18<sup>e</sup> en 19<sup>e</sup> eeuw. Maar in de praktijk bleek dat deze meestal niet overeenkwamen met experimentele vaststellingen. Voor stromingen met grote snelheden treedt er meestal een groter energieverlies op dan wat berekend wordt met de wet van Poiseuille. Tegen het einde van de 19<sup>e</sup> eeuw werden door Reynolds een reeks van experimenten uitgevoerd om dit op een systematische wijze te onderzoeken. De basisopstelling van het experiment van Reynolds wordt gegeven in Fig. 5.9. Het betreft stroming van een vloeistof doorheen een glazen buis, waarbij de stroombanen waarneembaar worden gemaakt door een kleurstof te injecteren.

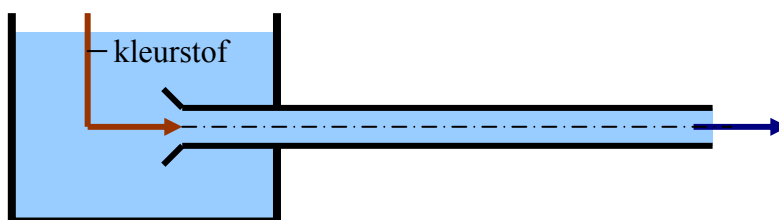


Fig. 5.9. Het experiment van Reynolds.

Reynolds stelde vast dat de stroomlijnen rechtlijnig zijn wanneer het debiet en de snelheid beperkt blijven (Fig. 5.10a), echter vanaf een zeker kritisch debiet worden de stroomlijnen onregelmatig (Fig. 5.10b) en bij een nog groter debiet wordt de stroming volledig

wanordelijk, zodat er geen individuele stroomlijnen meer kunnen waargenomen worden en de kleurstof volledig de buis vult (Fig. 5.10c).

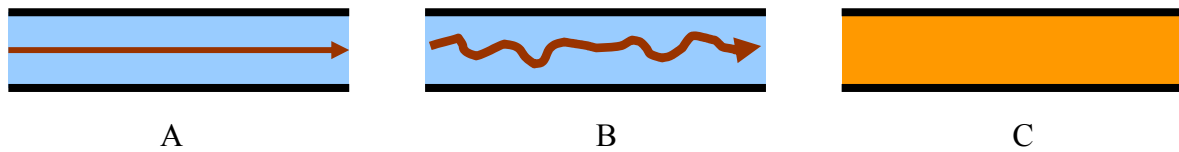


Fig. 5.10 Stromingsregimes: (a) laminair, (b) transitair, en (c) turbulent.

We noemen deze stromingsregimes respectievelijk:

- laminaire stroming, hetgeen duidt op het feit dat de stroomlijnen individueel onderscheiden kunnen worden en zich niet vermengen, alsof de vloeistof beweegt in aparte lamellen; in dit regime voldoet de stroming aan de wet van Poiseuille;
- transitoire stroming, een overgangsregime van eerder beperkt belang;
- turbulente stroming, wat duidt op het zeer woelig karakter van de stroming waarbij er een grote vermenging optreedt zodat er geen individuele stroomlijnen meer onderscheiden kunnen worden; deze stroming voldoet niet meer aan de wet van Poiseuille omdat de wrijving veel groter blijkt te zijn dan hetgeen voorspelt wordt met de wet van Poiseuille.

Door een groot aantal experimenten uit te voeren slaagde Reynolds erin om de verschillende regimes af te bakenen, met behulp van een dimensieloze grootheid die we nu aanduiden als het Reynoldsgetal  $Re$ , gegeven door

$$Re = \frac{\langle v \rangle D}{\nu} \quad (5.56)$$

waarin  $\langle v \rangle$  de gemiddelde snelheid is van de stroming,  $D$  de diameter van de buis en  $\nu$  de kinematische viscositeit van de vloeistof. Reynolds toonde aan dat de stroming laminair is zolang  $Re$  kleiner is dan 1000 tot 2000 en turbulent wordt vanaf  $Re$  groter dan 2000 tot 4000.

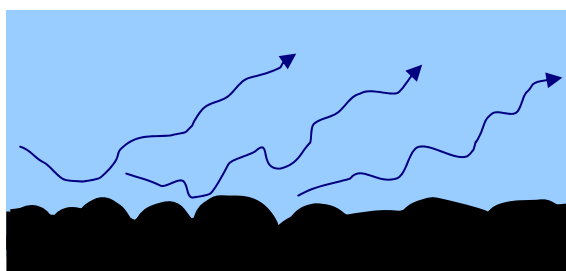


Fig. 5.11 Invloed van de wand op de stroming.

De verklaring waarom de stroming turbulent wordt heeft te maken met de ruwheid van de wand van de buis. Wanneer de wand uitvergroot wordt (Fig. 5.11), blijkt dat deze niet vlak is, zoals verondersteld wordt bij de afleiding van de wet van Poiseuille. Bij hogere snelheden langsheen de wand kunnen de stroomlijnen niet meer de vorm van de wand volgen en wijken



ze af van de wand, waarbij er wervels ontstaan welke zich verder zetten en met elkaar interfereren, waardoor er een wanordelijke beweging ontstaat van de vloeistofdeeltjes, hetgeen we aanduiden als turbulentie. De turbulentie ontstaat dus door de ruwheid van de wand. Met de huidige technologie is het mogelijk om buizen te maken met een bijna perfect rechte wand, waarin men een laminaire stroming kan bekomen met waarden van het Reynoldsgetal tot 10.000 en meer. Echter met de gebruikelijke materialen in de praktijk, zoals staal, koper, glas, beton, enz., is dit niet het geval en blijven de vaststellingen van Reynolds geldig.

Ter illustratie bereken we de voorwaarden voor dewelke de stroming van water of olie turbulent wordt. We beschouwen stroming doorheen een buis met een diameter van 25 cm en een buis met een diameter van 25 mm. De kinematische viscositeit van water is ongeveer  $1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , waardoor er in de grote buis turbulentie optreedt vanaf een gemiddelde snelheid van 0,008 m/s en in de dunne buis vanaf 0,08 m/s. Het is hiermee duidelijk dat voor de meeste gevallen in de praktijk de stroming van water turbulent zal zijn. Nemen we voor olie een kinematische viscositeit van  $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , dan zal er in de grote buis turbulentie optreden vanaf een gemiddelde snelheid van 0,14 m/s en in de dunne buis vanaf 1,44 m/s. Voor olie is de zaak dus niet zo duidelijk, omdat afhankelijk van de situatie de stroming laminair of turbulent kan zijn. We kunnen besluiten dat in de praktijk de stroming van dunne (kleine viscositeit) vloeistoffen zoals water meestal turbulent zal zijn, terwijl voor dikke (grote viscositeit) vloeistoffen alle stromingsregimes mogelijk zijn.

Hoe kan men nu het criterium van Reynolds veralgemenen voor eender welke situatie? Immers in de praktijk vindt de stroming niet altijd in buizen plaats, of zijn de buizen niet altijd cirkelvormig of volledig gevuld met de vloeistof. Om hieraan tegemoet te beschouwen we de hydraulische straal zoals gedefinieerd door Du Buat in 1786. Beschouw een dwarsdoorsnede in een stroombuis (Fig. 5.12); de hydraulische straal  $R_h$  is de verhouding tussen de oppervlakte  $S$  van de met vloeistof gevulde dwarsdoorsnede en de zogenaamde natte omtrek of perimeter  $P$ , zijnde de totale omtrek van de dwarsdoorsnede waar er contact is tussen de wand en de vloeistof

$$R_h = \frac{S}{P} \quad (5.57)$$

Merk op dat de hydraulische straal van een volledig gevulde buis (Fig. 5.12a) niet gelijk is aan de straal van de buis, maar wel de helft van de straal bedraagt ( $R_h = \pi R^2 / 2\pi R = R/2 = D/4$ ).

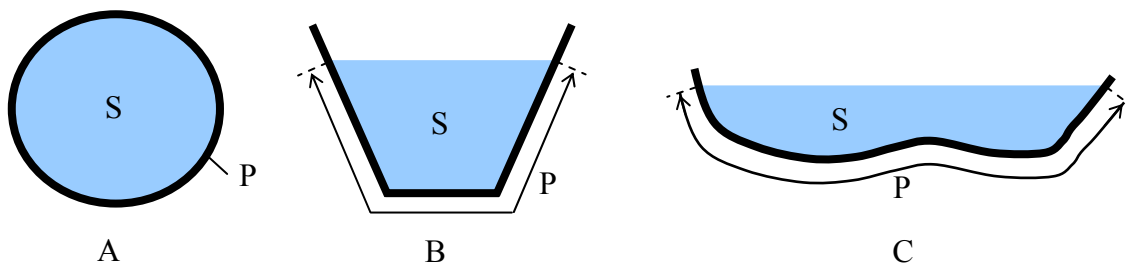


Fig. 5.12 Bepaling van de hydraulische straal: (a) in een volle buis, (b) in een kanaal, en (c) in een rivier.

Men definieert nu een Reynoldsgetal op basis van de hydraulische straal; we noteren dit Reynoldsgetal als  $Re_h$

$$Re_h = \frac{\langle v \rangle R_h}{\nu} \quad (5.58)$$

en veralgemenen de bevindingen van Reynolds als volgt:

- de stroming is (waarschijnlijk) laminair als  $Re_h < 500$
- de stroming is (waarschijnlijk) turbulent als  $Re_h > 500$

Het getal van Reynolds komt ook te voorschijn wanneer de Navier-Stokes vergelijkingen geschreven worden in dimensieloze vorm. Beschouw een stroombuis met een gemiddelde stroomsnelheid  $u$  en een hydraulische straal  $R_h$ . Voor permanente stroming zijn de Navier-Stokes vergelijkingen

$$\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \rho g \nabla z + \nabla p = \mu \nabla^2 \underline{v} \quad (5.59)$$

De ruimtelijke afmetingen worden geschaald volgens  $R_h$ : dus  $z' = z/R_h$  en ook  $\nabla' = R_h \nabla$ , de snelheid volgens  $u$ :  $\underline{v}' = \underline{v}/u$ , en de druk volgens  $\rho u^2$ :  $p' = p/\rho u^2$ . Hieruit volgt

$$\frac{\rho u^2}{R_h} \underline{v}' \cdot \nabla' \underline{v}' + \rho g \nabla' z' + \frac{\rho u^2}{R_h} \nabla' p' = \frac{\mu u}{R_h^2} \nabla'^2 \underline{v}' \quad (5.60)$$

Delen door  $\rho u^2/R_h$  geeft

$$\underline{v}' \cdot \nabla' \underline{v}' + \frac{g R_h}{u^2} \nabla' z' + \nabla' p' = \frac{\nu}{u R_h} \nabla'^2 \underline{v}' \quad (5.61)$$

ofwel

$$\underline{v}' \cdot \nabla' \underline{v}' + \frac{1}{Fr^2} \nabla' z' + \nabla' p' = \frac{1}{Re_h} \nabla'^2 \underline{v}' \quad (5.62)$$

met  $Fr$  het getal van Froude

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g R_h}} \quad (5.63)$$

dat het belang weergeeft van de zwaartekracht in de stroming ( $\sqrt{g R_h}$  is trouwens de snelheid van golven teweeggebracht door de zwaartekracht, welke men bijvoorbeeld kan waarnemen wanneer men een steen in het water gooit).

Het Reynoldsgetal in de vergelijking geeft duidelijk het effect weer van de viskeuze krachten. Indien  $Re$  klein is dan domineren de viskeuze krachten alle andere krachten, waardoor de verplaatsingen beperkt worden en de stroming laminair zal zijn. Is daarentegen  $Re$  groot dan hebben de viscositeitskrachten weinig effect en ontstaat er turbulentie. Merk op dat als uiterst limietgeval voor  $Re_h$  gaande naar oneindig men de perfecte vloeistofstroming bekommt.

Uitgaande van deze analyse kan men ook aan het Reynoldsgetal een fysische interpretatie geven als volgt. Wanneer men de inertiekracht schaalt (dit is de convectieve versnelling, de eerste term in vergelijking 5.60) dan krijgt men een factor  $\rho u^2/R_h$ , voor de viskeuze krachten vindt men  $\mu u/R_h^2$  (de laatste term in vergelijking 5.60). Het blijkt nu dat het Reynoldsgetal niets anders is dan de verhouding tussen de inertiekrachten en de viskeuze krachten

$$\text{Re}_h = \frac{uR_h}{\nu} = \frac{\rho u^2 / R_h}{\mu u / R_h^2} = \frac{\text{traagheidskracht (per volume)}}{\text{viscositeitskracht (per volume)}} \quad (5.64)$$

Dus hoe groter de viscositeitkrachten hoe kleiner het getal van Reynolds zal zijn.

Tenslotte wijzen we er op dat ook bij turbulente stroming de Navier-Stokes vergelijkingen theoretisch geldig blijven, maar niet meer de oplossingen zoals deze van Poisseuille of Hele-Shaw, omdat daarin geen rekening wordt gehouden met de ruwheid van de wanden, waardoor de wrijving onderschat wordt. Het is duidelijk dat wanneer de exacte vorm van de wand in aanmerking moet genomen worden het zeer moeilijk, zelfs onmogelijk zal zijn om nog exacte analytische oplossingen van de Navier-Stokes vergelijkingen te bekomen. Noodgedwongen zal men dus vereenvoudigingen moeten invoeren om tot bruikbare oplossingen te komen in de praktijk. Dit komt aan bod in volgend hoofdstuk.

## 6 TURBULENTE STROMING

---

### 6.1 Stromingsvergelijkingen

Bij turbulente stroming wordt vastgesteld dat de snelheid in een punt voortdurend fluctueert, zelfs in permanente regime. Het blijkt dat de snelheid uitgedrukt kan worden als een constant gedeelte  $\underline{v}$  en zeer chaotisch gedeelte  $\underline{v}'$ , zodat wanneer men de snelheid uitmiddelt over de tijd er alleen maar het gedeelte  $\underline{v}$  overblijft. De Navier-Stokes vergelijkingen kunnen dan herschreven worden als

$$\nabla \cdot (\underline{v} + \underline{v}') = 0 \quad (6.1a)$$

$$\rho \frac{\partial (\underline{v} + \underline{v}')}{\partial t} + \rho \nabla (\underline{v} + \underline{v}') (\underline{v} + \underline{v}')^T = -\rho g \nabla z - \nabla p + \mu \nabla^2 (\underline{v} + \underline{v}') \quad (6.1b)$$

waarbij de conservatieve vorm van de impulsvergelijking beschouwd wordt en de gravitatie als enige uitwendige kracht.

De turbulente stroming is zodanig ingewikkeld dat het onmogelijk is om exacte oplossingen te bekomen en vereenvoudigingen noodzakelijk zijn. Daarom is het aangewezen om alleen maar het gemiddeld gedrag van de stroming te beschouwen en bovenstaande vergelijkingen uit te middelen over de tijd. Hierdoor vallen alle termen die lineair zijn in  $\underline{v}'$  weg, zodat er overblijft

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (6.2a)$$

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \nabla (\underline{v} \underline{v}^T) = -\rho g \nabla z - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} - \rho \nabla \langle \underline{v}' \underline{v}'^T \rangle \quad (6.2b)$$

waarin de laatste term met de notatie  $\langle \rangle$  duidt op gemiddelde waarden in de tijd. Hieruit volgt dat de turbulente fluctuaties aanleiding geven tot een bijkomende term in de impulsvergelijking, die we als nieuwe bijkomende spanningen kunnen beschouwen, welke we aanduiden als de Reynoldsspanningen. De componenten van de totale inwendige spanningen wordt dan gegeven door

$$\tau_{xy} = -p \delta_{xy} + \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \rho \langle v'_x v'_y \rangle \quad (6.3)$$

waarbij  $x$  en  $y$  vervangen kunnen worden door  $x$ ,  $y$  of  $z$ , en  $\delta$  het Kronecker-symbool voorstelt. In de praktijk blijkt dat bij turbulente stroming de Reynoldsspanningen veel groter zijn dan de viskeuze spanningen, zodat bovenstaande vergelijking vereenvoudigd kan worden tot

$$\tau_{xy} \approx -p \delta_{xy} - \rho \langle v'_x v'_y \rangle \quad (6.4)$$

Indien we de Reynoldsspanningen nader kunnen ombeschrijven verkrijgen we opnieuw vier vergelijkingen met vier onbekenden,  $p$  en  $\underline{v}$ , hetgeen theoretisch oplosbaar is. Evenwel bestaan er geen theoretische wetmatigheden om de turbulentie te verklaren en moeten we

empirische benaderingen gebruiken, die uiteraard gesteund zijn op de experimentele vaststellingen. Er bestaan verschillende benaderingen de ene al wat ingewikkelder dan de andere. We zullen ons hier beperken tot de meest eenvoudige benadering, die in het begin van vorige eeuw uitgewerkt werd door Prandtl en von Karman. Deze techniek volstaat om de meeste courante gevallen van turbulente stroming op te lossen in de praktijk. Voor meer ingewikkelde situaties zijn er andere meer gevorderde technieken nodig, welke men kan vinden in de vakliteratuur.

We sluiten deze paragraaf af met de bemerking dat de continuïteitsvergelijking dezelfde is als bij de perfecte vloeistoffen en laminaire stroming, zodat voorgaande resultaten geldig blijven. In het bijzonder zijn bij permanente stroming het behoud van debiet en de wet van Castelli geldig in een stroombuis en zijn oppervlakken loodrecht op de stroming hydrostatisch.

## 6.2 De mengtheorie van Prandtl

Beschouw een turbulente stroming van een vloeistof langs een wand (Fig. 6.1). De gemiddelde stroming is parallel gericht aan de wand en op een zekere afstand  $y$  van de wand bedraagt de gemiddelde stroming  $v_x(x,y)$ .

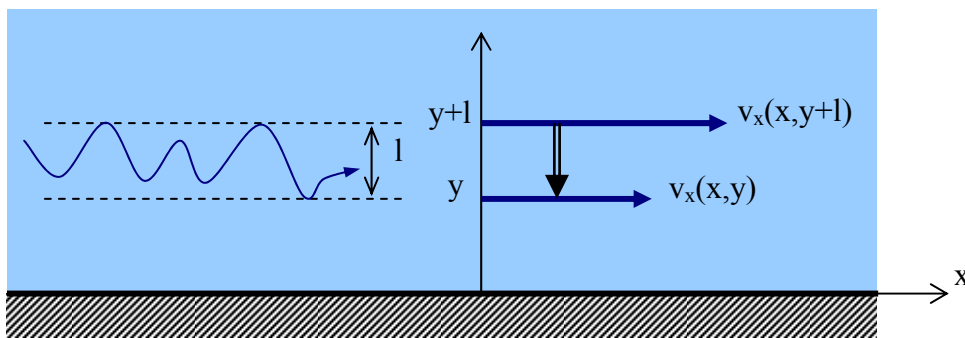


Fig. 6.1 Turbulente stroming langs een wand.

Door het turbulent karakter van de stroming zijn er deeltjes die plotseling van plaats veranderen. Bijvoorbeeld deeltjes op een afstand  $y+l$  van de wand, die een gemiddelde snelheid  $v_x(x,y+l)$  bezitten, komen plotseling terecht op een afstand  $y$  van de wand. Hierdoor worden impulsen overgedragen en ondervindt de stroming op een afstand  $y$  van de wand een plotselinge afwijking  $v'_x$  gegeven door

$$v'_x = \Delta v_x = v_x(x, y+l) - v_x(x, y) \quad (6.5)$$

Door gebruik te maken van een Taylor reeksontwikkeling wordt dit

$$v'_x = v_x(x, y) + l \frac{dv_x}{dy} + \dots - v_x(x, y) \approx l \frac{dv_x}{dy} \quad (6.6)$$

Door de plotselinge overgang van de deeltjes door turbulentie zijn er ook fluctuaties van de snelheid in de  $y$ -richting, nl.  $v'_y$ . Het lijkt aannemelijk te veronderstellen dat deze van dezelfde

grootte zijn als  $v'_x$ , zodat

$$v'_y = -v'_x \approx -l \frac{dv_x}{dy} \quad (6.7)$$

Hieruit volgt dat de turbulente schuifspanning  $\tau_{xy}$  berekend kan worden als

$$\tau_{xy} \approx -\rho \langle v'_x v'_y \rangle \approx \rho l^2 \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^2 \quad (6.8)$$

waarbij verondersteld is geworden dat bovenstaande betrekking geldig is voor de gemiddelde toestand. Hieruit blijkt dat de schuifspanningen evenredig zijn met het kwadraat van de snelheidsgradiënt, dit in tegenstelling met de wet van Newton (vergelijking 1.12) voor viskeuze vloeistoffen waarbij een lineair verband vooropgesteld werd. In bovenstaande vergelijking ontbreekt evenwel een exacte waarde voor de afstand  $l$ . Deze parameter wordt de menglengte genoemd en werd proefondervindelijk bepaald door von Karman als zijnde evenredig met de afstand tot de wand

$$l = \kappa y \quad (6.9)$$

met  $\kappa$  de dimensieloze constante van von Karman, welke gelijk is aan ongeveer 0,40. Hieruit volgt

$$\tau_{xy} = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^2 \quad (6.10)$$

zodat

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau_{xy}}{\rho}} \quad (6.11)$$

In de veronderstelling dat de overgedragen schuifspanning constant is, kan bovenstaande betrekking geïntegreerd worden om de variatie van de gemiddelde snelheid langs de wand te bereken

$$v_x = \frac{v_*}{\kappa} \ln y + c \quad (6.12)$$

met  $v_*$  de zogenaamde wrijvingsnelheid, gegeven door

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (6.13)$$

waarbij we de indexen  $x$  en  $y$  weggelaten hebben omdat deze afleiding geldig is voor elke wand die wrijving veroorzaakt met een turbulente stroming als gevolg. De wrijvingsnelheid geeft de orde van grootte van de turbulente stromingsfluctuaties.

De bepaling van de constante in vergelijking 6.12 stelt een probleem. Het is immers niet

mogelijk om de snelheid aan de wand nul te maken, omdat de logaritmische functie dan oneindig wordt. Bovendien is zulke voorwaarde ook niet realistisch, omdat de wand oneffenheden vertoont waardoor het niet duidelijk is wat  $y = 0$  fysisch betekend. Daarom wordt per conventie deze constante bepaald als de plaats  $y_0$  waar de snelheid schijnbaar nul wordt

$$v_x = \frac{v_*}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \quad (6.14)$$

We noemen deze plaats  $y_0$  het nulvlak. Het bekomen snelheidsprofiel wordt verduidelijkt in Fig. 6.2.

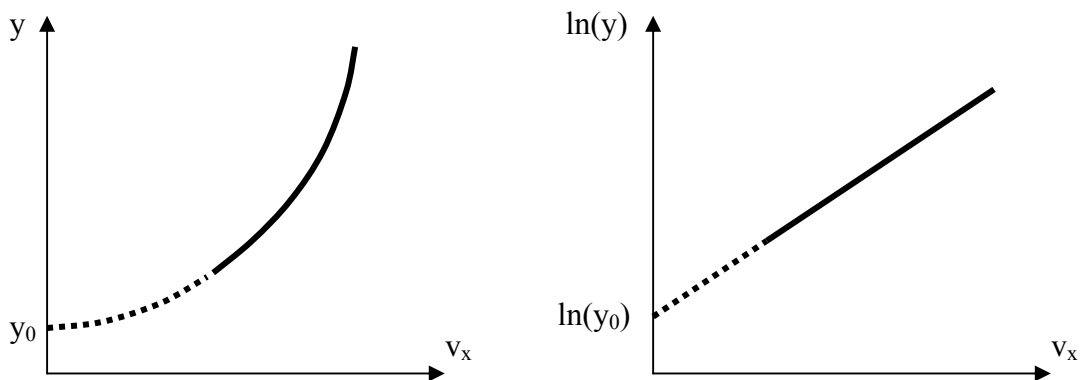


Fig. 6.2 Snelheidsprofiel van een turbulente stroming nabij een wand.

Het snelheidsprofiel is logaritmisch, maar onbepaald nabij de wand. Dit hoeft ons niet te verbazen, daar de wand niet echt vlak is maar oneffenheden vertoont. Wat we echter nog niet hebben bekomen is een relatie tussen het logaritmisch snelheidsprofiel en de eigenschappen van de wand. Dit werd proefondervindelijk onderzocht door snelheidsprofielen op te meten in buizen van verschillend materiaal bij verschillend debiet en verschillende vloeistoffen. Door de waargenomen snelheden uit te zetten volgens de logaritme van de afstand tot de wand, kan men dan  $y_0$  bepalen om de relatie na gaan met de eigenschappen van de wand. Er blijken zich twee gevallen voor te doen: ofwel is de wand ruw, ofwel is de wand glad.

De situatie voor een ruwe wand wordt weergegeven in Fig. 6.3. In dit geval is het nulvlak gelegen binnen de zone van de oneffenheden die op de wand voorkomen. In deze zone zijn er eigenlijk geen gemiddelde snelheden in de x-richting en het logaritmisch snelheidsprofiel is slechts geldig vanaf een zekere afstand van de wand. In dit geval volgt uit de experimenten dat  $y_0$  een parameter is afhankelijk van de afmeting  $\varepsilon$  van de oneffenheden op de wand

$$y_0 \approx \frac{\varepsilon}{33} \quad (6.15)$$

Parameter  $\varepsilon$  wordt de wandruwheid genoemd en kan experimenteel worden opgemeten; enkele waarden voor typische materialen worden gegeven in Tabel 6.1.

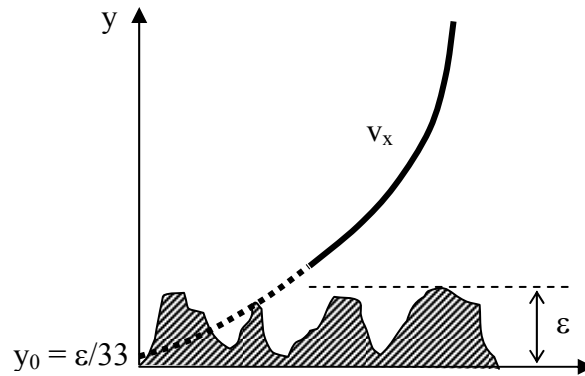


Fig. 6.3 Turbulent stromingsprofiel nabij een ruwe wand.

Tabel 6.1 Ruwheid van verschillende materialen.

Materiaal	Ruwheid - $\epsilon$ (mm)	
	Bereik	Rekenwaarde
glas		0,0015
koper		0,0015
brons		0,0015
lood		0,0015
PVC	0,03-0,1	0,06
gelast staal	0,03-0,09	0,045
gegalvaniseerd staal	0,05-0,2	0,15
geasfalteerd gietijzer	0,06-0,18	0,12
onbekleed gietijzer	0,1-0,6	0,25
glad beton	0,2-0,5	0,35
ruw beton	1-3	2
baksteen	0,5-2	1
zand		5
grind	10-50	20
keien		50
waterloop met begroeiing	100-200	150
terrein met hindernissen	200-500	350

De situatie voor een gladde wand wordt voorgesteld in Fig. 6.4. Het blijkt dat het nulvlak zich nu situeert buiten de zone met oneffenheden van de wand. Ook blijkt dat de snelheden nabij de wand afwijken van het logaritmsch profiel. Men kan eigenlijk drie zones onderscheiden in het snelheidsprofiel: een zone met turbulente stroming, een overgangszone en een zone met laminaire stroming. Deze laatste zone noemt men de laminaire grenslaag en wordt gekenmerkt door het feit dat de viskeuze spanningen er veel groter zijn dan de Reynoldspanningen. In de grenslaag is de viscositeitwet van Newton dus van toepassing, zodat

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (6.16)$$



met als oplossing

$$v_x = \frac{\tau_{xy} y}{\mu} = \frac{\rho v_*^2 y}{\mu} = \frac{v_*^2 y}{\nu} \quad (6.17)$$

ofwel

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{y}{\nu/v_*} \quad (6.18)$$

Experimenten tonen aan dat de viskeuze grenslaag een dikte heeft van ongeveer  $5\nu/v_*$  en dat de overgangszone zich uitstrekt tot ongeveer  $70\nu/v_*$ ; pas daarna wordt het snelheidsprofiel logaritmisch.

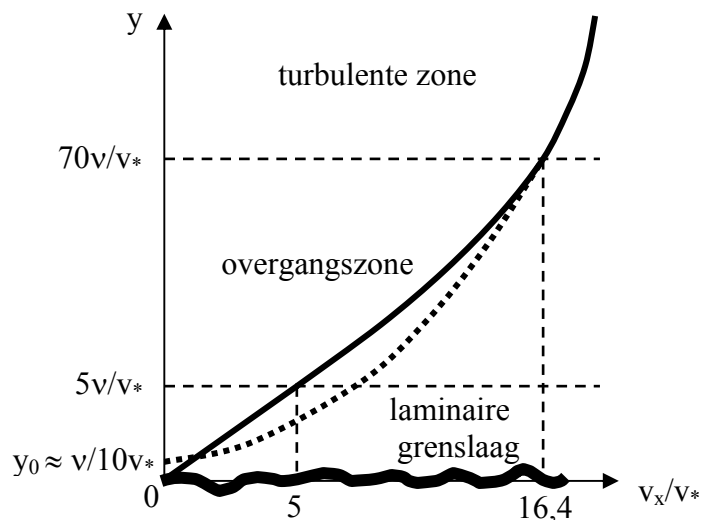


Fig. 6.4 Stromingsprofiel nabij een gladde wand.

Ook kan men experimenteel vaststellen dat het logaritmisch snelheidsprofiel een schijnbaar nulvlak heeft gelijk aan ongeveer  $\nu/10v_*$ .

Tussen een ruwe wand en een gladde wand zijn er overgangsvormen mogelijk, welke niet allemaal in detail beschouwd kunnen worden. Daarom aanvaardt men volgende benadering

$$y_0 \approx \frac{\nu}{10v_*} + \frac{\epsilon}{33} \quad (6.19)$$

zodat voor eender welke situatie het volgende snelheidsprofiel bij benadering geldig is

$$v_x \approx \frac{v_*}{\kappa} \ln \left( \frac{y}{\nu/10v_* + \epsilon/33} \right) \quad (6.20)$$

In de volgende paragrafen zullen we zien hoe dit in de praktijk toegepast wordt.

### 6.3 Turbulente stroming in een buis

Beschouw een permanente stroming in een buis met constante diameter, zoals weergegeven in Fig. 6.5. Uit de continuïteitsvergelijking volgt dat het debiet  $Q$  constant is en er alleen maar stroming mogelijk is in de longitudinale richting.

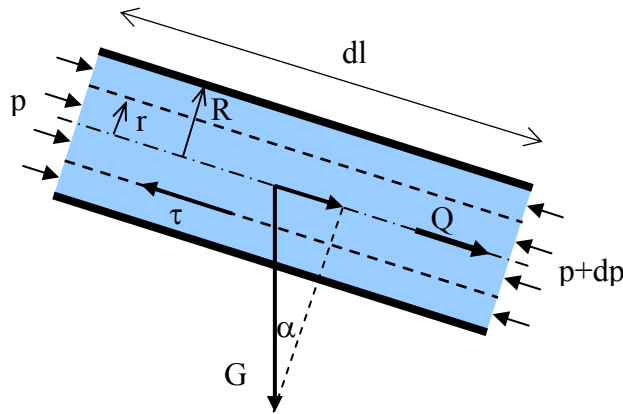


Fig. 6.5 Permanente stroming in een buis.

We berekenen de krachten op een vloeistofvolume gelegen binnen een straal  $r$  van de centrale as van de buis over een lengte  $dl$ . De vloeistof daar rond oefent een schuifspanning  $\tau$  uit op vloeistof in het midden. Een krachtenevenwicht van de binnenste vloeistof in de longitudinale richting geeft dan

$$p\pi r^2 + G \sin \alpha = (p + dp)\pi r^2 + 2\pi r\tau dl \quad (6.21)$$

ofwel

$$\tau = \frac{G \sin \alpha - \pi r^2 dp}{2\pi r dl} = \frac{\rho g \pi r^2 dl \sin \alpha - \pi r^2 dp}{2\pi r dl} \quad (6.22)$$

en vermits  $\sin \alpha = -dz/dl$  volgt hieruit

$$\tau = -\frac{\rho g r}{2} \frac{d}{dl} \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) = -\frac{\rho g r}{2} \frac{dh}{dl} = \frac{1}{2} \rho g r J \quad (6.23)$$

met  $J$  het ladingsverlies. De maximale schuifspanning komt voor aan de wand van de buis en is gegeven door

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \rho g R J \quad (6.24)$$

zodat

$$\tau = \frac{r}{R} \tau_{\max} \quad (6.25)$$

Het krachtenevenwicht is volledig identiek met wat we gezien hebben in paragraaf 5.3; het

doet er niet toe of de stroming laminair of turbulent is. We onderzoeken nu hoe deze schuifspanning overgebracht wordt door de turbulente stroming. De vergelijking van Prandtl is in dit geval

$$\tau = \rho l^2 \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 \quad (6.26)$$

De menglengte  $l$  is nu niet alleen afhankelijk van de afstand tot de wand, maar wordt ook beperkt door de afmeting van de buis, zodat volgens von Karman

$$l = \kappa(R - r)\sqrt{r/R} \quad (6.27)$$

Hieruit volgt

$$\tau = \rho \kappa^2 (R - r)^2 \frac{r}{R} \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 \quad (6.28)$$

We vervangen nu  $\tau$  met behulp van vergelijking 6.25 en lossen op naar  $dv/dr$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{\kappa(R - r)} \sqrt{\frac{\tau_{\max}}{\rho}} = \frac{v_*}{\kappa(R - r)} \quad (6.29)$$

Integratie geeft een logaritmisch snelheidsprofiel

$$v = \frac{v_*}{\kappa} \ln(R - r) + c^{te} \quad (6.30)$$

met  $v_*^2 = \tau_{\max}/\rho$  en waarbij de integratieconstante wordt bekomen door het nulvlak te definiëren op de plaats  $r = R - y_0$ , zodat

$$v = \frac{v_*}{\kappa} \ln \left( \frac{R - r}{y_0} \right) \quad (6.31)$$

We kunnen nu het totaal debiet berekenen, door de snelheid te integreren over een dwarsdoorsnede van de buis, waarbij we geen rekening houden met de snelheden juist aan de wand omdat deze toch geen significante bijdrage leveren tot het debiet

$$Q = \int_0^{R-y_0} 2\pi r v dr = \frac{2\pi v_*}{\kappa} \int_0^{R-y_0} r \ln \left( \frac{R - r}{y_0} \right) dr \quad (6.32)$$

De integraal kan uitgewerkt worden als volgt

$$\int_0^{R-y_0} r \ln \left( \frac{R - r}{y_0} \right) dr = y_0^2 \int_{R/y_0}^1 (\lambda - R/y_0) \ln \lambda d\lambda = y_0^2 \left[ \lambda^2 / 2 (\ln \lambda - \frac{1}{2}) - R/y_0 (\ln \lambda - 1) \right]_{R/y_0}^1$$

$$= y_0^2 \left[ -\frac{1}{4} + R/y_0 + (R/y_0)^2 \left( \frac{1}{2} \ln R/y_0 - \frac{3}{4} \right) \right] = -\frac{1}{4} y_0^2 + y_0 R + R^2 \left( \frac{1}{2} \ln R/y_0 - \frac{3}{4} \right)$$

$$\approx R^2 \left( \frac{1}{2} \ln(R/y_0) - \frac{3}{4} \right) \quad (6.33)$$

waaruit volgt

$$Q = \frac{\pi R^2 v_*}{\kappa} \left( \ln R/y_0 - \frac{3}{2} \right) = \frac{\pi R^2 v_*}{\kappa} \ln \left( \frac{R}{y_0 e^{3/2}} \right) \quad (6.34)$$

De gemiddelde snelheid wordt dan gegeven door

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{v_*}{\kappa} \ln \left( \frac{R}{y_0 e^{3/2}} \right) \quad (6.35)$$

Het snelheidsprofiel wordt schematisch voorgesteld in Fig. 6.6. Het logaritmische snelheidsprofiel is veel meer afgeplat in vergelijking met het parabolisch profiel van de laminaire stroming. De maximale snelheid komt uiteraard voor in het midden van de buis; er is hier wel een kleine onnauwkeurigheid merkbaar, namelijk de afgeleide van de snelheid is niet nul voor  $r = 0$ , wat men nochtans zou verwachten gezien de symmetrie. Dit is een gevolg van de verschillende benaderingen, maar in de praktijk is dit van geen belang. Ook is de snelheid nabij de wand onbepaald, echter hiervoor gelden dezelfde beschouwingen als in vorige paragraaf.

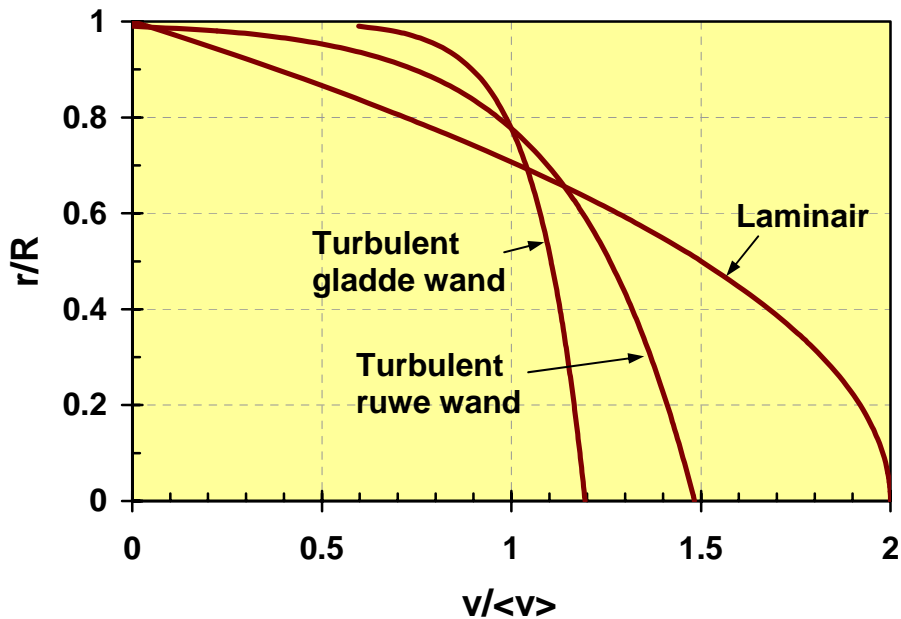


Fig. 6.6 Turbulent snelheidsprofiel in een buis.

We zijn voornamelijk geïnteresseerd in het ladingsverlies te wijten aan de turbulente stroming. Uitgaande van vergelijking 6.24 kunnen we het ladingsverlies  $J$  berekenen als

$$J = \frac{2\tau_{\max}}{\rho g R} = \frac{8}{D} \frac{v_*^2}{2g} \quad (6.36)$$

met  $D$  de diameter van de buis. De wrijvingsnelheid  $v_*$  kan bekomen worden uit vergelijking 6.35, waaruit volgt

$$J = \frac{8\kappa^2}{D \left( \ln \frac{D}{2y_0 e^{3/2}} \right)^2} \frac{\langle v \rangle^2}{2g} = \frac{f}{D} \frac{\langle v \rangle^2}{2g} \quad (6.37)$$

waarin we  $f$  definiëren als een dimensieloze wrijvingsfactor. Bovenstaande vergelijking vormt de synthese van de turbulente stromingstheorie voor stroming doorheen buizen. Het ladingsverlies blijkt proportioneel te zijn met de gemiddelde snelheid in het kwadraat, dit in tegenstelling tot de laminaire stroming waarbij het ladingsverlies lineair afhankelijk is van gemiddelde snelheid. Het is daarom gebruikelijk om het turbulent ladingsverlies uit te drukken als een fractie van de kinetische energiehoogte, zoals weergegeven in de formule 6.37. Het ladingsverlies is ook omgekeerd evenredig met de diameter van de buis. Voor een buis met een lengte  $L$  wordt het totaal ladingsverlies  $\Delta e$  gegeven door

$$\Delta e = -JL = -f \frac{L}{D} \frac{\langle v \rangle^2}{2g} \quad (6.38)$$

Dit is de Darcy-Weisbach vergelijking, welke gebruikt wordt om turbulente stroming in buizen te berekenen. Uit experimenten blijkt dat de wrijvingsfactor  $f$  afhankelijk is van het Reynoldsgetal  $Re$  en de relatieve ruwheid  $\varepsilon/D$  van de wand. Dit kan ook aangetoond worden uitgaande van vergelijkingen 6.36 en 6.37

$$f = \frac{8v_*^2}{\langle v \rangle^2} = \frac{8\kappa^2}{\left( \ln \frac{D}{2y_0 e^{3/2}} \right)^2} \quad (6.39)$$

In deze uitdrukking kan  $y_0$  vervangen worden door de benadering opgesteld in vorige paragraaf (vergelijking 6.19). De formule kan dan verder uitgewerkt worden op volgende wijze

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{8\kappa}} \ln \left[ \frac{D}{2 \left( \frac{v}{10v_*} + \frac{\varepsilon}{33} \right) e^{3/2}} \right] = \frac{-2,03}{\sqrt{8,0,4}} \log \left( \frac{2ve^{3/2}}{10v_*D} + \frac{2\varepsilon e^{3/2}}{33D} \right) \quad (6.40)$$

Tenslotte kan in het rechterlid van de vergelijking  $v_*$  vervangen worden door gebruik te maken van vergelijking 6.39. Indien alle coëfficiënten uitgerekend worden waarbij de cijfers afgerond worden, geeft dit

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \approx -2 \times \log \left( \frac{2,5}{\text{Re} \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \quad (6.41)$$

Dit is de White-Colebrook vergelijking, die toelaat de wrijvingsfactor te berekenen op een iteratieve wijze. Er zijn twee berekeningsprocedures mogelijk. Indien het debiet en de gemiddelde snelheid gekend is, kan men met de relatieve ruwheid van de buis  $\varepsilon/D$  en het Reynoldsgetal  $\text{Re}$  de waarde van de wrijvingsfactor bepalen door bovenstaande vergelijking iteratief op te lossen. Met de Darcy-Weisbach vergelijking kan men dan het ladingsverlies berekenen. Het wordt iets moeilijker wanneer het energieverval gegeven is en er gevraagd wordt om het debiet te bepalen. Men moet dan het Reynoldsgetal schatten en met de relatieve ruwheid van de buis een waarde voor  $f$  bepalen op iteratieve wijze. Uitgaande van de Darcy-Weisbach vergelijking berekent men dan de gemiddelde snelheid, wat een verbeterde waarde voor het Reynoldsgetal oplevert, waarna de procedure herhaald wordt tot de berekeningen convergeren. Met de uiteindelijke waarde van de gemiddelde snelheid kan dan het debiet berekend worden.

Om de berekeningen te vereenvoudigen werd door Moody een grafiek opgesteld, waarop men de wrijvingsfactor  $f$  kan aflezen in functie van  $\text{Re}$  en  $\varepsilon/D$ . Dit is het zogenaamde Moody-diagram, gegeven in Fig. 6.7. Om de grafiek te vervolledigen wordt voor waarden van  $\text{Re}$  kleiner dan 2000 ook de laminaire stroming beschouwd. Indien men het ladingsverlies uitdrukt volgens de Darcy-Weisbach vergelijking, dan blijkt voor laminaire stroming de wrijvingsfactor gelijk te zijn aan  $64/\text{Re}$ . Uit het diagram volgt dat gebruikelijke waarden voor de wrijvingsfactor begrepen zijn tussen 0,01 en 0,10. Lage waarden worden bekomen voor gladde buizen, maar de wrijvingsfactor stijgt snel met toenemende ruwheid van de wand. Bij hoge waarden van het Reynoldsgetal blijkt de wrijvingsfactor alleen nog maar afhankelijk te zijn van de relatieve ruwheid. Merk ook op dat indien er laminaire stroming mogelijk zou zijn bij hoge snelheden dit veel minder wrijving en energieverlies zou veroorzaken dan turbulente stroming.

Voor buizen die slechts gedeeltelijk gevuld zijn met vloeistof of die een niet-circulaire doorsnede hebben, moeten de berekeningen uitgevoerd worden met een effectieve diameter  $D_e$ , zodanig dat de hydraulische straal gelijk blijft, dus  $D_e = 4R_h = 4S/P$  (met  $S$  de natte doorsnede en  $P$  de natte omtrek, zoals gedefinieerd in vorig hoofdstuk).

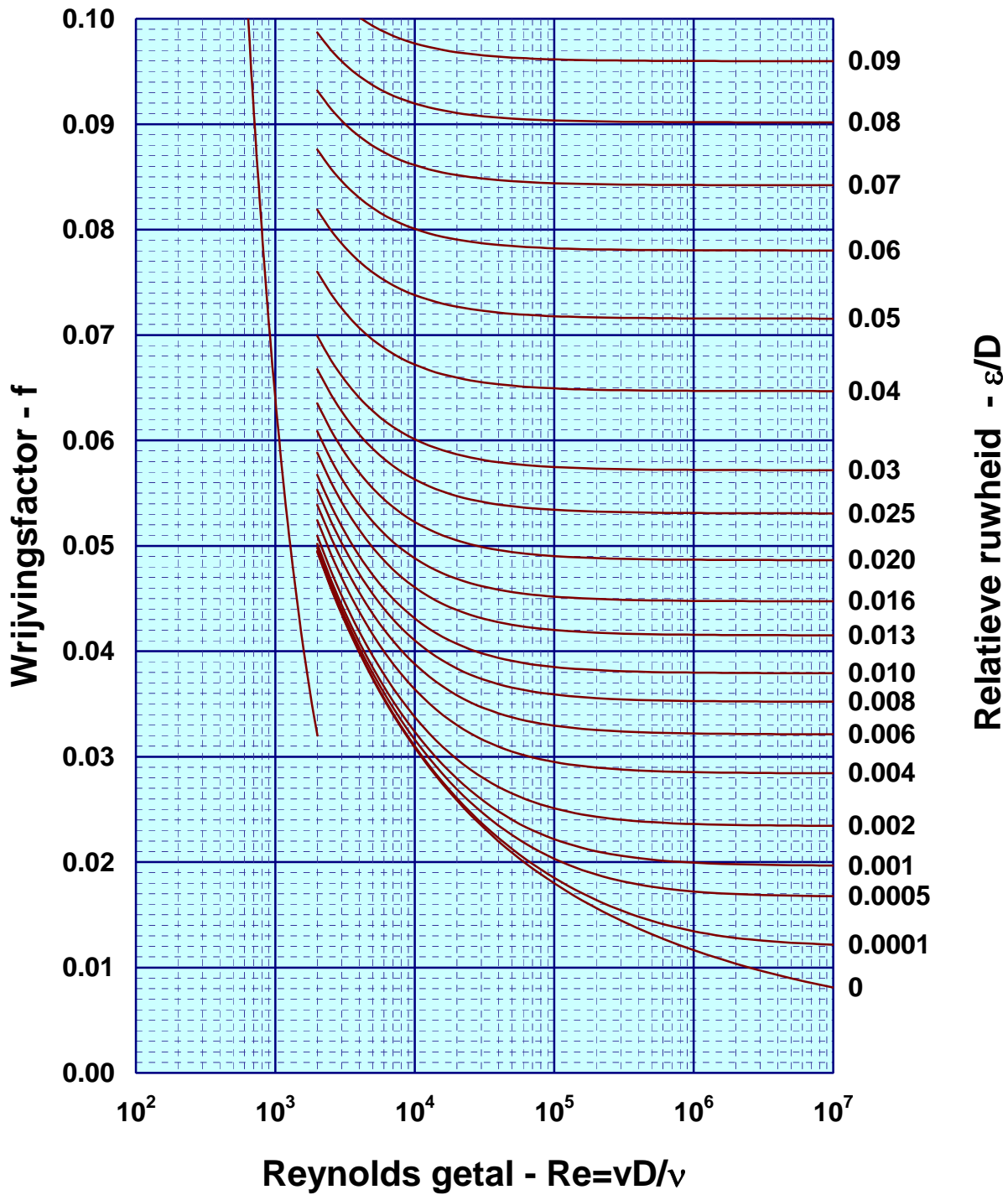


Fig. 6.7 Het diagram van Moody geeft de wrijvingsfactor in functie van het Reynoldsgetal en de relatieve ruwheid.

## 6.4 Speciale verliezen in leidingen

Leidingen en netwerken bestaan niet alleen uit rechte buizen, maar ook uit in- en uitlaten, verbindingen, bochten, vernauwingen, verbredingen, enz. Ook hierbij treden er wrijvingsverliezen op welke dikwijls belangrijk zijn. Vermits de meeste van deze constructies niet erg lang zijn, is de wrijving langsheen de wand minder belangrijk dan de speciale energieverliezen, die ontstaan doordat de stroming niet zijn rechte weg kan volgen, maar gedwongen wordt tot een bepaalde afwijking. Deze situaties kunnen erg ingewikkeld zijn, waardoor het niet mogelijk is om de wrijvingsverliezen te berekenen op een wetmatige wijze. Men gaat daarom proefondervindelijk te werk. Hierbij heeft men in de eerste plaats vastgesteld dat in alle gevallen de verliezen evenredig zijn met het kwadraat van de gemiddelde snelheid, zodat het ladingsverlies uitgedrukt kan worden in functie van de van de kinetische energiehoopte

$$\Delta e = -k \frac{\langle v \rangle^2}{2g} \quad (6.42)$$

waarbij  $k$  een dimensieloze verliescoëfficiënt is die men proefondervindelijk bepaald.

Voor de meest voorkomende situaties werden proeven uitgevoerd en is de waarde van  $k$  gekend. Een overzicht van de meest courant voorkomende gevallen wordt gegeven in Fig. 6.8. Voor een vrije uitlaat (Fig. 6.8a) is er geen verlies,  $k = 0$ , maar voor een verdronken uitlaat (Fig. 6.8b) gaat de kinetische energie verloren, zodat  $k = 1$ . Voor inlaten zijn er volgende mogelijkheden: voor een gewone inlaat (Fig. 6.8c) is  $k = 0,5$ ; voor een instekende uitlaat (Fig. 6.8d) is  $k = 1$ , wat erg ongunstig is en best vermeden moet worden; en voor een afgeronde inlaat (Fig. 6.8e) is  $k = 0,05$  indien de straal van de afronding groter is dan de straal van de buis. Uiteraard is voor inlaten de gemiddelde snelheid in vergelijking 6.42 deze die voorkomt in de buis juist na de inlaat. Voor een knik in een buis, een zogenaamd kniestuk (Fig. 6.8f), is het verlies afhankelijk van de hoek  $\alpha$ ; karakteristieke waarden worden gegeven in Tabel 6.2.

Tabel 6.2 Verliescoëfficiënten in functie van de hoek  $\alpha$  van een kniestuk.

$\alpha$	10°	30°	45°	60°	90°
$k$	0,04	0,15	0,28	0,55	1,20

Merk op dat een rechte hoek in een buis zeer veel ladingsverlies veroorzaakt en dus best vermeden moet worden. Het is daarom aangewezen bochten te voorzien (Fig. 6.8g), waarvoor men de verliescoëfficiënt kan berekenen met volgende formule

$$k = k' \frac{\alpha}{90^\circ} \quad (6.43)$$

waarbij  $k'$  afhankelijk is van de verhouding tussen de straal  $r$  van de bocht en de diameter  $D$  van de buis. Karakteristieke waarden worden gegeven in Tabel 6.3.



Tabel 6.3 Coëfficiënt  $k'$  in functie van  $r/D$  in een bochtstuk.

<b>r/D</b>	1	2	10
<b>k'</b>	0,35	0,19	0,10

Hieruit volgt dat zelfs kleine bochten reeds een gevoelige reductie geven in het energieverlies in vergelijking met kniestukken. In geval van een T-stuk (Fig. 6.8h), is het verlies afhankelijk van de richting van de stroming: voor stroming doorheen het rechte stuk is  $k \approx 0,4$  terwijl  $k \approx 1,5$  is voor stroming langs de dwarsverbinding. Voor afsluiters (Fig. 6.8i) is het verlies afhankelijk van het type en de stand van de kraan. Meestal zijn de verliezen erg groot (zelfs wanneer de afsluiter volledig geopenend is); typische waarden voor  $k$  variëren tussen 1 en 10.

Bijzonder zijn vernauwingen of verbredingen. In geval van een vernauwing, wordt als gemiddelde snelheid in vergelijking 6.40, de snelheid gebruikt die voorkomt na de vernauwing. Voor een plotse vernauwing (Fig. 6.8j), is  $k$  afhankelijk van de verhouding van de diameter van de buis na en voor de vernauwing,  $D_2/D_1$ . Karakteristieke waarden worden gegeven in Tabel 6.4.

Tabel 6.4. Verliescoëfficiënt bij een vernauwing in functie van de buisdiameters.

<b><math>D_2/D_1</math></b>	0	1/4	1/2	3/4
<b>k</b>	0,50	0,45	0,35	0,22

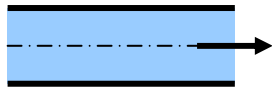
Geleidelijke vernauwingen geven minder verlies; bijvoorbeeld voor een conische vernauwing (Fig. 6.8k), met een hoek van  $20^\circ$  tot  $40^\circ$ , is  $k \approx 0,1$ . Doch deze zijn in de praktijk niet eenvoudig te verwezenlijken. Indien de hoek nog kleiner is, dan primeren de wrijvingsverliezen langsheen de wand; bij een grotere hoek zijn de waarden in Tabel 6.4 van toepassing. Bij een verbreding is het verlies afhankelijk van de gemiddelde snelheid  $v_1$  voor verbreding en de gemiddelde snelheid  $v_2$  na de verbreding

$$\Delta e = -k \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \quad (6.44)$$

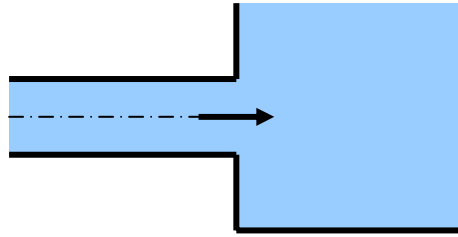
Bij een plotselinge verbreding (Fig. 6.8l) is  $k \approx 1$ , terwijl voor een conische verbreding (Fig. 6.8m) met een hoek  $\alpha$ , de verliescoëfficiënt  $k$  bij benadering gegeven wordt door

$$k \approx \frac{2\alpha}{100^\circ} \quad (6.45)$$

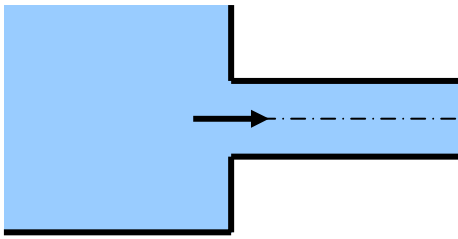
indien  $\alpha$  begrepen is tussen  $20^\circ$  en  $40^\circ$ . Bij kleinere hoeken primeert het wrijvingsverlies langsheen de wand en bij grotere hoeken wordt  $k$  gelijk aan 1.



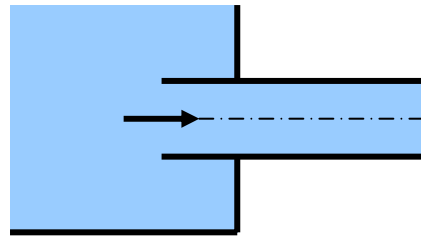
A



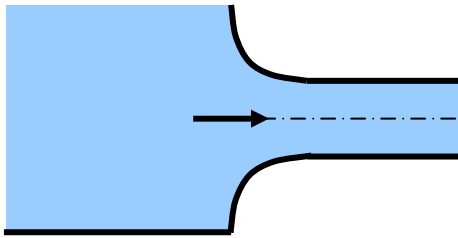
B



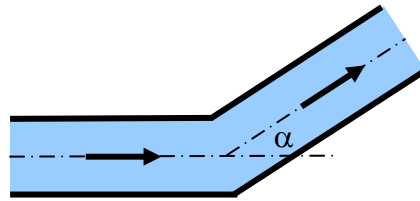
C



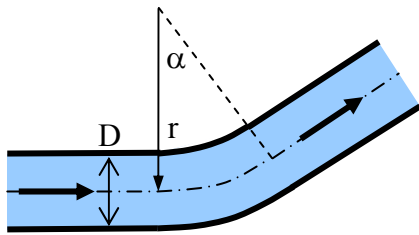
D



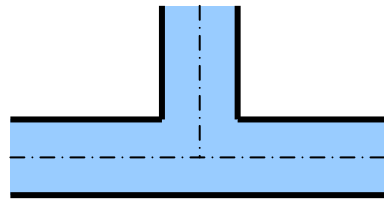
E



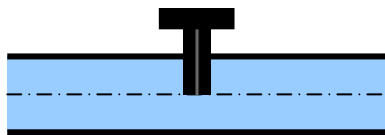
F



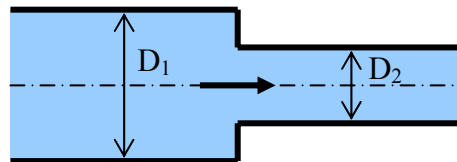
G



H



I



J

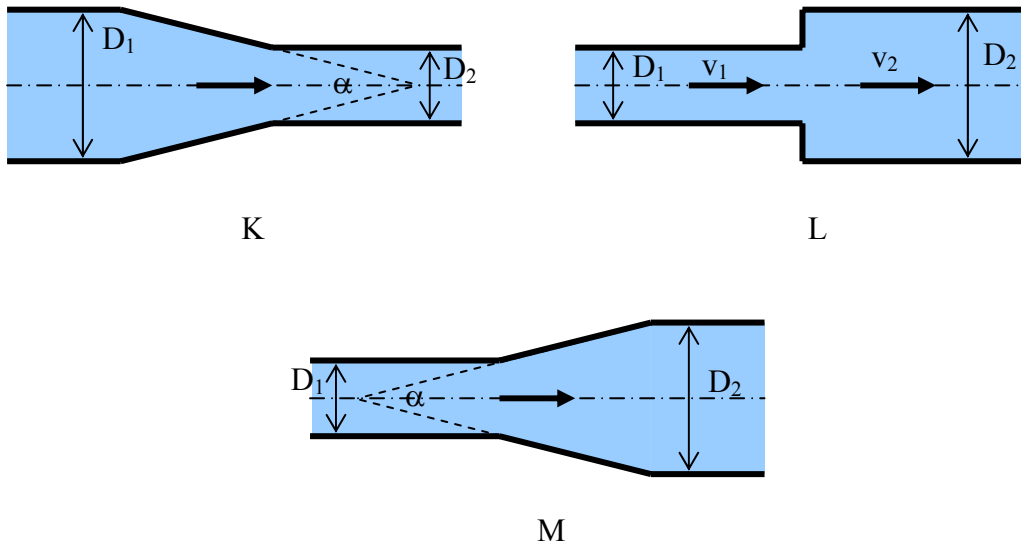


Fig. 6.8 Speciale secties in leidingen met ladingsverliezen: (a) vrije uitlaat, (b) verdronken uitlaat, (c) inlaat, (d) instekende inlaat, (e) afgeronde inlaat, (f) knik, (g) bocht, (h) T-stuk, (i) afsluiter, (j) plotse vernauwing, (k) conische vernauwing, (l) plotse verbreding en (m) conische verbreding.

### 6.5 Turbulente stroming met een vrij oppervlak

We beschouwen nu de turbulente stroming met een vrij oppervlak in een stroombedding (Fig. 6.9). De stroming is permanent met een debiet  $Q$ , zodat de helling  $i$  van het vrij oppervlak en de bedding hetzelfde zijn, en ook gelijk aan het ladingsverlies  $J$ .

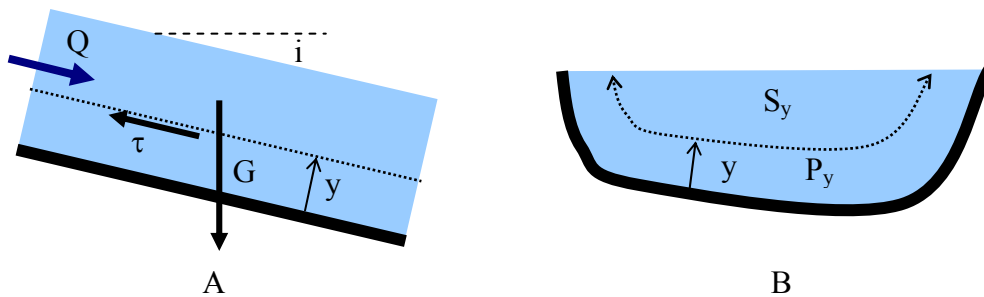


Fig. 6.9 Turbulente stroming met een vrij oppervlak: (a) langssectie en (b) dwarssectie.

Beschouw de vloeistof op een afstand  $y$  van de bedding. Tussen deze vloeistof en vloeistof langs de bedding wordt er een schuifspanning overgedragen. Om deze te berekenen beschouwen we het krachterevenwicht in de richting van de stroming van de vloeistof op een afstand  $y$  van de bedding. De drukkrachten en impulsen heffen elkaar op, zodat de component van de zwaartekracht in de stromingsrichting gelijk is aan de wrijvingskracht

$$G_i = (\rho g S_y dl)_i = \tau P_y dl \quad (6.46)$$

met  $P_y$  de perimeter en  $S_y$  de grootte van de dwarse sectie van de vloeistof op een afstand  $y$  van de bedding. Hieruit volgt

$$\tau = \rho g i S_y / P_y = \rho g i r_h \quad (6.47)$$

met  $r_h = S_y / P_y$  de hydraulische straal van de vloeistof op een afstand  $y$  van de bedding. De maximale schuifspanning komt voor in de bedding voor  $y = 0$

$$\tau_{\max} = \rho g R_h i \quad (6.48)$$

met  $R_h$  de hydraulische straal van de ganse stroomsectie. De schuifspanning kan dan ook geschreven worden als

$$\tau = \frac{r_h}{R_h} \tau_{\max} \quad (6.49)$$

Het krachtenevenwicht is identiek met wat we gezien hebben in paragraaf 5.5; opnieuw doet het er niet toe of de stroming laminair of turbulent is. Maar nu onderzoeken we hoe de schuifspanning overgebracht wordt door de turbulente stroming. De vergelijking van Prandtl is

$$\tau = \rho l^2 \left( \frac{dv}{dy} \right)^2 \quad (6.50)$$

met  $y$  de afstand vanaf de wand van de bedding. De menglengte  $l$  is nu ook afhankelijk van de afstand tot vrij oppervlak, zodat volgens von Karman

$$l = \kappa y \sqrt{r_h / R_h} \quad (6.51)$$

Hieruit volgt

$$\tau = \rho \kappa^2 y^2 \frac{r_h}{R_h} \left( \frac{dv}{dy} \right)^2 \quad (6.52)$$

We vervangen nu  $\tau$  door de waarde gegeven door vergelijking 6.49

$$\frac{r_h}{R_h} \tau_{\max} = \rho \kappa^2 y^2 \frac{r_h}{R_h} \left( \frac{dv}{dy} \right)^2 \quad (6.53)$$

en lossen op naar  $dv/dy$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau_{\max}}{\rho}} = \frac{v_*}{\kappa y} \quad (6.54)$$

Integratie geeft

$$v = \frac{v_*}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \quad (6.55)$$

Het snelheidsprofiel is opnieuw logaritmisches, zoals schematisch voorgesteld in Fig. 6.10. De maximale snelheid komt voor aan het vrij oppervlak zo ver mogelijk verwijderd van de wand; bij benadering is dit voor  $y = R_h$ , zodat  $v_{\max}$  gegeven wordt door

$$v_{\max} = \frac{v_*}{\kappa} \ln\left(\frac{R_h}{y_0}\right) \quad (6.56)$$

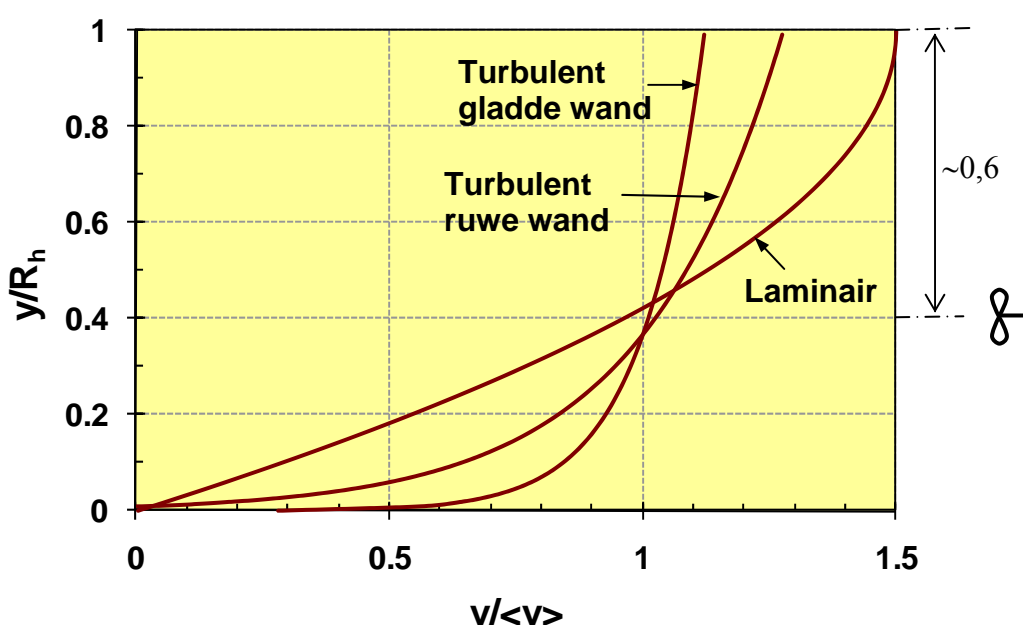


Fig.6.10 Turbulent snelheidsprofiel bij stroming met een vrij oppervlak.

Merk op dat de stroomsnelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op een relatieve hoogte van ongeveer 0.4; dit kan men in de praktijk gebruiken om het debiet te bepalen in een rivier door op verschillende plaatsen langs een dwarse sectie de waterhoogte te meten en de stroomsnelheid op een relatieve diepte van 0,6 met behulp van bijvoorbeeld een geijkte propeller (Fig. 6.10). De gemiddelde snelheid kan men ook berekenen door de snelheid te integreren over een dwarse sectie, waarbij we geen rekening houden met de snelheden juist aan de wand omdat deze toch geen significante bijdrage leveren tot het debiet

$$\langle v \rangle = \frac{1}{R_h} \int_{y_0}^{R_h} v dy = \frac{v_*}{\kappa R_h} \int_{y_0}^{R_h} \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) dy \quad (6.57)$$

De integraal kan uitgewerkt worden als volgt

$$\int_{y_0}^{R_h} \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) dy = y_0 \int_1^{R_h/y_0} \ln \lambda d\lambda = y_0 [\lambda(\ln \lambda - 1)]_1^{R_h/y_0} = y_0 \left[ \frac{R_h}{y_0} \left( \ln \frac{R_h}{y_0} - 1 \right) + 1 \right]$$

$$\approx R_h [\ln(R_h/y_0) - 1] \quad (6.58)$$

waaruit volgt

$$\langle v \rangle = \frac{v_*}{\kappa} [\ln(R_h/y_0)] = \frac{v_*}{\kappa} \ln\left(\frac{R_h}{y_0 e}\right) \quad (6.59)$$

Vervangen we de schuifsnelheid door de schuifspanning, dan geeft dit

$$\langle v \rangle = \frac{\sqrt{\tau_{\max}/\rho}}{\kappa} \ln\left(\frac{R_h}{y_0 e}\right) = \frac{\sqrt{g R_h i}}{\kappa} \ln\left(\frac{R_h}{y_0 e}\right) \quad (6.60)$$

hetgeen ook geschreven kan worden als

$$\langle v \rangle = C \sqrt{R_h i} \quad (6.61)$$

Waaruit het debiet bekomen wordt als

$$Q = CS \sqrt{R_h i} \quad (6.62)$$

Dit is de formule van Chézy, welke stelt dat het debiet, in bijvoorbeeld een rivier of een kanaal, evenredig is met de grootte van de dwarse sectie en de wortel van de hydraulische straal maal de helling van het vrij oppervlak. De evenredigheidscoëfficiënt  $C$  wordt de coëfficiënt van Chézy genoemd, en heeft dimensies  $[L^{1/2}/T]$  en gebruikelijke eenheden  $m^{1/2}/s$ . De Chézy-coëfficiënt is afhankelijk van de ruwheid van de bedding en van het Reynoldsgetal. De waarde kan proefondervindelijk bepaald worden, maar wordt in de praktijk dikwijls geschat of afgelezen uit tabellen.

Uitgaande van vergelijkingen 6.60 en 6.61 kan men  $C$  ook berekenen op volgende wijze

$$C = \frac{\sqrt{g}}{\kappa} \ln\left(\frac{R_h}{y_0 e}\right) = -\frac{\sqrt{g}}{\kappa} \ln\left(\frac{y_0 e}{R_h}\right) \quad (6.63)$$

Substitueren we hierin vergelijking 6.19 voor  $y_0$ , dan volgt

$$C = -\frac{\sqrt{g}}{\kappa} \ln\left(\frac{ve}{10v^* R_h} + \frac{\epsilon e}{33R_h}\right) \quad (6.64)$$

De schuifsnelheid kan omgerekend worden naar de gemiddelde snelheid door gebruik te maken van vergelijking 6.59, zodat

$$C = -\frac{\sqrt{g}}{\kappa} \ln\left(\frac{veC}{10\sqrt{g} \langle v \rangle R_h} + \frac{\epsilon e}{33R_h}\right) \quad (6.65)$$

Gaan we over tot de tiendelige logaritme en rekenen alle termen uit waarbij we de resultaten

afronden dan volgt

$$C(\sqrt{m}/s) \approx -18 \log \left( \frac{C}{11Re_h} + \frac{\varepsilon}{12R_h} \right) \quad (6.66)$$

Deze formule laat toe om de Chézy-coëfficiënt op een iteratieve wijze te schatten in functie van het Reynoldsgetal  $Re_h$  (gebaseerd op de hydraulische straal) en de relatieve ruwheid  $\varepsilon/R_h$  van de bedding. Opgelet, in deze vergelijking zijn de dimensies van belang, omdat  $C$  uitgedrukt wordt in  $m^{1/2}/s$  (anders verandert de coëfficiënt voor de logaritme). Met behulp van  $C$  en vergelijking 6.62 kan men dan het debiet berekenen indien de helling of het verval, de hydraulische straal en de dwarsdoorsnede gekend zijn. Om de berekeningen van de Chézy-coëfficiënt te vereenvoudigen kan men gebruik maken van een grafische weergave van vergelijking 6.66, waarbij  $C$  wordt weergegeven in functie van het Reynoldsgetal en de relatieve ruwheid van de bedding (Fig. 6.11). Gebruikelijke waarden voor de Chézy-coëfficiënt variëren tussen 40 en 70  $m^{1/2}/s$ .

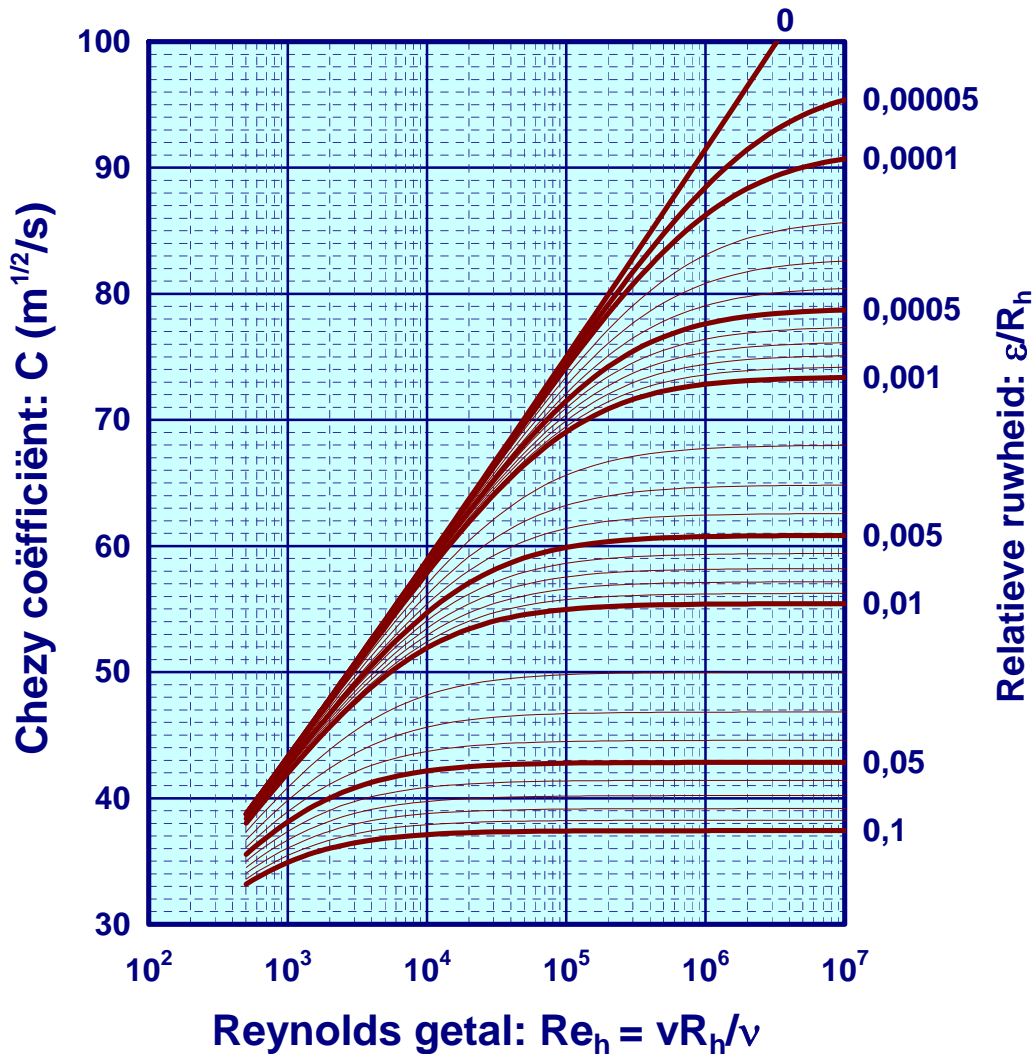


Fig. 6.11 De coëfficiënt van Chézy in functie van de relatieve ruwheid en het getal van Reynolds.

Meestal is bij stroming in rivieren en kanalen de snelheid in orde van grootte 1 m/s en de hydraulische straal 1 m of meer, zodat  $Re_h$  in orde van grootte  $10^6$  of meer bedraagt. De bedding wordt dan door de stroming als ruw ervaren, waardoor er geen invloed is van een laminaire grenslaag, zodat de formule vereenvoudigd wordt tot

$$C(\sqrt{m}/s) \approx 18 \log(12R_h/\varepsilon) \quad (6.67)$$

Voor gebruikelijke waarden van de Chézy-coëfficiënt tussen 40 en 70  $m^{1/2}/s$  kan dit verder vereenvoudigd worden tot de formule van Strickler (Fig. 6.12)

$$C(\sqrt{m}/s) \approx 25(R_h/\varepsilon)^{1/6} \quad (6.68)$$

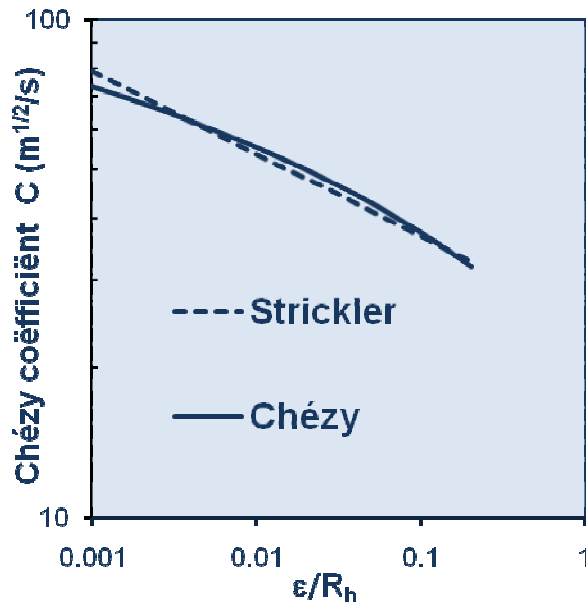


Fig. 6.12 De formules van Chézy en Strickler.

## 6.6 De vergelijking van Manning

Een vereenvoudigde methode om turbulente stroming te berekenen is deze van Manning. In navolging van de formule van Strickler, waarbij voor gebruikelijke parameterwaarden  $C$  bij benadering evenredig is met  $R_h^{1/6}$ , baseerde Manning zich om vergelijking 6.62 als volgt te schrijven

$$Q \approx \frac{1}{n} S R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (6.69)$$

met  $n$  een parameter die alleen afhankelijk is van de ruwheid van de wand of de bedding. We noemen dit nu de coëfficiënt van Manning. De dimensies van  $n$  zijn nogal eigenaardig, namelijk  $[T/L^{1/3}]$  met als gebruikelijke eenheden  $s/m^{1/3}$ . Vergelijken we de verschillende formules dan komen we tot volgend verband tussen de coëfficiënten



$$n = \frac{\varepsilon^{1/6}}{25} \approx \frac{R_h^{1/6}}{C} \quad (6.70)$$

waarbij alle coëfficiënten uitgedrukt worden in eenheden meter en seconde. Het eenvoudige van deze methode is dat  $n$  constant is voor een bepaald type van materiaal, zodat eens de waarde van de Manning-coëfficiënt voor een bepaald materiaal proefondervindelijk bepaald is geworden er geen verdere berekeningen meer nodig zijn. De vergelijking van Manning wordt in de praktijk veel gebruikt voor allerlei types van turbulente stromingen, dus ook voor turbulente stroming in buizen, voornamelijk in de VS (voor buizen moet de helling  $i$  in vergelijking 6.69 wel vervangen worden door het ladingsverlies  $J$ , maar blijft de hydraulische straal behouden zoals in formule 6.69). In Europa wordt de voorkeur gegeven aan de formules van Darcy-Weisbach voor stroming in buizen en Chezy voor stroming in kanalen of rivieren, daar ze vanuit theoretisch standpunt een duidelijke interpretatie toelaten. Echter in de praktijk wordt de methode van Manning ook veel gebruikt.



*De 'Pont du Gard' is een Romeinse aquaduct, gebouwd in de 1<sup>e</sup> eeuw voor de watervoorziening van de stad Nimes in de Provence, Frankrijk. De lengte van de aquaduct is 360 m en de dwarse sectie voor de waterstroming is 1,2 m breed en maximaal 1,2 m hoog. De helling van de aquaduct bedraagt  $2,5 \cdot 10^{-4}$ . Veronderstellen we een coëfficiënt van Manning van  $0,015 \text{ s/m}^{1/3}$  (baksteen) dan volgt uit de vergelijking van Manning dat het maximum debiet van de aquaduct  $0,82 \text{ m}^3/\text{s}$  bedraagt.*

Typische waarden voor de coëfficiënt van Manning worden gegeven in Tabel 6.5. Er bestaan ook foto boeken van waterlopen of kanalen met vermelding van de overeenkomstige waarden van de Manning-coëfficiënt.

Tabel. 6.5 Typische waarden van de Manning-coëfficiënt.

<b>Materiaal</b>	<b>n (s/m<sup>1/3</sup>)</b>
Buizen:	
koper	0,006
glas	0,010
staal	0,011
glad beton	0,013
gietijzer	0,015
ruw beton	0,020
Kanalen:	
cement	0,011
glad beton	0,013
ruw beton	0,015
baksteen	0,015
asfalt	0,016
aarde	0,020
keien	0,030
rotsblokken	0,040
Waterlopen:	
recht	0,03
meanderend	0,04
begroeid	0,05
overwoekerd	0,10
Landoppervlak:	
weiland	0,03
braakland	0,03
akkers	0,04
struikgewas	0,05
bos	0,10

## 7 LEIDINGEN EN AFVOERKANALEN

---

### 7.1 Dimensionering van een leiding

Veronderstel dat er een leiding moet aangelegd worden tussen twee punten. In het eerste punt bedraagt de energiehoogte  $e_1$  en in het tweede punt  $e_2$ , zodat er een energieverval is, gegeven door  $\Delta e = e_2 - e_1$ . Dit verschil zal bij permanente stroming gelijk zijn (op het teken na) aan de ladingsverliezen die optreden in de leiding. Deze verliezen bestaan uit wrijvingsverliezen in de verschillende buizen van de leiding en speciale verliezen in bijzondere secties, zoals bochten, verbredingen, enz. De wrijvingsverliezen in de buizen worden berekend met de formule van Darcy-Weisbach en de speciale verliezen worden uitgedrukt in functie van de kinetische energiehoogte. Het totaal ladingsverlies wordt dan bekomen door de som te maken over alle buizen en bijzondere secties

$$\Delta e = -\sum_i f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{v_i^2}{2g} - \sum_j k_j \frac{v_j^2}{2g} \quad (7.1)$$

waarbij  $v$  de gemiddelde snelheid voorstelt. Met behulp van de formule van Castelli kan de gemiddelde snelheid uitgedrukt worden in functie van het debiet, zodat bovenstaande vergelijking ook geschreven kan worden als

$$\Delta e = -\frac{8}{\pi^2 g} \left( \sum_i \frac{f_i L_i}{D_i^5} + \sum_j \frac{k_j}{D_j^4} \right) Q^2 = -wQ^2 \quad (7.2)$$

met  $w$  de totale weerstand van de leiding. Indien er niet op voorhand geweten is welke energiehoogte de grootste is zodat ook de zin van de stroming niet gekend is, kan deze vergelijking beter als volgt geschreven worden

$$\Delta e = -w|Q|Q \quad (7.3)$$

zodat de positieve zin van de stroming overeenkomt met een daling van de energie van de vloeistof. We noemen dit de stromingsvergelijking van een leiding.

Deze vergelijking kan op verschillende wijzen gebruikt worden. Indien bijvoorbeeld het ladingsverlies gekend is evenals de verschillende afmetingen van de buizen en de karakteristieken van de verschillende speciale secties, dan kan men hiermee het debiet berekenen. Is daarentegen het energieverlies gegeven en wordt er gevraagd om een bepaald debiet te verzekeren, dan kan men met deze vergelijking de nodige leiding dimensioneren.

Echter bij een ontwerp van een leiding is meestal alleen het gewenste debiet gegeven en wordt er gevraagd om de leiding te dimensioneren alsook de benodigde energie te bepalen om dit debiet te verzekeren. Het probleem is dan onbepaald; immers voor eender welke leiding kan men het gewenste debiet bekomen indien men de nodige energie voorziet. De vraag is echter wat de meest optimale oplossing is. Om dit te beantwoorden zijn er bijkomende voorwaarden nodig. Het probleem wordt bijvoorbeeld oplosbaar indien men de economisch meest rendabele oplossing zoekt, door de kostprijs van de leiding in rekening te brengen, alsook de

energiekosten tijdens de werking en de verwachte opbrengst, waarbij de netto opbrengst geoptimaliseerd wordt. Dergelijke beschouwingen vallen echter buiten het onderwerp van deze cursus. In de praktijk blijkt dat meestal een goede oplossing bekomen wordt, wanneer men een goede ontwerpwaarde kiest voor de gemiddelde snelheid. Voor water bedraagt deze ongeveer 0,6 m/s. Deze snelheid blijkt in de praktijk een goed compromis te geven tussen energieverliezen en economische dimensies van de leiding. Uitgaande van deze ontwerpssnelheid en het gewenste debiet kan men dan de afmetingen van de buizen bepalen, waarna men de energieverliezen kan berekenen, zodat het probleem volledig opgelost is.

## 7.2 Dimensionering van een pomp

Dikwijls is er niet voldoende energieverval ter beschikking om een bepaald debiet te verwezenlijken in een leiding. In zulk geval zal men energie moeten toevoegen, hetgeen kan gebeuren door een pomp in te schakelen. Men moet dan het nodige vermogen van de pomp bepalen. In hoofdstuk 4 werd reeds het verband gegeven tussen de energie en het vermogen van een vloeistofstroom. Hieruit volgt dat om een toename in de lading van een vloeistofstroom te bekomen ter waarde van  $H$ , de pomp een vermogen  $P$  moet leveren gegeven door

$$P = \rho g Q H / \eta \quad (7.4)$$

met  $\eta$  het rendement van de pomp.  $H$  wordt de opvoerhoogte genoemd van de pomp. Het verband tussen het debiet en de opvoerhoogte van een pomp noemt men de pompkarakteristiek.

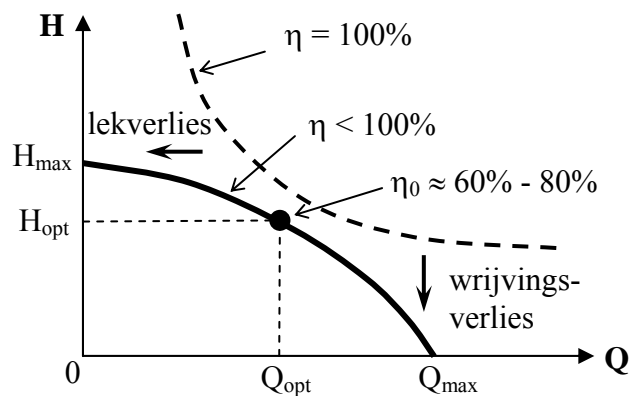
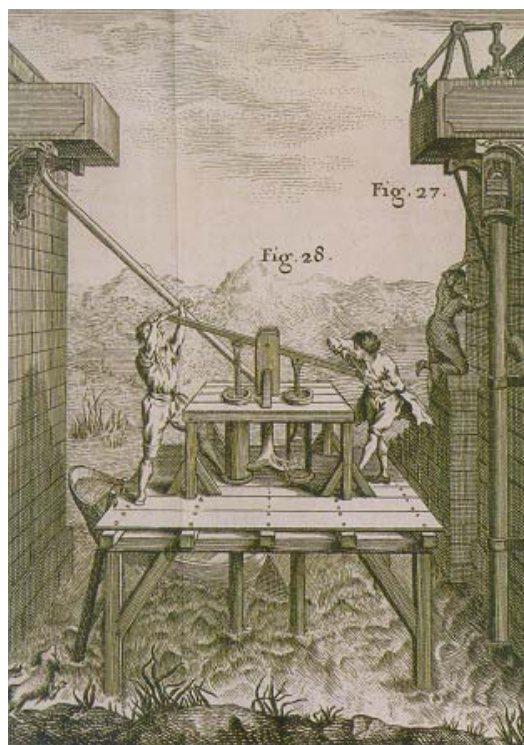


Fig. 7.1 Een pompkarakteristiek.

Uit bovenstaande vergelijking zou men kunnen afleiden dat voor een pomp met een bepaald vermogen, het debiet omgekeerd evenredig is met de opvoerhoogte, zoals weergegeven door de stippenlijn in Fig. 7.1. Dit blijkt echter niet zo te zijn in de praktijk omdat het rendement van een pomp afhankelijk is van de opvoerhoogte en het debiet. Bij een te groot debiet gaat er veel energie verloren in de pomp door wrijvingsverliezen, terwijl bij een te hoge opvoerhoogte er inwendig lekverlies optreedt (terugstroming doorheen de pomp wegens het te groot drukverschil tussen de in- en uitgang van de pomp). De werkelijke pompkarakteristiek

is dan eerder zoals weergegeven door de volle lijn in Fig. 7.1, waarbij er slechts een bepaald maximum debiet en maximum opvoerhoogte mogelijk zijn afhankelijk van het vermogen en het rendement van de pomp. Bovendien is er slechts een beperkt bereik met een optimaal debiet  $Q_{opt}$  en optimale opvoerhoogte  $H_{opt}$ , waarbij de pomp functioneert met een goed rendement. Dit rendement bedraagt in de praktijk 60% tot 80%. Het is uiteraard aangewezen om een pomp bij voorkeur te laten werken in dit bereik. Pompkarakteristieken zijn afhankelijk van het vermogen en het type van de pomp. Er zijn pompen die ontworpen worden om een groot debiet te leveren, zoals centrifugaalpompen, en pompen waarmee hoge opvoerhoogtes kunnen bekomen worden, zoals zuigerpompen. De constructeur levert voor elke pomp een pompkarakteristiek en de ontwerper moet zijn pomp zodanig kiezen dat een optimale werking verzekerd is.



*Illustratie van een brandbluspomp  
gepubliceerd door J.A. Nolet in 1746*

De invloed van een pomp in een leiding wordt weergegeven in Fig. 7.2a. De lading van de vloeistof wordt door de pomp verhoogd met een opvoerhoogte  $H$ , zodat er meer energie ter beschikking komt om de stroming te verwezenlijken.

Afhankelijk van de situatie kan het ook voorkomen dat een pomp hoger geplaatst wordt dan de energiehogte van de vloeistof aan de ingang van de pomp, zodat een gedeelte van de opvoerhoogte bestaat uit een aanzuighoogte  $H_a$ . Dergelijke situatie verdient enige speciale aandacht want er stellen zich hierbij twee problemen. Een eerste probleem is dat bij het in werking treden van de pomp het niveau van de vloeistof in de aanzuigleiding lager staat dan de pomp. De leiding zal dan eerst met water gevuld moeten worden, ofwel moet de pomp in staat zijn om een vacuüm te creëren waardoor de vloeistof aangezogen wordt. Niet alle pompen zijn hiervoor geschikt. Bovendien kan men geen groter vacuüm creëren dan 1 atm,

wat overeenkomt met ongeveer 10 m waterhoogte, maar omdat er meestal ook nog lucht in het water opgelost zit, is het in de praktijk niet mogelijk om water aan te zuigen over een hoogte van meer dan ongeveer 6 tot 7 m.

Een tweede probleem stelt zich tijdens de werking, omdat door de negatieve druk de vloeistof kan gaan koken - dit noemt men cavitatie (holtevorming) - waarbij gasbellen gevormd worden in de pomp, die aan de uitgang van de pomp imploderen (omdat de druk er terug positief is), wat gepaard gaat met zeer veel lawaai en zeer schadelijk is voor de pomp en de leiding. Cavitatie moet dus vermeden worden.

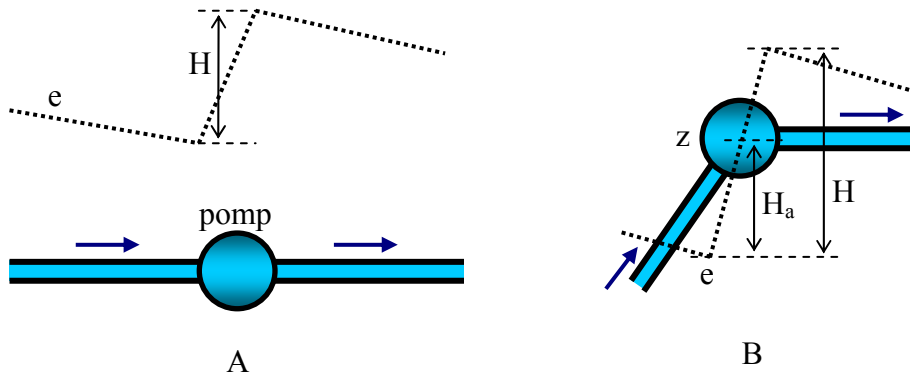


Fig. 7.2 Toegevoegde lading aan een leiding d.m.v. een pomp: (a) gebruikelijke situatie met een opvoerhoogte H en (b) met een aanzuighoogte  $H_a$ .

De druk in de pomp kan berekend worden uitgaande van de aanzuighoogte

$$H_a = z - e = z - \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{p}{\rho g} - \frac{v^2}{2g} \quad (7.5)$$

waaruit volgt

$$p = -\rho g \left( H_a + \frac{v^2}{2g} \right) \quad (7.6)$$

De relatieve druk is dus negatief, zodat de absolute druk kleiner is dan de atmosferedruk. Als de absolute druk te laag wordt kan de vloeistof spontaan gaan koken waardoor er cavitatie optreedt. Om dit te vermijden mag de druk in absolute waarde niet groter zijn dan de atmosferedruk; eigenlijk zelfs nog iets minder omdat vloeistoffen altijd al een beetje koken afhankelijk van de temperatuur. Dit laatste wordt weergegeven door de zogenaamde dampdruk, welke functie is van de temperatuur. Aldus is volgende voorwaarde van toepassing om cavitatie te vermijden

$$p > -(p_{atm} - p_d) \quad (7.7)$$

met  $p_d$  de dampdruk, waarvoor in geval van water de waarden worden gegeven in functie van de temperatuur in Tabel 7.1. Uitwerking van deze voorwaarde met vergelijking 7.6 geeft

$$H_a < \frac{p_{atm} - p_d}{\rho g} - \frac{v^2}{2g} \quad (7.8)$$

hetgeen een bovengrens stelt aan de aanzuighoogte. De laatste term in de vergelijking, de kinetische energiehoopte, is moeilijk exact te bepalen in de pomp zelf. Daarom wordt deze term meestal uitgedrukt als een fractie van de totale opvoerhoogte van de pomp, zodat de vergelijking wordt

$$H_a < \frac{P_{atm} - P_d}{\rho g} - cH \quad (7.9)$$

met c een parameter, die opgemeten wordt door de constructeur van de pomp. In de praktijk zal men er dus moeten op toezien dat aan bovenstaande ongelijkheid voldaan wordt om cavitatie te vermijden.

Tabel 7.1 Waarden voor de dampdruk van water in functie van de temperatuur.

Temperatuur T (°C)	Dampdruk	
	P <sub>d</sub> (kPa)	P <sub>d</sub> /ρg (m)
0	0,61	0,06
10	1,23	0,13
20	2,34	0,24
30	4,24	0,43
40	7,38	0,75
50	12,3	1,26
60	19,9	2,03
70	31,2	3,18
80	47,4	4,85
90	70,1	7,16
100	101,3	10,34

### 7.3 Leidingsnetwerken

Er bestaan verschillende rekenregels, die toelaten om netwerken te dimensioneren. We beschouwen eerst het geval van leidingen in serie (Fig. 7.3a). Dit is eigenlijk triviaal; vermits het debiet hetzelfde is wordt de totale weerstand gegeven door de som van de weerstanden van elke leiding

$$\Delta e = \sum_i \Delta e_i = -\sum_i w_i Q_i^2 = -\left(\sum_i w_i\right) Q^2 = -wQ^2 \quad (7.10)$$

Men verkrijgt dus een equivalente leiding met dezelfde totale weerstand,  $w = \sum w_i$ . Het volgende geval betreft leidingen in parallel (Fig. 7.3b). In dit geval is het energieverlies in elke leiding hetzelfde en wordt het totaal debiet bekomen door de som te maken van het debiet in elke leiding

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i \sqrt{\frac{-\Delta e}{w_i}} \quad (7.11)$$

waaruit ook volgt

$$\sqrt{\frac{-\Delta e}{w}} = \sum_i \sqrt{\frac{-\Delta e}{w_i}} \quad (7.12)$$

zodat

$$w = \frac{1}{\left( \sum_i \frac{1}{\sqrt{w_i}} \right)^2} \quad (7.13)$$

Opnieuw kan het probleem gereduceerd worden tot een equivalente leiding met dezelfde totale weerstand, gegeven door vergelijking 7.13.

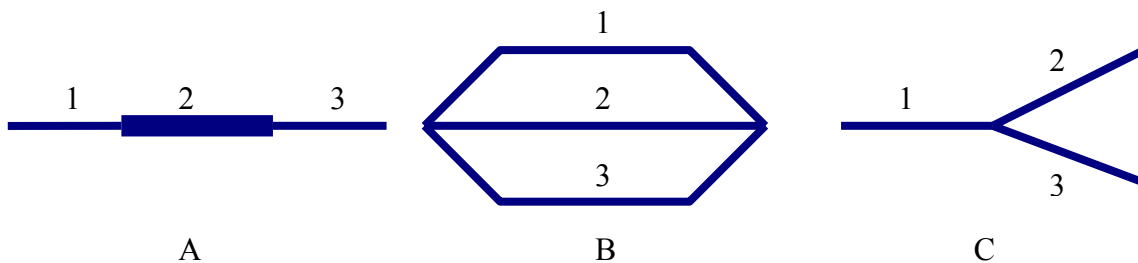


Fig. 7.3 Leidingen in serie (a), in parallel (b), en een vertakking (c).

Het derde geval betreft een vertakking (Fig. 7.3c). In elke leiding moet het debiet bepaald worden, echter de energiehoogte in het knooppunt is niet vooraf gekend. Er is een bijkomende betrekking nodig om het probleem op te lossen. Dit is de continuïteitsvergelijking in het knooppunt, welke stelt dat de som van de debieten, rekening houdend met de zin van de stroming, gelijk moet zijn aan nul

$$\sum Q_i = 0 \quad (7.14)$$

Het probleem van de vertakking kan nu opgelost worden door de waarde van de energiehoogte in het knooppunt te bepalen, waarvoor er stromingen in de leidingen ontstaan die voldoen aan de continuïteitsvoorwaarde. Omdat het probleem niet-lineair is moet de oplossing iteratief gevonden worden met bijvoorbeeld de methode van Newton (om het nulpunt van een functie  $f(x)$  te vinden kan men een benaderde  $x$ -waarde verbeteren met  $\Delta x = -f/f'$ ). Dit wordt de verheffingsmethode genoemd; praktisch gaat men als volgt te werk:

- kies een waarde voor de energiehoogte in het knooppunt, begrepen tussen de hoogste en laagste waarde van de energiehoogtes aan het uiteinde van de leidingen;
- bepaal voor elke leiding het energieverval en bereken het debiet  $Q_i$  in elke leiding, met de conventie dat voor stromingen naar het knooppunt toe het debiet positief is;
- verbeter de energiehoogte in het knooppunt door iteratie met de methode van Newton tot er convergentie optreedt



$$\Delta e = 2 \sum Q_i / \sum \frac{1}{w_i |Q_i|} \quad (7.15)$$

We beschouwen nu meer ingewikkelde netwerken. Er bestaan twee soorten netwerken:

- 1) Open netwerken zijn vertakte netwerken waarin geen gesloten lussen voorkomen, zoals bijvoorbeeld weergegeven in Fig. 7.4a.
- 2) Gemaasde netwerken waarin gesloten lussen voorkomen, zogenaamde mazen, zoals bijvoorbeeld weergegeven in Fig. 7.4b.

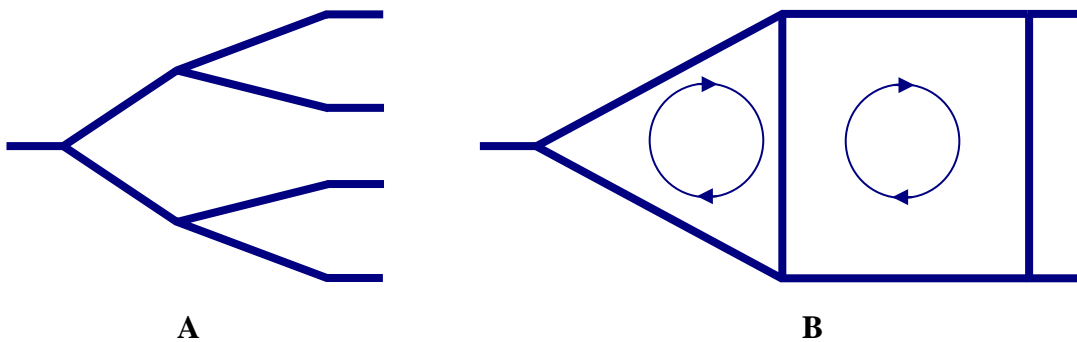


Fig. 7.4 Voorbeelden van netwerken: (a) open netwerk, en (b) gemaasd netwerk.

De dimensionering van een open netwerk is niet moeilijk. Immers indien het gewenste debiet aan elke in- en uitgang van het netwerk gegeven is, kan men met behulp van de continuïteitsvergelijking het debiet bepalen in elke tak van het netwerk. Met een ontwerpsnelheid kan men daarna elke leiding dimensioneren. Tenslotte kan men met de stromingsvergelijking het energieverlies in elke leiding berekenen en kan er nagegaan worden of er pompen voorzien moeten worden. Indien daarentegen de energiehogtes aan de in- en uitgang van een bestaand open netwerk gegeven zijn en er gevraagd wordt het debiet te bepalen, dan kan men iteratief met behulp van de verheffingsmethode achtereenvolgens de energiehogtes in elk knooppunt bepalen met behulp van vergelijking 7.15 (zonder iteratie) en daarna het debiet in elke leiding.

Moeilijker is het geval van een gemaasde netwerk. Dit is geen echt dimensioneringsprobleem; men heeft immers geen gemaasd netwerk nodig om bepaalde volumes te transporteren. Echter in de praktijk worden er wel gemaasde netwerken gebruikt wegens hun flexibiliteit om vloeistoffen te transporteren in verschillende richtingen. Veronderstel dat er voor een bestaand gemaasd netwerk gevraagd wordt om de debieten en de energieverdeling in het netwerk te bepalen. Theoretisch is dergelijk probleem oplosbaar, omdat het aantal onbekenden, zijnde het debiet in elke tak van het netwerk en de energiehogte in elk knooppunt van het netwerk exact gelijk is aan het aantal vergelijkingen, namelijk voor elke leiding geldt

$$\Delta e_i = -w_i |Q_i| Q_i \quad (7.16)$$

en voor elk knooppunt

$$\sum Q_i = 0 \quad (7.17)$$

Dit vormt een stelsel van evenveel vergelijkingen als onbekenden wat theoretisch oplosbaar is. Een probleem is evenwel dat de relatie tussen het energieverlies en het debiet niet lineair is, zodat het geen lineair stelsel betreft en de oplossing dus niet eenvoudig te bekomen is. Een eerste oplossingsmethode, bestaat erin om de stromingsvergelijking te lineariseren. Kies voor elke tak van het netwerk een debiet  $Q_i$  dat voldoet aan de continuïteit in de knooppunten. De stromingsvergelijkingen kunnen dan benaderd worden door

$$\Delta e_i = -w|Q'_i|Q_i \quad (7.18)$$

Het stelsel van vergelijkingen wordt hierdoor lineair en kan opgelost worden door matrix-inversie. Dit geeft betere waarden voor elk debiet, waarna men de methode herhaalt tot er convergentie optreedt.

Er bestaat ook nog een meer eenvoudige iteratieve oplossingstechniek, namelijk de methode van Cross, als volgt:

- kies mazen in het netwerk, zodat elke leiding minstens één maal voorkomt in een maas (de keuze is vrij, doch het is aanbevolen dat elke leiding niet meer dan in twee mazen voorkomt);
- kies een positieve omloopzin in elke maas, zoals bijvoorbeeld weergeven in Fig. 7.4b;
- indien men elke maas doorloopt en de som maakt van de energiever verschillen van elke leiding van de maas, dan moet dit gelijk zijn aan nul (men komt immers terug in hetzelfde beginpunt);

$$\sum \Delta e_i = 0 \quad (7.19)$$

- kies nu voor elke tak  $i$  van het netwerk een debiet  $Q_i$  dat voldoet aan de continuïteit in de knooppunten; merk op dat er dan in elke maas nog een onbekend debiet  $\Delta Q$  kan zijn dat compatibel is met de continuïteitsvoorwaarden;
- bereken in elke maas de waarde van  $\Delta Q$ , welke voldoet aan vergelijking 7.19; omdat deze vergelijking niet-lineair is gebruiken we hiervoor de methode van Newton (zonder iteratie);

$$\Delta Q = \frac{\sum \Delta e_i}{2 \sum w_i |Q_i|} \quad (7.20)$$

- verbeter in elke leiding van de maas het debiet met de waarde  $\Delta Q$ , waarbij men rekening houdt met de gekozen omloopzin van de maas (d.w.z.  $\Delta Q$  stroomt volgens de omloopzin indien de waarde positief is en omgekeerd indien negatief);
- bereken nieuwe waarden voor de energiehogtes in elk knooppunt en herbereken in elke maas  $\Delta Q$  tot er convergentie optreedt.

Het blijkt dat afhankelijk van de complexiteit van het netwerk, men meestal vrij snel tot de juiste oplossing komt.

## 7.4 Afvoerkanalen

Voor het dimensioneren van afvoerkanalen beschikken we over de vergelijking van Chézy

$$Q = CS\sqrt{R_h i} \quad (7.21)$$

Er zijn meestal geen speciale verliezen in een afvoerkanaal, immers om overstromingen te vermijden mogen er geen abrupte veranderingen voorkomen. Dus alleen de vergelijking van Chézy is van belang bij de dimensionering. Bovendien zijn er veel minder mogelijkheden dan in geval van leidingen, omdat de helling meestal vast ligt door de gesteldheid van het terrein. Ook de Chézy-coëfficiënt ligt meestal vast, omdat het afvoersysteem gebouwd zal worden met de ter beschikking zijnde materialen, afhankelijk van de uitvoeringsmogelijkheden en de kostprijs. Aldus moet men meestal alleen maar de geometrische kenmerken van het kanaal bepalen.

Uit vergelijking 7.21 volgt dat om een bepaald debiet af te voeren met een gegeven helling en een bepaalde Chézy-coëfficiënt, de vorm van de doorsnede van het kanaal zodanig gekozen moet worden dat voldaan wordt aan volgende betrekking

$$S\sqrt{R_h} = \frac{Q}{C\sqrt{i}} \quad (7.22)$$

De vraag stelt zich wat dan de meest efficiënte doorsnede is, die voldoet aan deze vergelijking. Vanuit hydraulisch standpunt gezien is de meest efficiënte vorm deze met het kleinste dwarsoppervlak.

De oplossing van vergelijking 7.22 wordt dus bekomen door de doorsnede met een zodanige vorm dat de hydraulische straal per dwarse oppervlakte maximaal is (of de natte perimeter minimaal). Het blijkt dat een halve cirkel de meest efficiënte vorm is. Daarna volgen andere vormen die zo goed mogelijk een halve cirkel benaderen, zoals een halve hexagoon, een rechthoek met een hoogte gelijk aan de helft van de basis (een half vierkant) en een gelijkbenige driehoek met een rechte hoek (ook een half vierkant). Deze doorsneden worden voorgesteld in Fig. 7.5 en de karakteristieken ervan worden gegeven in Tabel 7.2. In de praktijk moet men echter ook rekening houden met andere voorwaarden, zoals de kostprijs, de stabiliteit en duurzaamheid van de constructie, erosie en sedimentatie, enz., zodat de vorm van de meeste afvoerkanalen meestal sterk afwijkt van de hiervoor besproken ideale doorsneden. Daarom worden er nog enige andere vormen in Tabel 7.2 gegeven, die veel gebruikt worden in de praktijk.

Om de karakteristieken van de hydraulisch meest efficiënte doorsneden te illustreren, beschouwen we een praktisch voorbeeld. Stel dat er een debiet van  $1 \text{ m}^3/\text{s}$  moet afgevoerd worden met een helling van  $1/1000$  en een Chezy-coëfficiënt van  $32 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ . De karakteristieken van de hydraulisch meest efficiënte doorsneden worden gegeven in Tabel 7.3 en de doorsneden zelf worden voorgesteld in Fig. 7.6. Ter vergelijking wordt ook een volle buis beschouwd. Het blijkt dat de bekomen doorsneden eigenlijk niet veel van elkaar verschillen; doch is er een duidelijke rangschikking qua grootte van de doorsnede en grootte van de hydraulische straal. De efficiëntie blijkt ook uit de gemiddelde stroomsnelheid, gegeven in de laatste kolom van Tabel 7.3 (hoe groter de snelheid hoe meer efficiënt). Merk

op dat de halve vierkanten (rechthoek of driehoek) volledig gelijkwaardig zijn. Het is ook duidelijk dat de volle buis hydraulisch het minst efficiënt is. Doch is de efficiëntie niet zo erg veel verschillend en zal in de praktijk de kostprijs van de materialen en de constructie meestal van veel grotere belang zijn dan de hydraulische efficiëntie.

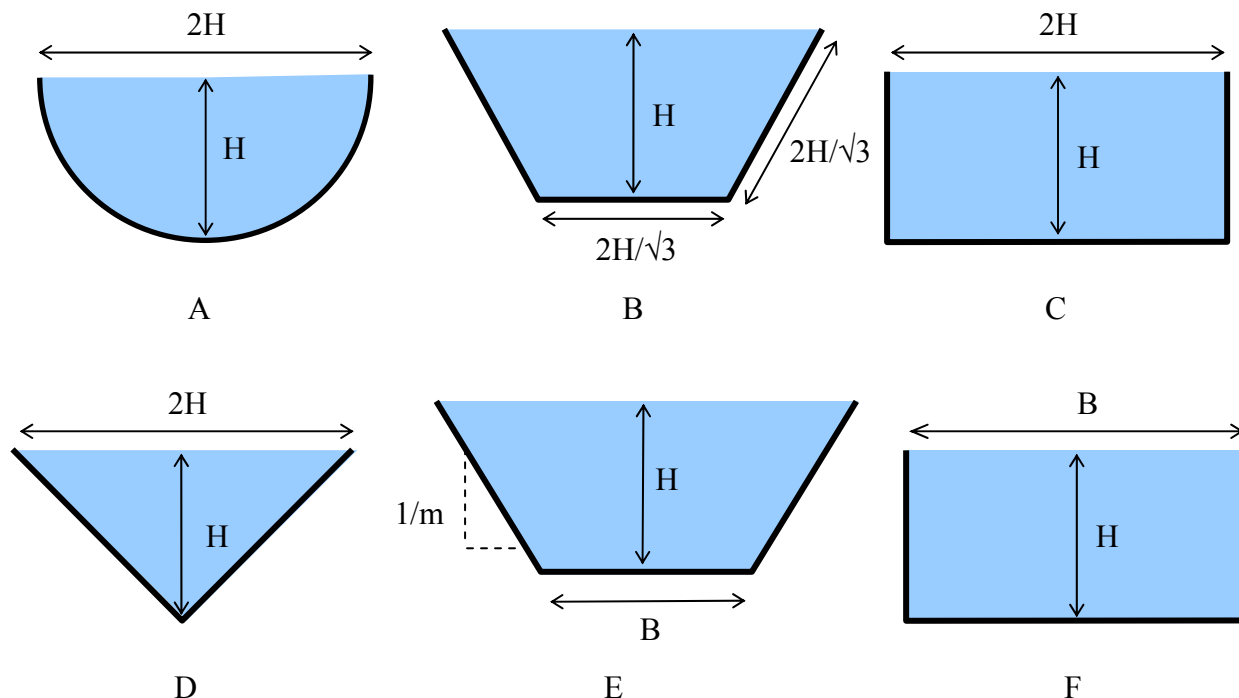


Fig. 7.5 Hydraulisch meest efficiënte doorsnedes: (a) halve cirkel, (b) halve hexagoon, (c) half vierkant, (rechthoek) en (d) half vierkant (driehoek); en doorsnedes gebruikt in de praktijk: (e) trapezium en (f) rechthoek.

Tabel. 7.2 Karakteristieken van de doorsnedes gegeven in Fig. 7.5.

Vorm	S	P	$R_h$	$S\sqrt{R_h}$
Halve cirkel	$\frac{\pi H^2}{2}$	$\pi H$	$\frac{H}{2}$	$\frac{\pi H^{5/2}}{2\sqrt{2}} \approx 1,11 \cdot H^{5/2}$
Halve hexagoon	$\sqrt{3}H^2$	$2\sqrt{3}H$	$\frac{H}{2}$	$\frac{\sqrt{3}H^{5/2}}{\sqrt{2}} \approx 1,12 \cdot H^{5/2}$
Half vierkant, rechthoek	$2H^2$	$4H$	$\frac{H}{2}$	$\sqrt{2}H^{5/2} \approx 1,41 \cdot H^{5/2}$
Half vierkant, driehoek	$H^2$	$2\sqrt{2}H$	$\frac{H}{2\sqrt{2}}$	$\frac{H^{5/2}}{2^{3/4}} \approx 0,59 \cdot H^{5/2}$
Trapezium $n = \sqrt{1 + m^2}$	$(B+mH)H$	$B+2nH$	$\frac{(B+mH)H}{B+2nH}$	$\frac{[(B+mH)H]^{3/2}}{\sqrt{B+2nH}}$
Rechthoek	$BH$	$B+2H$	$\frac{BH}{B+2H}$	$\frac{(BH)^{3/2}}{\sqrt{B+2H}}$

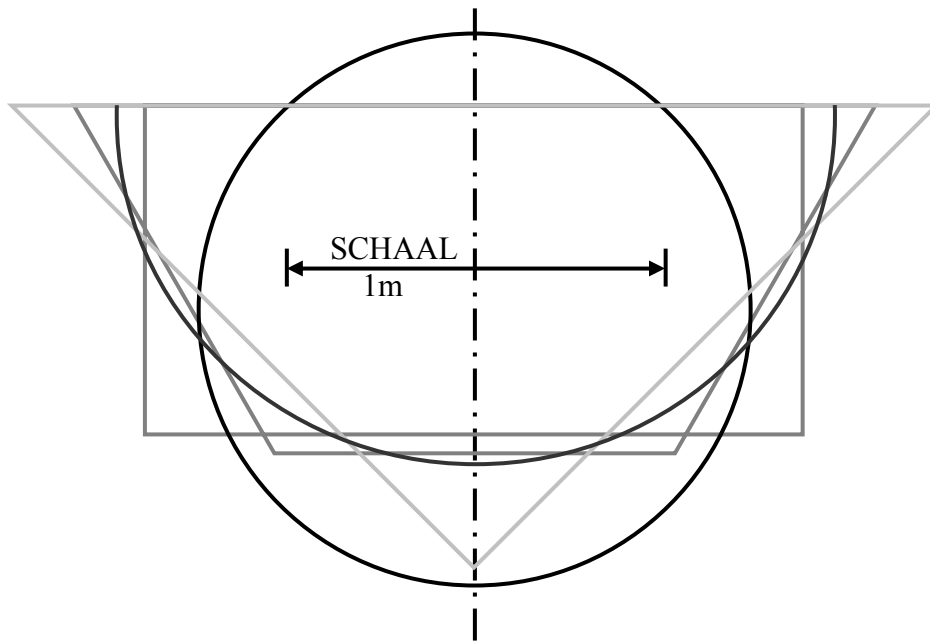


Fig. 7.6 Vorm van de hydraulisch meest efficiënte doorsneden voor het berekeningsvoorbeeld.

Tabel. 7.3 Karakteristieken van de hydraulisch meest efficiënte doorsneden gegeven in Fig. 7.6 voor het berekeningsvoorbeeld.

Vorm	H (m)	S (m <sup>2</sup> )	R <sub>h</sub> (m)	v (m/s)
Halve cirkel	0,95	1,41	0,48	0,70
Halve hexagoon	0,92	1,47	0,46	0,68
Rechthoek	0,87	1,51	0,43	0,66
Driehoek	1,23	1,51	0,43	0,66
Volle buis	1,46	1,67	0,36	0,60

Een laatste beschouwing betreft natuurlijke waterlopen. Deze hebben een vorm die meestal gekenmerkt wordt door een breedte B welke veel groter is dan de gemiddelde waterdiepte H, zodat de doorsnede gelijk is aan BH en de hydraulische straal bij benadering gelijk is aan H. Met elk debiet komt een zekere waterdiepte overeen, wat de evenwichtsdiepte wordt genoemd, en uitgaande van vergelijking 7.22 gegeven is door

$$H = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 C^2 i}} \quad (7.23)$$

Deze formule laat toe om het debiet te schatten aan de hand van de gemiddelde waterdiepte

$$Q = (BC\sqrt{i})H^{3/2} \quad (7.24)$$

Deze vergelijking impliceert ook dat er een verband bestaat tussen het debiet en de waterdiepte. In de praktijk zal men enige metingen verrichten bij verschillend debiet en waterstanden en hiermee een ijkingscurve (Q versus H) opstellen, waarna men elk debiet kan schatten uitgaande van de waterstand. Vergelijking 7.23 laat ook toe om na te gaan hoe men de waterdiepte kan regelen voor bijvoorbeeld de scheepvaart. Soms wordt verkeerdelijk verondersteld dat het volstaat om de bedding uit te baggeren om een grotere waterdiepte te krijgen. Dit blijkt niet juist te zijn, immers het waterpeil zal dalen met dezelfde waarde als waarmee de bedding verlaagd werd (Fig. 7.7).

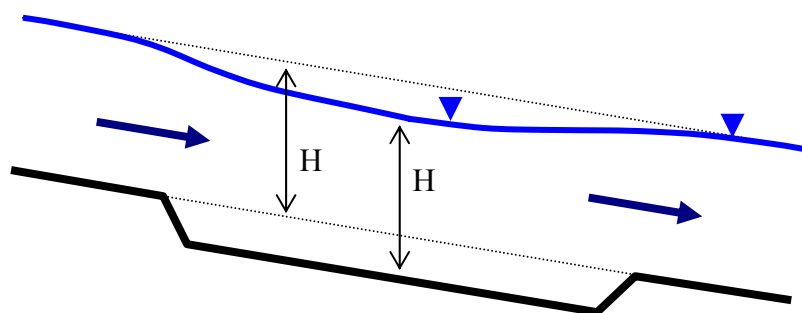


Fig. 7.7 Verlaging van de bedding en daaropvolgende aanpassing van het waterpeil.

Daarentegen volgt uit vergelijking 7.23 dat de waterdiepte kan gecontroleerd worden door de breedte van de waterloop aan te passen, vermits met een bepaalde waterdiepte een zekere breedte overeenkomt. Dit wordt de normaalbreedte genoemd en deze is gegeven door

$$B = \frac{Q}{CH^{3/2}\sqrt{i}} \quad (7.25)$$

De normaalbreedte kan ingesteld worden door bijvoorbeeld het aanleggen van dijken of kribben, zoals weergegeven in Fig. 7.8. Door uitschuring van de bedding zal de waterdiepte dan automatisch aangepast worden.

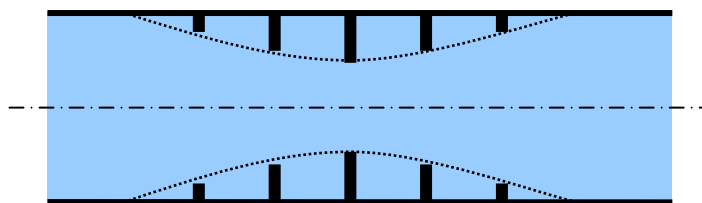


Fig. 7.8 Aanpassing van de normaalbreedte van een rivier door het aanleggen van kribben.

## 7.5 Krachten op ondergedompelde voorwerpen

Voor de berekening van krachten uitgeoefend door de druk van een stromende vloeistof op een wand maken we gebruik van de methode van Euler (paragraaf 4.4), omdat voor korte stukken de wrijvingskracht verwaarloosbaar klein is. Voor de berekening van wrijvingskrachten maken we gebruik van de vergelijkingen gegeven in paragrafen 5.3 en 5.5, omdat het globaal krachtenevenwicht niet afhankelijk is van het feit of de stroming laminair of turbulent is. Blijft over het speciaal geval van een voorwerp ondergedompeld in een vloeistofstroom.

Wanneer een voorwerp ondergedompeld wordt in een stroming, dan zal er een kracht uitgeoefend worden door de vloeistof op het voorwerp, zoals weergegeven in Fig. 7.9. Men noemt dit de sleepkracht. Deze kracht is te wijten aan de druk op het voorwerp en de wrijving. Op de plaatsen waar de vloeistof tot rust komt op het voorwerp ontstaat er een stuwdruk  $\rho v^2/2$ ; vermits de wrijvingskrachten ook afhankelijk zijn van  $v^2$  kan men de globale sleepkracht uitdrukken in functie van de kinetische energie  $\rho v^2/2$  van de stroming. Uiteraard is de sleepkracht ook afhankelijk van de grootte van het voorwerp, meer bepaald de dwarse sectie van het voorwerp loodrecht op de stroming, zodat de kracht begroot kan worden op volgende wijze

$$F = C_s S \frac{\rho v^2}{2} \quad (7.26)$$

waarbij  $F$  de sleepkracht is [F],  $S$  de oppervlakte van de projectie van het voorwerp dwars op de stroming [ $L^2$ ],  $v$  de gemiddelde snelheid van de stroming [ $L/T$ ], en  $C_s$  een evenredigheidscoëfficiënt [-]. De sleepkracht is uiteraard gericht in de richting van de stroming.

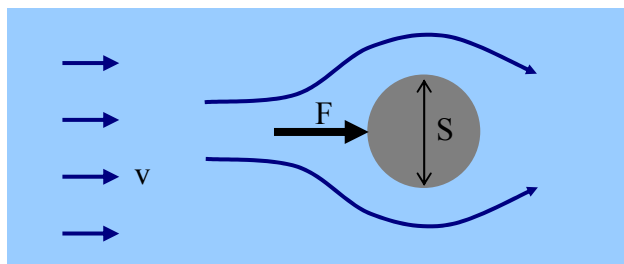


Fig. 7.9 Kracht uitgeoefend door een stroming op een ondergedompeld voorwerp.

Parameter  $C_s$  wordt de sleepcoëfficiënt genoemd en bestaat uit twee bijdragen: het effect van de drukken en een wrijvingseffect. Afhankelijk van de vorm van het voorwerp kan de druk ofwel de wrijving belangrijk zijn. Bijvoorbeeld voor een vlak voorwerp dat dwars op de stroming wordt geplaatst is de wrijving verwaarloosbaar en wordt de sleepkracht voornamelijk bepaald door het drukverschil tussen de voor- en achterkant van het voorwerp. Daarentegen is voor een vlak voorwerp dat in de richting van de stroming wordt geplaatst alleen de wrijvingskracht belangrijk. De waarde van de sleepcoëfficiënt is afhankelijk van de vorm van het voorwerp en ook van een lokaal Reynoldsgetal. Meestal kan men de sleepcoëfficiënt van een voorwerp niet exact berekenen en wordt deze daarom experimenteel opgemeten. Het is echter onmogelijk om voor dit voor elk voorwerp te doen en wordt daarom

de sleepkracht bij benadering bepaald door het voorwerp te herleiden tot een basisvorm, zoals bijvoorbeeld een bol of een cylinder, enz., en door de sleepcoëfficiënt voor deze basisvorm in rekening te brengen. Tabel 7.4 geeft een overzicht van karakteristieke waarden voor  $C_s$  afhankelijk van de basisvorm en het lokaal Reynoldsgetal. Merk op dat deze waarden slechts benaderingen zijn, zelfs voor de basisvormen, en dat het Reynoldsgetal en de grootte van de doorsnede van het voorwerp verschillend gedefinieerd worden afhankelijk van de situatie. Figuur 7.10 geeft een meer nauwkeurige voorstelling van de sleepcoëfficiënt volgens het lokaal Reynoldsgetal voor een bol en een cylinder.

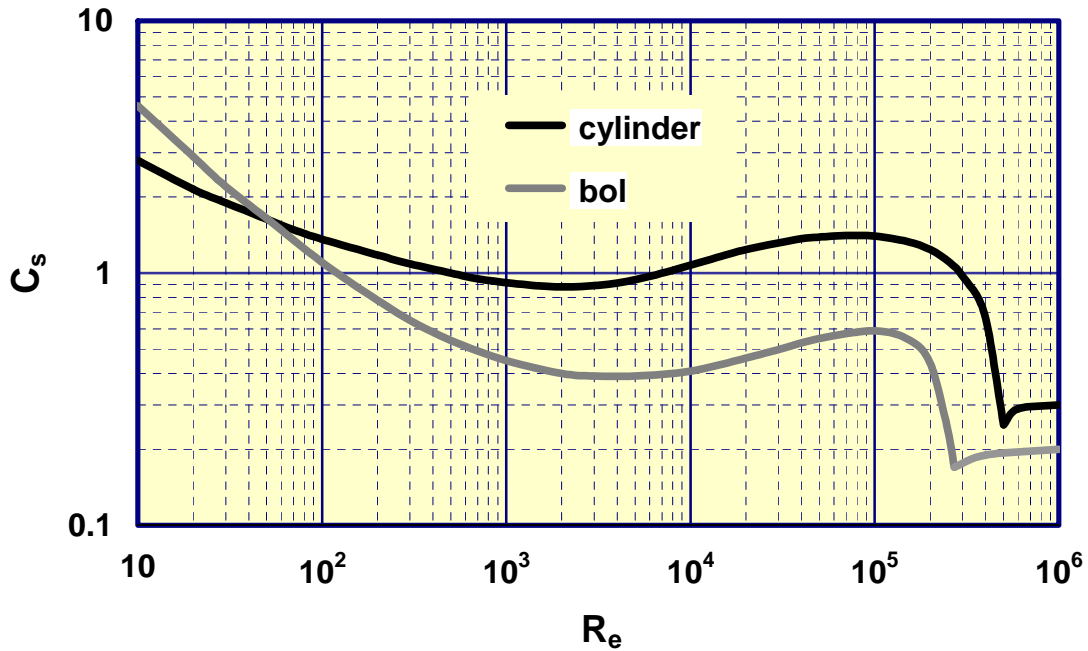


Fig. 7.10 De sleepcoëfficiënt voor een bol en een oneindige cylinder dwars in de stroming.

Met de sleepkracht kunnen we ook de bezinksnelheid bepalen van voorwerpen die onder water zinken. Er is dan evenwicht tussen de zwaartekracht, de opwaartse stuwkracht (Archimedes) en de sleepkracht

$$G = V\rho g + C_s S \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (7.27)$$

met  $G$  het gewicht van het voorwerp en  $V$  het volume. Hieruit volgt de zinksnelheid

$$v = \sqrt{\frac{2(G - \rho g V)}{C_s S \rho}} = \sqrt{2g \left( \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \right) \frac{V}{C_s S}} \quad (7.28)$$

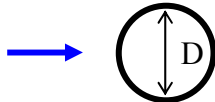
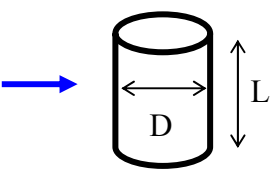
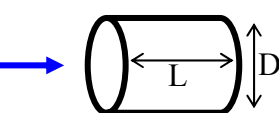

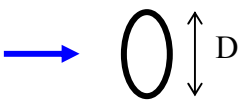
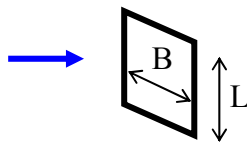
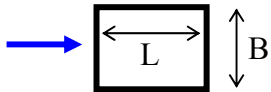
met  $\rho_0$  de densiteit van het voorwerp. In geval van sedimentdeeltjes is de vorm min of meer sferisch en de stroming laminair ( $C_s = 24/Re$ , Tabel 7.4), waaruit volgt dat de bezinksnelheid evenredig is met het kwadraat van de diameter  $D$

$$v = \frac{g}{18\nu} \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} D^2 \quad (7.29)$$



Dit is de wet van Stokes, die gebruikt wordt om de diameter van microscopische deeltjes te bepalen uitgaande van hun bezinkingsnelheid.

Tabel 7.4 Sleepcoëfficiënten voor verschillende basisvormen.

Voorwerp	$C_s$	Voorwaarde	Re	S
Bol* 	$\sim 24/Re$ $\sim 18,5/Re^{0,6}$ $\sim 0,47$ $\sim 0,02$	$Re < 1$ $0,2 < Re < 500$ $500 < Re < 2 \cdot 10^5$ $Re > 2,7 \cdot 10^5$	$\frac{vD}{\nu}$	$\frac{\pi D^2}{4}$
Cylinder in dwarsrichting* 	$\frac{L}{D}$ 1      0,63 5      0,80 10     0,83 30     1,0 ∞      1,2 - $\sim 0,3$	$10^4 < Re < 3 \cdot 10^5$     $Re > 5 \cdot 10^5$	$\frac{vD}{\nu}$	DL
Cylinder in langsrichting 	$\frac{L}{D}$ 0      1,11 8      0,85 28     0,99		$\frac{vD}{\nu}$	$\frac{\pi D^2}{4}$
Gestroomlijnd voorwerp 	2 dim.    0,07 3 dim.    0,04		$\frac{vB}{\nu}$	BL $\pi B^2/4$
Cirkelvormige plaat in dwarsrichting 	$\sim 20/Re$ 1,17	$Re < 1$ $Re > 10^3$	$\frac{vD}{\nu}$	$\frac{\pi D^2}{4}$
Rechthoekige plaat in de dwarsrichting 	$\frac{L}{B}$ 1      1,18 5      1,2 10     1,3 20     1,5 30     1,6 ∞      1,95	$Re > 10^3$	$\frac{vB}{\nu}$	BL
Rechthoekige plaat in de langsrichting 	$\sim 0,074 \cdot Re^{-0,2}$ $\sim 0,455(\log Re)^{-2,58}$	$2 \cdot 10^5 < Re < 10^7$  $Re > 10^7$	$\frac{vL}{\nu}$	BL

\* zie ook Fig. 7.10

## 8 STROMING IN POREUZE MEDIA

---

### 8.1 Stromingvergelijkingen

Een poreus medium bestaat uit twee fazen: een vaste matrix en de openingen daar tussen. Zowel de vaste fase als de open fase bezitten een zekere continuïteit, waardoor het materiaal een rigide structuur heeft terwijl er toch nog stroming van een vloeistof mogelijk is doorheen het materiaal. Voorbeelden van dergelijke materialen zijn sedimentaire grondlagen, gebarsten gesteenten, filtermaterialen, baksteen, beton, enz. Figuur 8.1. geeft een schematisch voorbeeld van een dergelijke materialen.

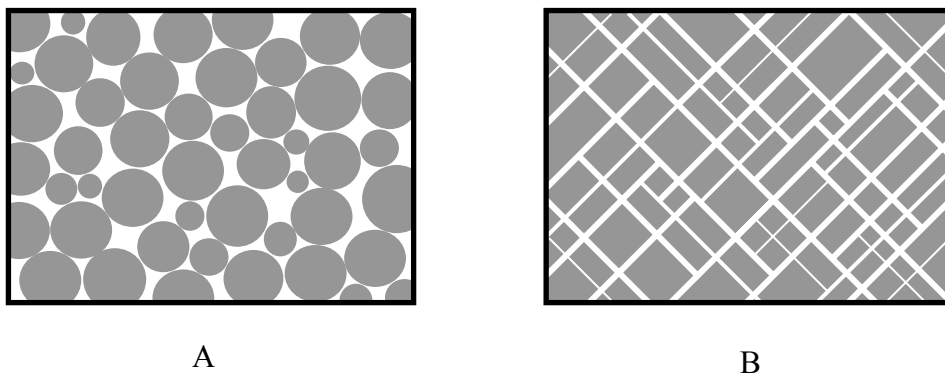


Fig. 8.1 Poreuze materialen: (a) korrelstructuur en (b) spletennetwerk.

Beschouw een poreus materiaal met een volume  $V$  dat bestaat uit een volume solied materiaal  $V_s$  en een volume openingen of poriën  $V_p$ , zodat

$$V = V_s + V_p \quad (8.1)$$

De porositeit  $n$  wordt gedefinieerd als de verhouding van het volume van de poriën tot het totaal volume

$$n = \frac{V_p}{V} \quad (8.2)$$

De porositeit is dimensieloos. De poriën kunnen geheel of gedeeltelijk gevuld zijn met een vloeistof. Het volume van de vloeistof  $V_v$  en volume lucht  $V_l$  is dan gelijk aan het volume van de poriën.

$$V_p = V_v + V_l \quad (8.3)$$

Het vloeistof- of vochtgehalte  $\theta$  wordt gedefinieerd als de verhouding tussen het volume vloeistof en het totaal volume

$$\theta = \frac{V_v}{V} \quad (8.4)$$

Ook het vochtgehalte is dimensieloos en de waarden zijn begrepen tussen nul en de porositeit. De porositeit en het vochtgehalte zijn gemiddelde of macroscopische grootheden, d.w.z. deze grootheden hebben geen betekenis in de limiet voor  $V$  gaande naar nul (we belanden dan immers ofwel in de vloeistoffase ofwel in de vaste fase);  $V$  moet dus voldoende klein zijn maar niet oneindig klein. In de praktijk volstaat het om  $V$  zodanig te kiezen dat er voldoende vast materiaal en poriën aanwezig zijn zodat de porositeit en het vochtgehalte de gemiddelde toestand weergeven.

De stroming van de vloeistof doorheen het poreus medium moet voldoen aan de continuïteitsvergelijking, welke uiteraard alleen maar geldig is in de fractie van het materiaal dat ingenomen wordt door de vloeistof; dus in de continuïteitsvergelijking 2.14 moet de dichtheid van de vloeistof  $\rho$  vervangen worden door  $\theta\rho$ , zodat

$$\frac{\partial\theta\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta\rho\underline{v}) = 0 \quad (8.5)$$

Vermits de vloeistof quasi-onsamendrukbaar is volgt hieruit

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta\underline{v}) = 0 \quad (8.6)$$

De stroming moet ook voldoen aan de Navier-Stokes vergelijking

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = -\rho g \nabla z - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} \quad (8.7)$$

Ook deze vergelijking is alleen geldig in de vloeistoffase. Gezien in poreuze media er zeer veel contactoppervlak is tussen de vloeistof en het vaste materiaal is er veel wrijving, zodat de stroming uiterts traag is en altijd laminair. Dergelijke stromingen worden kruipstromen genoemd, en worden gekenmerkt door verwaarloosbare inertietermen in de impulsvergelijking, zodat

$$\rho g \nabla z + \nabla p \approx \mu \nabla^2 \underline{v} \quad (8.8)$$

Deze vergelijking stelt dat de zwaartekracht en de drukkkrachten volledig gecompenseerd worden door de viskeuze wrijvingskrachten. Er stellen zich nu twee problemen. Ten eerste zal het zeer moeilijk zijn om deze vergelijking op te lossen gezien de complexiteit van de poriënstructuur. Meestal kent men zelfs de afmetingen en structuur van de poriën niet. Ten tweede heeft het weinig zin om de stroomsnelheid of drukverdeling exact te kennen in de poriën, omdat men slechts geïnteresseerd is in het globaal effect van de stroming, zoals het debiet. Het is dus aangewezen om te vereenvoudigen door de stroming macroscopisch benaderen, d.w.z. we zijn niet meer geïnteresseerd in de beweging van elk vloeistofdeeltje in elk punt van het poriënsysteem, maar wel in de macroscopische of gemiddelde toestand van de stroming. Daarom worden de snelheid  $\underline{v}$  beschouwd als een gemiddelde waarde in een volume  $V$ , dat klein genoeg is maar niet oneindig klein zoals bij de definitie van de porositeit en het vochtgehalte.

Beschouw nu de flux  $\underline{q}$ , zijnde het specifiek debiet van de vloeistofstroming. Deze flux is een eveneens een macroscopische grootte, welke gedefinieerd wordt als het debiet per dwarse sectie, zoals weergegeven in Fig. 8.2.

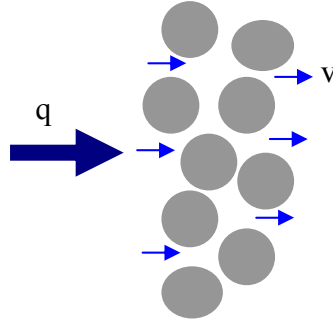


Fig. 8.2 Verband tussen de flux  $\underline{q}$  en de gemiddelde snelheid  $\underline{v}$ .

Vermits de dwarse sectie zowel vast materiaal als poriën en vloeistof bevat, maar er alleen maar stroming mogelijk is in de vloeistoffase, volgt hieruit

$$\underline{q} = \theta \underline{v} \quad (8.9)$$

De continuïteitsvergelijking wordt dan

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{q} = 0 \quad (8.10)$$

Deze vergelijking stelt dat veranderingen in het vochtgehalte het gevolg zijn van convergentie of divergentie van de vloeistofflux.

Het is nu nodig om ook de impulsvergelijking met macroscopische variabelen te herschrijven. Hierbij staan we voor de moeilijkheid om de viskeuze wrijvingskrachten op een eenvoudige wijze uit de drukken. In hoofdstuk 5 werd aangetoond dat voor laminaire stroming de wrijvingskrachten proportioneel zijn met de gemiddelde snelheid en de viscositeit van de vloeistof. Vermits dit zeker ook het geval is voor stroming in een poreus medium, kan vergelijking 8.8 benaderd worden als volgt

$$\rho g \nabla z + \nabla p = \mu \nabla^2 \underline{v} \approx -\frac{\mu}{k} \underline{q} \quad (8.11)$$

waarbij de wrijvingskracht uiteraard tegengesteld is aan de richting van de stroming, vandaar het minteken, en parameter  $k$  een evenredigheidsconstante is. Deze materiaalconstante is afhankelijk van de poriënstructuur en wordt de permeabiliteit van het poreus medium genoemd. De dimensies zijn  $[L^2]$  en de gebruikelijke eenheid is de darcy met symbool  $D$  ( $1 D \approx 9,87 \mu m^2$ ; deze eenheid is afkomstig uit de olie-industrie en wordt gedefinieerd als de permeabiliteit waarbij met een gradiënt van  $1 \text{ atm/cm}$  een flux van  $1 \text{ cm/s}$  bekomen wordt voor een vloeistof met een viscositeit van  $1 \text{ cP}$ ; oliehoudende grondlagen hebben een

permeabiliteit van 5 tot 500 mD). De impulsvergelijking kan nu omgevormd worden door op te lossen naar de flux, waaruit volgt

$$\underline{q} = -\frac{k}{\mu}(\rho g \nabla z + \nabla p) = -\frac{kg}{v} \nabla \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) \quad (8.12)$$

ofwel

$$\underline{q} = -K \nabla h \quad (8.13)$$

met  $h$  de piëzometrische hoogte van de vloeistof. Uiteindelijk wordt een erg eenvoudige vergelijking bekomen met een duidelijke fysische interpretatie, nl. de stroming van een vloeistof in een poreus medium wordt veroorzaakt door een verschil in piëzometrie, zodanig dat de flux evenredig is met de gradiënt van de piëzometrische hoogte (dus een lineair verband tussen oorzaak en gevolg). De evenredigheidsfactor  $K = kg/v$  wordt de conductiviteit of doorlatendheid genoemd en is afhankelijk van de viskeuze eigenschappen van de vloeistof, weergegeven door de kinematische viscositeit  $v$ , en van de afmetingen van de poriënstructuur weergegeven door de permeabiliteit  $k$ . De dimensies van  $K$  zijn  $[L/T]$  en de gebruikelijke eenheden zijn m/s of m/d.

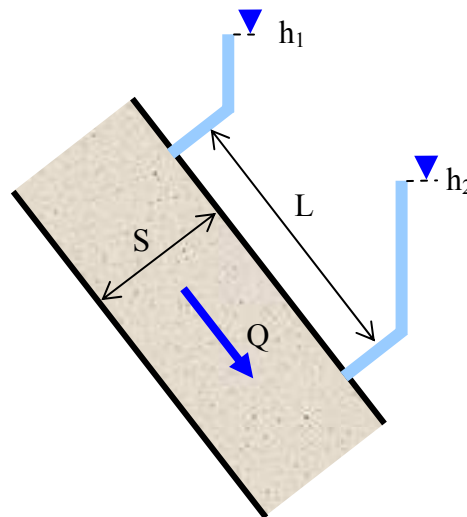


Fig. 8.3 Het experiment van Darcy.

Het lineair verband tussen de flux en de gradiënt van de piëzometrische hoogte werd reeds experimenteel vastgesteld in het midden van de 19<sup>e</sup> eeuw door Darcy. Daarom is deze wet algemeen gekend als de wet van Darcy. In oudere handboeken wordt de flux soms ook de Darcy-snelheid genoemd. Darcy onderzocht de filtratie van water doorheen een kolom gevuld met zand (Fig. 8.3) en stelde experimenteel vast dat

$$Q = KS \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (8.14)$$

met  $Q$  het debiet dat doorheen de kolom stroomt,  $S$  de dwarsdoorsnede van de kolom en  $h_1 - h_2$

het verschil in piëzometrische hoogte over een afstand L.

Vergelijking 8.13 kan gecombineerd worden met de continuïteitsvergelijking 8.10 zodat een globale stromingsvergelijking bekomen wordt

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h) = \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (8.15)$$

Dit is de basisvergelijking voor de stroming van vloeistoffen in poreuze media. Echter deze vergelijking op zich, is onvoldoende om een probleem te kunnen oplossen. Immers indien de conductiviteit gekend is, blijven er nog 2 onbekenden over in de vergelijking, nl. het vochtgehalte  $\theta$  en de piëzometrische hoogte  $h$ . Een bijkomend gegeven is noodzakelijk; dit is een zogenaamde constitatieve betrekking welke iets zegt over de aard van de stroming. In de volgende paragrafen zullen volgende types van stromingen beschouwd worden:

- een vloeistof in rust in een poreus medium
- vloeistofstroming in een verzadigd poreus medium
- vloeistofstroming in een onverzadigd poreus medium

## 8.2 Porositeit en conductiviteit

De porositeit, permeabiliteit en conductiviteit zijn belangrijke eigenschappen die gekend moeten zijn om stroming in een poreus medium te kwantificeren. Er bestaan verschillende technieken om deze parameters te bepalen. We gaan eerst na of het mogelijk is om de porositeit te berekenen uitgaande van karakteristieke afmetingen van een poreus medium.

Beschouw een poreus medium opgebouwd uit sferische korrels met een gelijke diameter  $D$ . De korrels kunnen op verschillende manieren op elkaar gestapeld worden. De stapeling die het grootste volume aan poriën geeft is een kubisch patroon, zoals weergegeven in Fig. 8.4a.

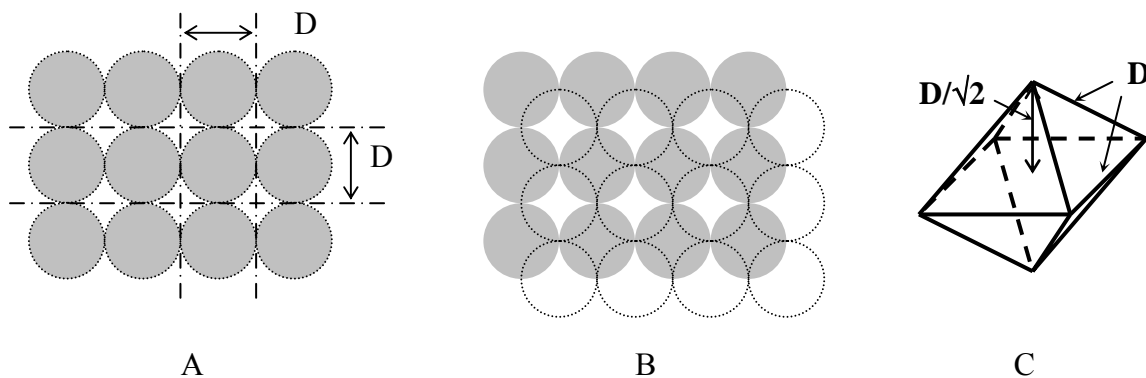


Fig. 8.4 Stapeling van sferische korrels: (a) een kubisch patroon geeft een maximale porositeit en (b) een minimale porositeit wordt bekomen met een geschrankt kubisch patroon (c).

Het blijkt dat elke korrel ingeschreven kan worden in een kubus, zodat de porositeit berekend kan worden als

$$n = \frac{V_p}{V} = 1 - \frac{V_s}{V} = 1 - \frac{\pi D^3/6}{D^3} = 1 - \frac{\pi}{6} \approx 0,48 \quad (8.16)$$

Opmerkelijk is dat de porositeit onafhankelijk is van de afmetingen van de korrels. De kleinste porositeit wordt bekomen door de volgende laag van korrels in te passen in de eerste laag, zoals weergegeven in Fig. 8.4b. Dit is een octaëdrische stapeling. De tussenafstand tussen de lagen kan berekend worden als de halve hoogte van een octaëder met zijde D, dit is  $D/\sqrt{2}$  (Fig. 8.4c), zodat elke korrel overeenkomt met een volume van  $D^3/\sqrt{2}$ , waardoor de porositeit berekend kan worden als

$$n = 1 - \frac{\pi D^3/6}{D^3/\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \approx 0,26 \quad (8.17)$$

De porositeit blijkt opnieuw onafhankelijk te zijn van de korreldiameter. Uit experimenteel onderzoek blijkt verder dat voor een willekeurige stapeling de porositeit ongeveer 0,37 bedraagt. Dit verklaart waarom poreuze media bestaande uit uniform zand of grind, een porositeit hebben variërend tussen 0,3 en 0,4 afhankelijk van de dichtheid. Indien het medium bestaat uit korrels van verschillende afmetingen dan neemt de porositeit af, omdat de kleinere korrels de open ruimte tussen de grote korrels innemen. Zo heeft een mengsel van zand en grind een kleinere porositeit dan zuiver grind of zuiver zand. Wanneer de korrels een onregelmatige vorm hebben dan neemt de porositeit toe, omdat er grotere openingen ontstaan tussen de korrels. Dit is bijvoorbeeld het geval voor leem of klei (in geval van klei spelen ook de aantrekkingskrachten tussen de kleideeltjes en de watermoleculen een belangrijke rol). Typische waarden van de porositeit van enkele poreuze materialen worden gegeven in Tabel 8.1.

Tabel 8.1. Typische waarden van de porositeit.

Poreus materiaal	Porositeit n
Grond	
grind	0,25 - 0,35
zand	0,30 - 0,40
silt	0,40 - 0,50
klei	0,45 - 0,65
Rots	
graniet	0 - 0,05
zandsteen	0,10 - 0,20
kalksteen	0 - 0,10
karst kalksteen	0,10 - 0,50
basalt	0,05 - 0,50
Bouwmaterialen	
baksteen	0,3 - 0,4
kalksteen	0,05 - 0,5
kalkzandsteen	~0,36
cellenbeton	~0,70
mortel	~0,23
gips	~0,42

Voor gespleten materialen zoals rots hangt de porositeit af van de hardheid van het gesteente en zijn chemische eigenschappen. Harde inerte rotsen zoals graniet hebben meestal een zeer kleine porositeit. Omdat kalksteen minder hard is en oplost in water kan de porositeit groot worden zoals bij karstgesteenten. Basalt is een stollingsgesteente waarin soms grote barsten ontstaan bij de afkoeling.

Vermits bij natuurlijke poreuze materialen de poriënafmetingen zeer variabel zijn, kan men de porositeit meestal alleen maar experimenteel bepalen. Het volstaat om een ongestoord monster te nemen met een gekend volume. Het monster wordt dan verzadigd met water en gewogen. Daarna wordt het gedroogd, meestal in een oven met een temperatuur van 105°C gedurende 24 uur, en opnieuw gewogen. Het verschil in gewicht geeft het volume van het verdampte water wat overeenkomt met het volume van de poriën. De verhouding met het totaal volume van het monster geeft dan de porositeit. Indien het materiaal isotroop is dan kan de porositeit ook bepaald worden op oppervlakte- of lengtebasis. Bijvoorbeeld door beeldanalyse kan men de oppervlakte van de barsten en spleten bepalen in een rots. De verhouding met de totale oppervlakte geeft dan de porositeit. Men kan ook een lijn trekken en het gedeelte van de lijn bepalen dat door de spleten gaat; de verhouding met de totale lengte geeft eveneens de porositeit.

Een goede kennis van de permeabiliteit of doorlaatbaarheid is een essentieel gegeven om een stromingsprobleem in een poreus medium te kunnen oplossen. De permeabiliteit is zeer sterk afhankelijk van de structuur en geometrie van de poriën. De dimensies [L<sup>2</sup>] schijnen erop te wijzen dat de permeabiliteit afgeleid kan worden uit geometrische kenmerken van de poriën of korrels. Maar de poriënverdeling en verbindingen tussen de poriën hebben een belangrijke invloed, zodat de relatie niet zo eenvoudig is. Echter in geval van een poreus medium opgebouwd uit sferische korrels met een gelijke diameter D moet de permeabiliteit in relatie staan met het kwadraat van deze diameter, vermits dit de enige maatgevende afmeting is van het medium. Dergelijke relatie werd onderzocht door Kozeny-Carman, met volgend resultaat

$$k \approx \frac{n^3}{(1-n)^2} \frac{D^2}{180} \quad (8.18)$$

Hierin geeft de porositeit n de invloed weer van de dichtheid van de stapeling van de korrels. De formule van Kozeny-Carman is in de praktijk bruikbaar voor granulaire materialen met een uniforme korrelverdeling. Natuurlijke poreuze materialen hebben echter een variabele korrelverdeling, zodat er geen unieke maatgevende diameter is. In het geval van zand werd experimenteel onderzoek uitgevoerd door Hazen, die voorstelde D<sub>10</sub> als effectieve diameter te gebruiken; dit is de zeefdiameter waarbij 10% (gewichtspcent) van de korrels doorgelaten wordt. De empirische formule van Hazen is

$$k \approx 0,0013 D_{10}^2 \quad (8.19)$$

en is slechts geldig voor 0,1 mm < D<sub>10</sub> < 3 mm.

Daar voorgaande vergelijkingen slechts een beperkte bruikbaarheid en nauwkeurigheid hebben, is het beter de doorlaatbaarheid te bepalen door proefondervindelijk onderzoek. De eenvoudigste methode bestaat erin om ongeroerde monsters van het poreus materiaal te onderzoeken in het laboratorium met een zogenaamde permeameter, zoals weergegeven in



Fig. 8.5. Er zijn twee meettechnieken mogelijk. Bij de opstelling van een permeameter met constante peilverschil (Fig. 8.5a) wordt de proef van Darcy nagebootst. De conductiviteit wordt dan bekomen als

$$K = \frac{QL}{S\Delta h} \quad (8.20)$$

met  $Q$  het debiet dat door het monster stroomt,  $L$  de lengte van het monster,  $S$  de dwarsdoorsnede van het monster en  $\Delta h$  het verschil in piëzometrische hoogte.

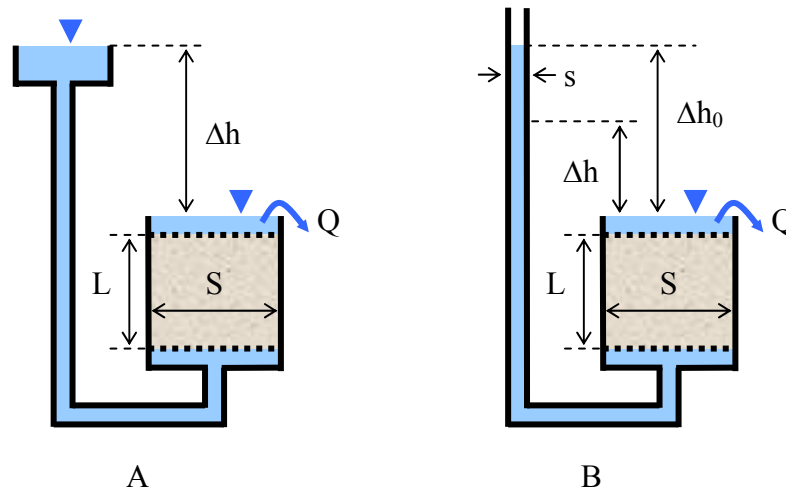


Fig. 8.5 Bepaling van de conductiviteit met een permeameter: (a) constant peilverschil en (b) variabel peilverschil.

Voor poreuze materialen met een lage doorlaatbaarheid is het beter een opstelling te gebruiken met een variabel peilverschil (Fig. 8.5b), zodat de hoeveelheid vloeistof welke door het medium stroomt niet hoeft opgemeten te worden. Vermits het debiet gegeven wordt door

$$Q = KS \frac{\Delta h}{L} = -s \frac{d(\Delta h)}{dt} \quad (8.21)$$

met  $s$  de dwarsdoorsnede van de toevoerbuisc,  $t$  de tijd, en  $\Delta h$  het peilverschil op tijdstip  $t$ , kan de conductiviteit berekend worden als

$$K = \frac{sL}{St} \ln \left( \frac{\Delta h_0}{\Delta h} \right) \quad (8.22)$$

met  $\Delta h_0$  het initieel verschil in piëzometrische hoogte bij het begin van de proef ( $t = 0$ ).

Voor grondlagen is een onderzoek in het laboratorium dikwijls niet voldoende omdat een grondmonster meestal niet representatief genoeg is voor de ganse grondlaag. Er dienen dan ofwel veel monsters onderzocht te worden, ofwel moet er overgegaan worden tot proefondervindelijk onderzoek in het veld. In geval er meerdere monsters onderzocht worden

in het laboratorium, blijkt dat door de natuurlijke heterogeniteit de K-waarden logaritmicus normaal verdeeld zijn, zodat de meest representatieve waarde van een reeks van waarnemingen het geometrisch gemiddelde is en niet het rekenkundig gemiddelde. De meest aangewezen techniek voor terreinonderzoek is de zogenaamde pompproef die besproken wordt in paragraaf 8.5.

Het blijkt dat de conductiviteit zeer sterk kan verschillen afhankelijk van het soort van poreus materiaal. Typische ordes van grootte van de hydraulische conductiviteit worden gegeven in Tabel 8.2. Merk op dat de hydraulische geleidbaarheid sterk kan variëren, zowel tussen de materialen onderling als binnen een bepaalde soort van materiaal.

Tabel. 8.2. Typische waarden voor de hydraulische conductiviteit.

Materiaal	K (m/s)
grind	$> 10^{-2}$
grof zand met fijn grind	$10^{-3}-10^{-2}$
grof zand	$10^{-4}-10^{-3}$
medium zand	$10^{-5}-10^{-4}$
fijn zand	$10^{-6}-10^{-5}$
leemhoudend zand	$10^{-8}-10^{-6}$
zandige klei	$10^{-10}-10^{-8}$
klei	$< 10^{-10}$

### 8.3 Hydrostatica in poreuze media

In geval er geen stroming is, bestaat er een evenwicht tussen de druk in de vloeistof en de zwaartekracht. De vergelijkingen worden dan vereenvoudigd tot

$$\nabla h = 0 \quad (8.23)$$

ofwel

$$h = z + p/\rho g = c^{te} \quad (8.24)$$

De keuze van de constante is arbitrair, daar er geen absoluut nulpunt bestaat voor de potentiaal; immers alleen potentiaalverschillen zijn van belang. De constante kan bepaald worden door de positie van het vrij oppervlak  $z_0$  waar de relatieve druk nul is. De plaats- en drukpotentialen zijn zoals weergegeven in Fig. 8.6. De druk wordt dan bekomen als

$$p = \rho g(z_0 - z) \quad (8.25)$$

De situatie onder het vrij oppervlak is hetzelfde als bij vrije vloeistoffen in rust, zoals besproken in hoofdstuk 3. Echter een belangrijk verschil is dat er nu ook vloeistof aanwezig kan zijn in het poreus medium boven het vrij oppervlak. Immers voor elk punt gelegen boven het vrij oppervlak is bovenstaande vergelijking eveneens geldig, maar vermits  $z > z_0$  is de relatieve druk negatief, d.w.z. de absolute druk is lager dan de atmosferedruk. De vloeistof wordt dus opgezogen door het poreus medium, zoals water in een spons. De zuiging gebeurt

door capillaire krachten t.g.v. adhesie en cohesie, zoals besproken in hoofdstuk 1.

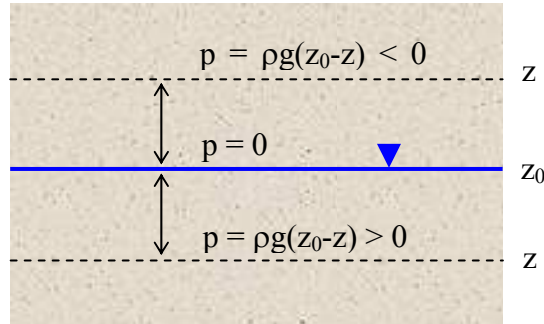


Fig. 8.6 Hydrostatica in een poreus medium.

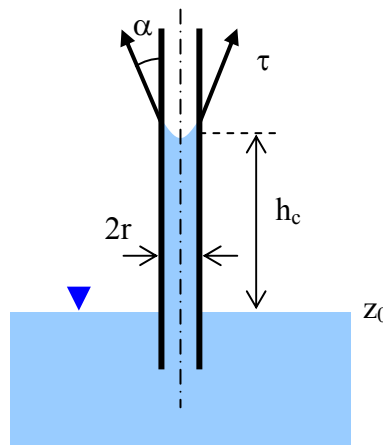


Fig. 8.7 Capillaire opstijging.

Om de capillaire opstijging te verklaren beschouwen we een verticale porie met een constante straal  $r$  zoals weergegeven in Fig. 8.7. Door de adhesie van de vloeistof aan de wand van de porie en de cohesie van de vloeistofmoleculen onderling, wordt de vloeistof naar boven gezogen over een bepaalde hoogte  $h_c$ , wat de capillaire opzuighoogte wordt genoemd. Bovenaan vormt de vloeistof een miniscus met de lucht, d.w.z. een gekromd contactoppervlak met oppervlaktespanning, zodat de vloeistof op deze hoogte onderhevig is aan een negatieve druk  $p_c = -h_c/\rho g$ , welke de capillaire druk wordt genoemd. De capillaire opzuighoogte kan berekend worden uit het verticaal krachtenevenwicht van de vloeistof in de porie

$$2\pi r \tau \cos \alpha = \rho g \pi r^2 h_c \quad (8.26)$$

met  $\tau$  de oppervlaktespanning en  $\alpha$  de contacthoek tussen de miniscus en de wand van de porie, zoals uiteengezet in hoofdstuk 1. Verdere uitwerking geeft

$$h_c = \frac{2\tau \cos \alpha}{\rho g r} \quad (8.27)$$

en de capillaire druk wordt dan bekomen als

$$p_c = -\rho g h_c = -\frac{2\tau \cos \alpha}{r} \quad (8.28)$$

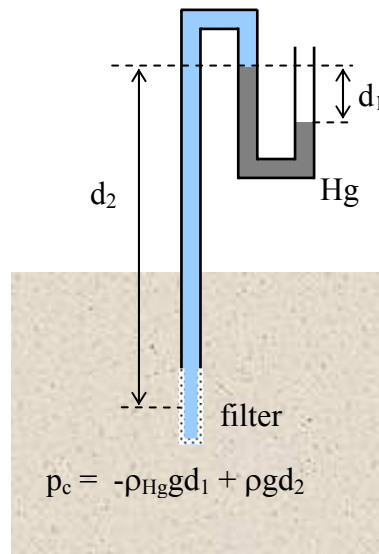


Fig. 8.8 Een tensiometer.

De contacthoek  $\alpha$  wordt gewoonlijk nul verondersteld, omdat gronddeeltjes meestal zeer hydrofiel zijn. De capillaire stijghoogte is dus omgekeerd evenredig met de poriënstraal. Echter een poreus medium bestaat uit poriën van verschillende afmetingen, zodat er vloeistof kan voorkomen op verschillende hoogtes boven het vrij oppervlak, afhankelijk van de poriënafmelingen en de wijze waarop de poriën met elkaar verbonden zijn. Hoe hoger boven het vrij oppervlak hoe minder vloeistof er aanwezig zal zijn. Hieruit volgt dat er een verband bestaat tussen het watergehalte en de capillaire druk. Deze druk is negatief en wordt daarom ook zuigspanning genoemd, en kan opgemeten worden door middel van een tensiometer, d.i. een manometer die een onderdruk kan opmeten, bijvoorbeeld met een hangende water- of kwikkolom, zoals weergegeven in Fig. 8.8. Het contact tussen de vloeistof in de tensiometer en het poreus medium wordt bekomen door een poreuze filter te voorzien met zeer kleine poriën, waardoor deze altijd gevuld blijft met water zodat er geen lucht kan binnentreden in de tensiometer.

Men definieert de zuiging of zuigpotentiaal  $\psi$  als de negatieve drukhoogte

$$\psi = -\frac{p_c}{\rho g} \quad (8.29)$$

en bekomt aldus een verband tussen het vochtgehalte  $\theta$  en de zuiging  $\psi$ ; hoe groter de zuiging hoe lager het vochtgehalte. Deze relatie wordt de retentie-curve genoemd en is afhankelijk van het soort van materiaal en de vloeistof. In de praktijk blijken er ook nog hysteresis effecten op te treden (Fig. 8.9).

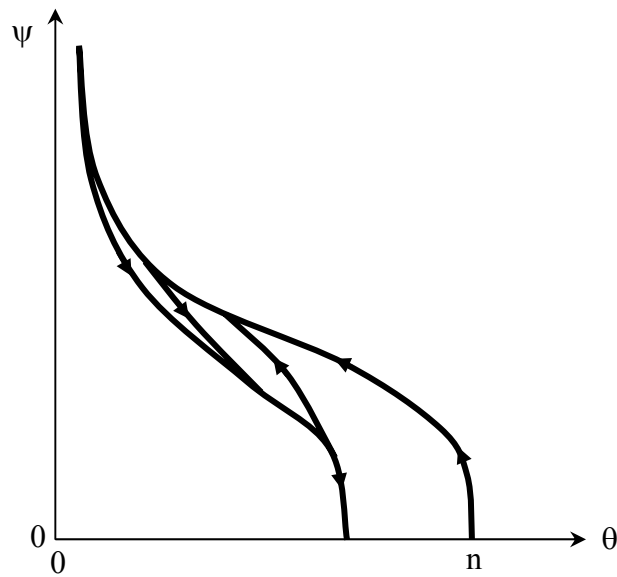


Fig. 8.9 Typische vorm van een retentiecurve.

Tabel 8.3. Typische waarden van capillaire druk, zuiging en pF.

Vochttoestand	$p_c$ (kPa)	$\psi$ (m)	pF
verzadigd	0	0	-
zeer nat	-0,1	0,01	0
nat	-1	0,1	1
vochtig	-10	1	2
droog	-100	10	3
zeer droog	-1.000	100	4
luchtdroog	-10.000	1.000	5
ovendroog	-1.10 <sup>6</sup>	100.000	7

Tabel 8.3 geeft enkele typische waarden voor de zuiging en de overeenkomstige vochttoestand. Omdat bij droge materialen de waarde van de zuiging zeer groot wordt, is het dikwijls gebruikelijk om te werken met een logaritmische schaal; men definieert hiervoor de pF als

$$pF = \log[\psi(\text{cm})] \quad (8.30)$$

Daarom noemt men de retentiecurve dikwijls ook de pF-curve. Hiermee kan men allerlei fenomenen verklaren of beschrijven. Bijvoorbeeld het vochtgehalte in een bodem enkele dagen na een neerslag wordt de veldcapaciteit genoemd en komt overeen met een pF van ongeveer 2, en planten verwelken in een droge bodem vanaf een pF van ongeveer 4,2.

## 8.4 Onverzadigde stroming

In een onverzadigd poreus medium is het vochtgehalte overal kleiner dan de porositeit. De vloeistof wordt dan opgezogen door het materiaal, hetgeen impliceert dat de druk van de vloeistof overal negatief is. Er bestaat dan een verband tussen deze negatieve druk- of zuigpotentiaal en het vochtgehalte, gegeven door de retentiecurve. Een tweede effect is dat de conductiviteit of permeabiliteit niet meer constant is maar wel afhankelijk van het vochtgehalte. Tot nu toe is er altijd verondersteld dat bij de bepaling van de conductiviteit het poreus materiaal volledig gevuld is met de vloeistof. Het spreekt vanzelf dat in geval de poriën niet allemaal gevuld zijn met vloeistof het materiaal minder geleidend zal zijn omdat een deel van het poriënvolume niet toegankelijk is voor de vloeistof.

Vermits bij toenemende onverzadiging steeds de grootste poriën eerst geledigd worden, neemt de permeabiliteit of geleidbaarheid zeer snel af met het vochtgehalte. Er bestaat dus een sterk niet-lineair verband tussen de conductiviteit en het vochtgehalte, dat meestal experimenteel bepaald moet worden (Fig. 8.10).

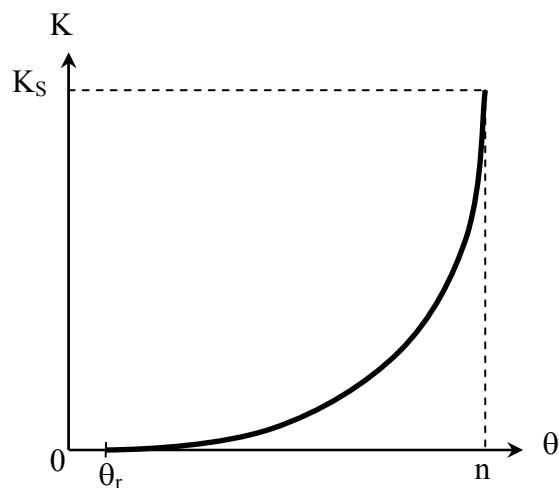


Fig. 8.10 Typisch verband tussen de conductiviteit en het vochtgehalte.

In geval van een uniform granulair materiaal bestaat er een theoretische benadering van Irmay, met volgende naar hem genoemde vergelijking

$$K(\theta) = K_s \left( \frac{\theta - \theta_r}{n - \theta_r} \right)^3 \quad (8.31)$$

met  $K_s$  de doorlaatbaarheid bij volledige saturatie en  $\theta_r$  het residueel vochtgehalte waarbij er geen continuïteit meer aanwezig is in de vloeistoffase, waardoor de permeabiliteit nul wordt.

Door experimenteel onderzoek heeft men deze vergelijking uitgebreid naar andere media. Hierbij wordt de exponent in het rechter lid van de vergelijking een parameter afhankelijk van het type van poreus medium. Het blijkt dat voor natuurlijke materialen zoals zand, leem en klei deze vergelijking een goede benadering is, waarbij de exponent kan variëren tussen 3 en

6. In de praktijk zal de juiste waarde experimenteel vastgesteld moeten worden.

Het blijkt dus dat voor een onverzadigde poreus medium de belangrijkste variabele het vochtgehalte is. Dit bracht Philip ertoe om de algemene stromingsvergelijking in poreuze materialen (vergelijking 8.15) om te vormen als volgt

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h) = \nabla \cdot [K(\theta) \nabla (z - \psi)] = \nabla \cdot \left[ K(\theta) \nabla z + K(\theta) \frac{d(-\psi)}{d\theta} \nabla \theta \right] \quad (8.32)$$

Men definieert de diffusiviteit  $D(\theta) = K(\theta) d(-\psi)/d\theta$ , zodat

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla [D(\theta) \nabla \theta] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (8.33)$$

Dit is de vergelijking van Philip, met als enige onbekende het vochtgehalte  $\theta$ . Merk op dat deze vergelijking niet geldig is in een verzadigd medium omdat het vochtgehalte dan gelijk wordt aan de porositeit en niet kan variëren in de tijd of ruimte.

Deze vergelijking is van het diffusie- of dissipatie-type, vandaar de naam diffusiviteit voor de functie  $D(\theta)$ . Deze functie integreert alle eigenschappen van het onverzadigde medium, nl. het verband tussen zuiging en vochtgehalte evenals de relatie tussen conductiviteit en vochtgehalte. De fysische betekenis wordt meteen duidelijk wanneer de wet van Darcy omgevormd wordt op dezelfde wijze

$$\underline{q} = -K \nabla h = -K(\theta) \nabla (z - \psi) = -K(\theta) \nabla z - D(\theta) \nabla \theta \quad (8.34)$$

Hieruit volgt dat de stroming onder onverzadigde omstandigheden bepaald wordt door twee processen. Het eerste is een stroming verticaal naar beneden gericht door de gravitatie met een flux die gelijk aan de doorlaatbaarheid van het medium welke afhankelijk is van het vochtgehalte. Een tweede stroming wordt veroorzaakt door een gradiënt in het vochtgehalte, met een flux die erop gericht is om ruimtelijke verschillen in het vochtgehalte weg te werken. De grootte van deze flux wordt bepaald door de diffusiviteit, wat een maat is voor het dissiperend vermogen van het medium en afhankelijk is van het vochtgehalte (hoe meer poriën gevuld zijn met vloeistof hoe groter het dissiperend vermogen).

Ter illustratie behandelen we het geval van horizontale absorptie in een onverzadigd poreus materiaal, zoals weergegeven in Fig. 8.11. Het materiaal, bijvoorbeeld een muur, met een initieel vochtgehalte  $\theta_0$  wordt plotseling verzadigd aan een zijde door bijvoorbeeld een slagregen. We verwaarlozen het effect van de zwaartekracht zodat de stroming in het materiaal ééndimensionaal horizontaal is, beschreven door volgende vergelijking

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (8.35)$$

met als voorwaarden, voor  $t = 0$

$$\theta = \theta_0 \quad (8.36)$$

voor  $x = 0$

$$\theta = n \quad (8.37)$$

en voor  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (8.38)$$

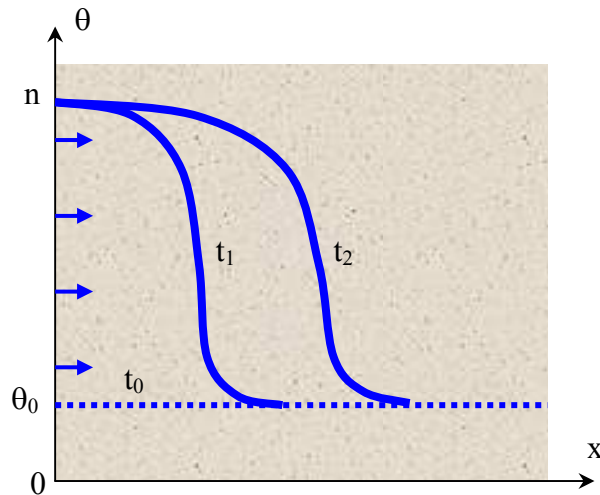


Fig. 8.11 Horizontale adsorptie in een poreus materiaal.

De oplossing wordt bekomen door een transformatie waarbij  $x$  wordt beschouwd als een functie van  $\theta$  en  $t$ . De transformatieformules zijn

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 1 / \frac{\partial x}{\partial \theta} \quad (8.39)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial x}{\partial t} / \frac{\partial x}{\partial \theta} \quad (8.40)$$

zodat vergelijking 8.35 omgevormd wordt tot

$$\frac{\partial x}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ D(\theta) / \frac{\partial x}{\partial \theta} \right] \quad (8.41)$$

Hieruit volgt

$$- \frac{\partial x}{\partial \theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial x}{\partial t} d\theta = D(\theta) \quad (8.42)$$

waarbij gebruik werd gemaakt van voorwaarde 8.38. Vermits in het rechterlid van de vergelijking de tijd niet expliciet voorkomt, is alleen een oplossing mogelijk van de volgende vorm

$$x = f(\theta) \sqrt{t} \quad (8.43)$$

waarbij de functie  $f(\theta)$  gegeven wordt door



$$-\frac{1}{2} \frac{df}{d\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta) d\theta = D(\theta) \quad (8.44)$$

Hiervoor is geen analytische oplossing mogelijk. Echter meer belangrijk is te weten hoeveel vocht er door het poreus medium opgeslorpt wordt. Het opgeslorpt volume wordt gegeven door

$$V = \int_{\theta_0}^n x d\theta = \int_{\theta_0}^n f(\theta) \sqrt{t} d\theta = \int_{\theta_0}^n f(\theta) d\theta \sqrt{t} = S \sqrt{t} \quad (8.45)$$

met V het geabsorbeerd volume aan vloeistof per oppervlakte-éénheid [ $L^3/L^2$ ] en S de sorptiviteit [ $L/T^{1/2}$ ], gegeven door

$$S = \int_{\theta_0}^n f(\theta) d\theta \quad (8.46)$$

Uit vergelijking 8.45 volgt dat het volume geabsorbeerde vloeistof toeneemt met de wortel van de tijd. Hierdoor neemt de vloeistofgradiënt en de daarvan afhankelijke flux af in de loop van de tijd. Het absorberend vermogen van het poreus medium wordt dus kleiner naarmate het materiaal meer en meer bevochtigd wordt.

Het absorberend vermogen van de muur wordt bepaald door de sorptiviteit, een parameter die afhankelijk is van de eigenschappen van het medium, meer bepaald de diffusiviteit en het initieel vochtgehalte. Vergelijkingen 8.44 en 8.46 laten in principe toe om de sorptiviteit exact te berekenen, echter hiervoor moeten numerieke technieken aangewend te worden omdat er geen analytische oplossing mogelijk is. In de praktijk zal men daarom de sorptiviteit experimenteel bepalen door de hoeveelheid geabsorbeerde vloeistof op te meten in functie van de tijd. Tabel 8.4 geeft typische waarden voor de sorptiviteit van enkele bouwmaterialen.

Tabel 8.4 Typische waarden voor de sorptiviteit van bouwmaterialen, die initieel volledig droog zijn.

Materiaal	S (m/√s)
cellenbeton	$2,8 \cdot 10^{-5}$
kalkzandsteen	$3,6 \cdot 10^{-5}$
kalksteen	$\sim 7 \cdot 10^{-5}$
baksteen	$\sim 3 \cdot 10^{-4}$

De gemiddelde diepte van de indringing van het vocht in de muur  $\langle x \rangle$  kan bekomen worden met vergelijking 8.45

$$V = \int_{\theta_0}^n x d\theta = \langle x \rangle (n - \theta_0) \quad (8.47)$$

ofwel

$$\langle x \rangle = \frac{V}{n - \theta_0} = \frac{S \sqrt{t}}{n - \theta_0} \quad (8.48)$$

Beschouw ter illustratie een bakstenen muur, welke initieel droog is. Plotseling wordt deze

bevochtigd door een slagregen. Na 1 minuut is de hoeveelheid geabsorbeerd vocht

$$V = S\sqrt{t} = 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\sqrt{\text{s}}} \sqrt{60\text{s}} = 2,3 \text{ mm} \quad (8.49)$$

en na 1 uur is dit

$$V = 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\sqrt{\text{s}}} \sqrt{3600\text{s}} = 18 \text{ mm} \quad (8.50)$$

De gemiddelde diepte van de vochtindringing in de muur is na 1 minuut

$$\langle x \rangle = \frac{V}{n} = \frac{2,3 \text{ mm}}{0,35} = 6,6 \text{ mm} \quad (8.51)$$

en na 1 uur

$$\langle x \rangle = \frac{18 \text{ mm}}{0,35} = 51 \text{ mm} \quad (8.52)$$

Deze bevindingen betreffende absorptie werden uitgebreid door Philip in geval van verticale stroming in een poreus medium, zoals bijvoorbeeld infiltratie in een bodem, waarbij ook rekening moet gehouden worden met de zwaartekracht. Philip toonde aan dat de oplossing kan bekomen worden door  $z$  als een functie van  $\theta$  en  $t$  te beschouwen in de vorm van volgende reeksontwikkeling

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\theta) t^{i/2} = f_1 \sqrt{t} + f_2 t + f_3 t^{3/2} + \dots \quad (8.53)$$

Hierbij is  $f_1$  gelijk aan de  $f$ -functie van de horizontale absorptie. Het geïnfiltrerd volume per oppervlakte-éénheid  $V$  wordt gegeven door een gelijkaardige reeksontwikkeling

$$V = \int_{\theta_0}^n z d\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_0}^n f_i(\theta) d\theta t^{i/2} = S\sqrt{t} + At + Bt^{3/2} + \dots \quad (8.54)$$

Dit laat toe de infiltratieflux  $q$  te berekenen als

$$q = \frac{dV}{dt} = \frac{S}{2\sqrt{t}} + A + \frac{3B\sqrt{t}}{2} + \dots \quad (8.55)$$

Deze reeks is evenwel niet convergent voor grote waarden van de tijd. Echter we weten dat na een voldoende lange tijd het materiaal helemaal verzadigd wordt zodat  $\nabla\theta \approx 0$  en  $\theta \approx n$ , zodat uit vergelijking 8.34 volgt dat er alleen maar een neerwaartse flux is onder invloed van de gravitatie, gelijk aan de conductiviteit  $K_s$  van een verzadigde bodem. Dus voor  $t \rightarrow \infty$  wordt  $q$  gelijk aan  $K_s$ . Dit laat toe om de infiltratieflux te benaderen als

$$q \approx \frac{S}{2\sqrt{t}} + K_s \quad (8.56)$$

Dit is de infiltratievergelijking van Philip. De fysische interpretatie is van groot belang om infiltratieprocessen te begrijpen zoals de indringing van water in de grond. Een schematische

voorstelling van de infiltratieflex wordt gegeven in Fig. 8.12. De infiltratieflex bestaat uit twee bijdragen: een conductieflex gegeven door  $K_s$  en een absorptieflex gegeven door  $S/2\sqrt{t}$ . De conductieflex is een gevolg van de gravitatie; de waarde is constant in de tijd en gelijk aan de conductiviteit bij verzadiging vermits de grond bovenaan onmiddellijk verzadigd wordt door de infiltrerende vloeistof. De tweede bijdrage is te wijten aan de absorptie en varieert in de tijd daar deze flux afhankelijk is van de evolutie van het vochtgehalte en de absorptie eigenschappen van het poreus medium. De absorptieflex is initieel zeer groot omdat de gradiënt in het vochtgehalte zeer groot is (een nat grondoppervlak en een droge bodem). Echter deze gradiënt daalt snel in de loop van de tijd en streeft naar nul omdat er steeds meer vloeistof infiltreert, waardoor de bodem natter wordt en de absorptie snel afneemt.

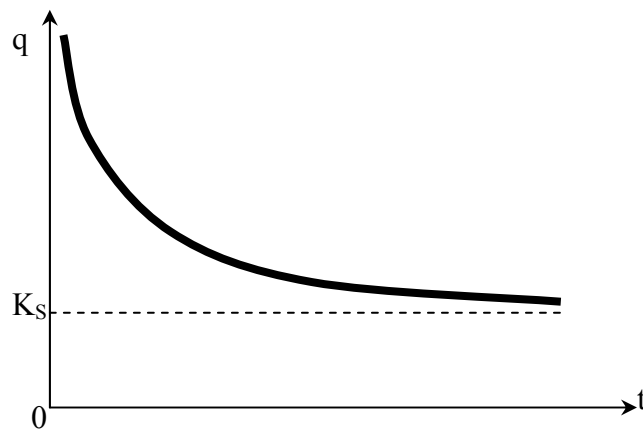


Fig. 8.12 De infiltratievergelijking van Philip.

## 8.5 Verzadigde stroming

Wanneer een poreus medium volledig verzadigd is, zijn alle poriën gevuld met vloeistof, zodat het vochtgehalte steeds gelijk is aan de porositeit,  $\theta = n$ . De variatie van het vochtgehalte met de tijd is dan gelijk aan de verandering van de porositeit

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (8.57)$$

Op eerste zicht zou men kunnen veronderstellen dat in een poreus materiaal de porositeit onveranderlijk is. Echter in de praktijk blijkt dat de porositeit afhankelijk is van de druk van de vloeistof. Een toename in de druk van de vloeistof kan er voor zorgen dat het volume van de poriën iets groter wordt en omgekeerd, zodanig dat variaties in de porositeit afhankelijk zijn van de druk of piëzometrische hoogte. Dit wordt op volgende wijze uitgedrukt

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{dn}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dn}{dp} \rho g \frac{\partial (h-z)}{\partial t} = \rho g \frac{dn}{dp} \frac{\partial h}{\partial t} = S_0 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (8.58)$$

met  $S_0 = \rho g dn/dp$  de specifieke elastische bergingscoëfficiënt met dimensies  $[L^{-1}]$ ; deze materiaaleigenschap druk uit hoe door de druk van de vloeistof de porositeit kan toenemen of

afnemen door elastische vervorming van de vaste matrix. Wanneer dit gecombineerd wordt met de algemene stromingsvergelijking 8.15 bekomt men de stromingsvergelijking voor verzadigde poreuze materialen

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h) \quad (8.59)$$

Wanneer de eigenschappen van het medium gekend zijn, nl. de doorlaatbaarheid  $K$  (dit is uiteraard de conductiviteit bij verzadiging  $K_s$ ) en de specifieke bergingscoëfficiënt  $S_0$  heeft men een vergelijking met één onbekende, nl. de piëzometrische hoogte  $h$ . De resulterende vloeistofstroming kan dan berekend worden met de wet van Darcy, vergelijking 8.13. Fysisch gezien is deze vergelijking van het diffusie-type; d.w.z. een dissipatievergelijking waarbij potentiaalverschillen zich verspreiden in het medium door de vloeistofstroming, welke afhankelijk is van de eigenschappen van het medium, zijnde conductiviteit en berging.

Ter illustratie beschouwen we het probleem van een grondwaterwinning door middel van een pompput in een volledige verzadigde grondlaag. Beschouw een horizontale verzadigde poreuze grondlaag met een constante dikte  $D$  en constante hydraulische conductiviteit  $K$ , zoals weergegeven in Fig. 8.13. Het grondwater is initieel in rust met een natuurlijk piëzometrische hoogte  $h_0$ . Een pompput geboord tot in de laag wordt uitgerust met een filter over de ganze dikte van de grondlaag en vanaf tijdstip  $t = 0$  wordt er grondwater opgepompt met een constant debiet  $Q$ .

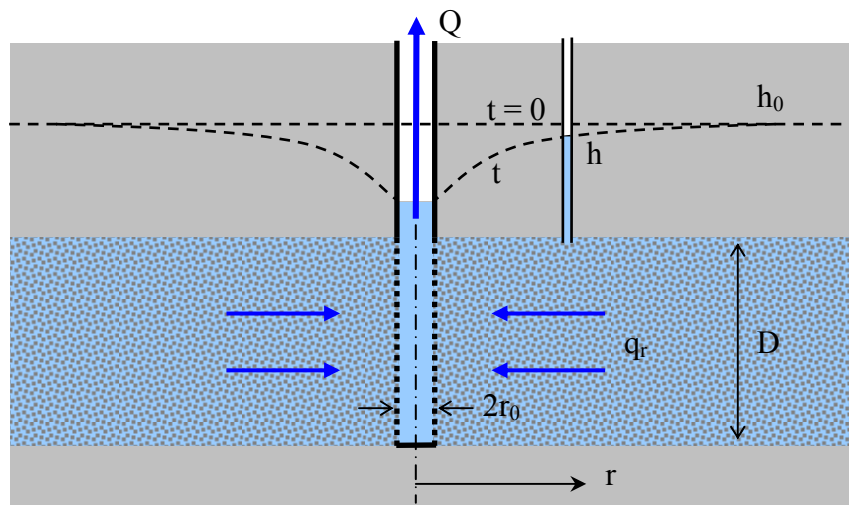


Fig. 8.13 Stroming naar een pompput.

Het probleem kan beschreven worden in cilindrische coördinaten. Omwille van de radiale symmetrie en de volledig horizontale stromingen naar de pompput is de piëzometrische hoogte alleen maar afhankelijk van de tijd  $t$  en de afstand  $r$  tot de pompput, zodat de stromingsvergelijking vereenvoudigd wordt

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h}{\partial r} \right) \quad (8.60)$$

De randvoorwaarden zijn: voor  $t = 0$  en voor  $r \rightarrow \infty$

$$h = h_0 \quad (8.61)$$

en aan de pompput  $r = r_0$  geldt dat de totale toestroming gelijk moet zijn aan het pompdebiet

$$Q = -2\pi r_0 D q_{r_0} = 2\pi r_0 DK \left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{r=r_0} \quad (8.62)$$

Om het probleem verder te vereenvoudigen, wordt verondersteld dat de straal van de pompput klein is, zodat in de limiet  $r_0 \rightarrow 0$  geldt

$$Q = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ 2\pi r DK \frac{\partial h}{\partial r} \right] \quad (8.63)$$

De oplossing wordt bekomen door een Boltzman transformatie

$$h(r, t) = h(\lambda) \quad (8.64)$$

met  $\lambda = r^2/t$ . De transformatieformules zijn

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\lambda}{t} \frac{dh}{d\lambda} \quad (8.65a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h}{\partial r} \right) = \frac{4}{t} \frac{d}{d\lambda} \left( \lambda \frac{dh}{d\lambda} \right) \quad (8.65b)$$

De stromingsvergelijking wordt dan

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \lambda \frac{dh}{d\lambda} \right) + \frac{S_0}{4K} \left( \lambda \frac{dh}{d\lambda} \right) = 0 \quad (8.66)$$

Integratie geeft

$$\lambda \frac{dh}{d\lambda} = c^{te} \cdot \exp\left(\frac{-S_0 \lambda}{4K}\right) \quad (8.67)$$

De integratieconstante wordt bekomen met de randvoorwaarde 8.63, omdat voor  $r \rightarrow 0$  ofwel  $\lambda \rightarrow 0$  geldt dat  $Q = 4\pi DK \lambda dh/d\lambda$ , zodat

$$\lambda \frac{dh}{d\lambda} = \frac{Q}{4\pi DK} \exp\left(\frac{-S_0 \lambda}{4K}\right) \quad (8.68)$$

Nogmaals integreren geeft

$$h = \frac{Q}{4\pi DK} \int_{c^{te}}^{\lambda} \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{-S_0 \lambda}{4K}\right) d\lambda \quad (8.69)$$

De integratieconstante wordt bekomen met de randvoorwaarden voor  $r \rightarrow \infty$  of  $t \rightarrow 0$ , d.w.z.

voor  $\lambda \rightarrow \infty$  geldt dat  $h = h_0$ , waaruit volgt

$$h = h_0 - \frac{Q}{4\pi DK} \int_{r^2/t}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{-S_0\lambda}{4K}\right) d\lambda \quad (8.70)$$

Dit is de vergelijking van Theis welke toelaat een grondwaterwinning te dimensioneren. De vergelijking wordt meestal geschreven in volgende vorm

$$s = \frac{Q}{4\pi KD} W\left(\frac{S_0 r^2}{4Kt}\right) \quad (8.71)$$

met  $s = h_0 - h$  de daling in piëzometrische hoogte ook afpompingsgenoemd en  $W$  de Theis-functie gegeven door

$$W(u) = \int_u^{\infty} u^{-1} e^{-u} du \quad (8.72)$$

Deze functie moet numeriek berekend worden, ofwel met een reeksontwikkeling

$$W(u) = -\gamma - \ln(u) + u - \frac{u^2}{2.2!} + \frac{u^3}{3.3!} - \frac{u^4}{4.4!} + \dots \quad (8.73)$$

met  $\gamma = 0,5772\dots$ , het getal van Euler. Voor korte afstanden dicht bij de pompput en grote tijden ( $u < 0,1$ ) volstaan de eerste twee termen van de reeks, zodat

$$W(u) \approx -\gamma - \ln(u) = \ln(e^{-\gamma}/u) \approx \ln(0,561/u) \quad (8.74)$$

waaruit volgt

$$s \approx \frac{Q}{4\pi KD} \ln\left(\frac{2,25Tt}{S_0 r^2}\right) = \frac{Q}{2\pi KD} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \quad (8.75)$$

met  $R$  de invloedstraal van de pompput gegeven door

$$R = \sqrt{\frac{2,25Kt}{S_0}} \quad (8.76)$$

Dit is de formule van Jacob. De afpompingshoogte is maximaal ter hoogte van de pompput en neemt lineair af met de logaritme van de afstand tot de pompput. De invloedstraal, dit is de plaats waar de afpompingshoogte gelijk is aan nul ( $r = R$  impliceert  $s = 0$ ), is afhankelijk van de conductiviteit en de bergingscoëfficiënt en neemt toe met de wortel van de tijd. Echter in de praktijk zal er een evenwicht optreden zodra er voldoende natuurlijke toevoer is naar de grondwaterlaag (zoals infiltratie van regenwater) waardoor het pompdebiet gecompenseerd wordt. De evenwichttoestand wordt dan gegeven door vergelijking 8.75 met  $R$  constant in de tijd en afhankelijk van de lokale omstandigheden.

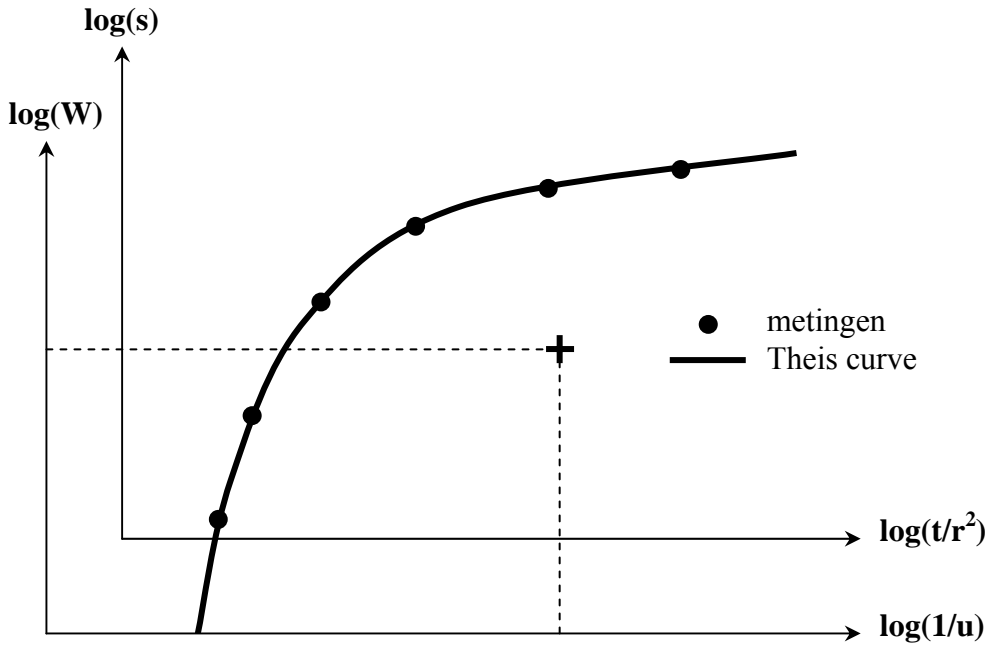


Fig. 8.14 Interpretatie van een pompproef volgens de methode van Theis.

De Theis-formule laat ook toe om met behulp van een pompproef de hydraulische eigenschappen van de grondlaag te bepalen. Bij een pompproef wordt de daling van het piëzometrisch niveau opgemeten in enkele piëzometers geplaatst op verschillende afstanden van de pompput. Wanneer de afpomping  $s$  wordt uitgezet volgens  $t/r^2$  op dubbel logaritmisch papier moet deze curve overeenkomen met de Theis-functie  $W$  uitgezet volgens  $1/u$ , vermits  $s$  evenredig is met  $W$  en  $t/r^2$  evenredig met  $1/u$ . Nadat deze curven over elkaar geplaatst zijn, zoals weergegeven in Fig. 8.14, noteert men de overeenkomstige coördinaten van een willekeurig punt en berekent men  $K$  en  $S$  als volgt

$$K = \frac{QW}{4\pi Ds} \quad (8.77)$$

$$S_0 = \frac{4K(t/r^2)}{(1/u)} \quad (8.78)$$

Een eenvoudiger methode maakt gebruik van de benadering van Jacob. De afpomping  $s$  wordt uitgezet volgens  $t/r^2$  op semi-logaritmisch papier waarna een rechte kan getrokken worden door de punten voor  $t/r^2$  voldoende groot (Fig. 8.15). De helling van de lijn wordt bepaald door het interval  $\Delta s$  af te lezen dat overeenkomt met een logaritmisch interval (de afstand tussen eender welk getal en 10 maal dat getal) op de  $\log(t/r^2)$ -as. Hiermee kan men  $K$  berekenen

$$K = \frac{2,3Q}{4\pi D\Delta s} \quad (8.79)$$

De factor 2,3 volgt uit het gebruik van de 10-delige logaritme i.p.v. de natuurlijke logaritme. Het snijpunt  $\log(a)$  van de rechte met de  $\log(t/r^2)$ -as geeft de bergingscoëfficiënt  $S_0$

$$S_0 = 2,25Ka \quad (8.80)$$

Een nog eenvoudigere methode bestaat erin om de afpomping opgemeten op een bepaald tijdstip (bij voorkeur nadat er een evenwicht is bereikt) uit te zetten volgens  $r$  op semi-logaritmisch papier. Door de meetpunten kan een rechte worden getrokken voor  $r$  voldoende klein (Fig. 8.16). De helling van de lijn wordt opnieuw bepaald door het interval  $\Delta s$  af te lezen dat overeenkomt met 1 logaritmisch interval, waarmee men  $K$  kan berekenen

$$K = \frac{2,3Q}{2\pi D\Delta s} \quad (8.81)$$

Het snijpunt van de rechte met de  $r$ -as geeft de invloedstraal  $R$ .

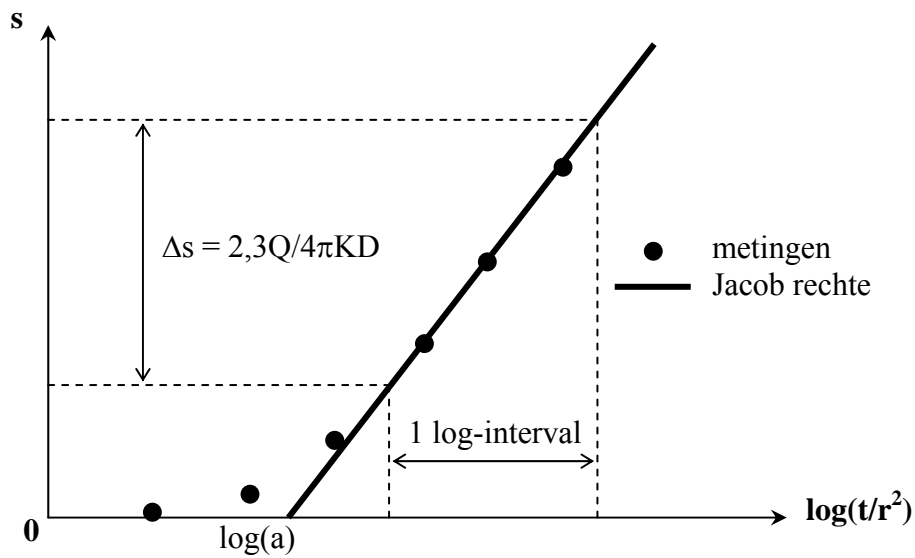


Fig. 8.15 Interpretatie van een pompproef volgens de methode van Jacob.



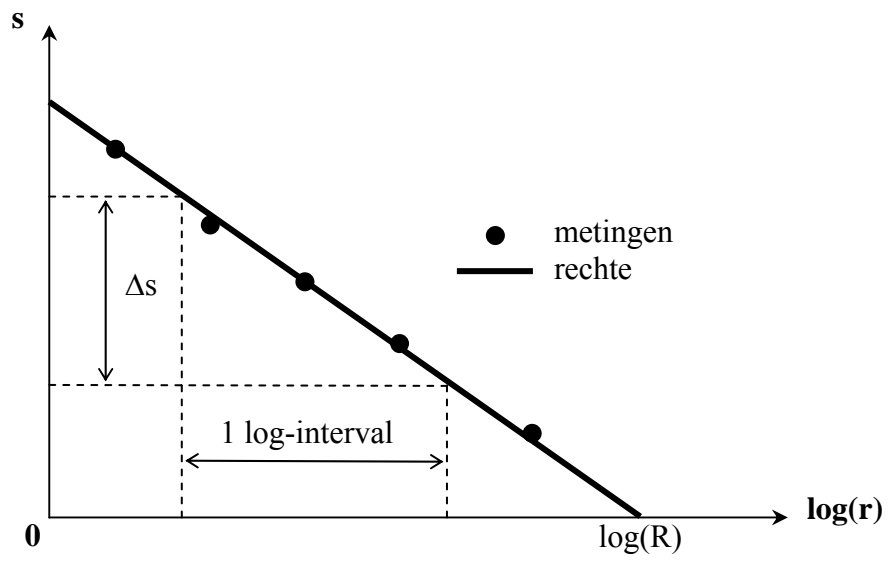


Fig. 8.16 Interpretatie van een pompproef volgens de  $\log(r)$ -methode.

## REFERENTIES

---

Volgende werken zijn aanwezig in de centrale bibliotheek van de VUB of bij de vakgroep Hydrologie en Waterbouwkunde in gebouw T. Deze werken kunnen uitgeleend of ter plaatse geconsulteerd worden.

- Berlamont, J., 1992. *Hydraulica*. Wouter Uitgeverij, Leuven: 472 pp.
- Çengel, Y.A, and J.M. Cimbala, 2006. *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*, McGraw-Hill: 956 pp.
- Chadwick A., and J. Morfett, 1998. *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*. 3<sup>rd</sup> ed., Spon, London: 600 pp.
- Dekkers, N.H. and J.M.H. Wijnen, 2006. *Eenvoudige stromingsleer*. Delta Press, Nederland: 283 pp.
- Douglas, J. F. and R. D. Matthews, 1986. *Solving Problems in Fluid Mechanics – Volume 1*. Longman LTD., England: 268 pp.
- Douglas, J. F. and R. D. Matthews, 1986. *Solving Problems in Fluid Mechanics – Volume 2*. Longman LTD., England: 289 pp.
- Graf, W. H., 1998. *Fluvial hydraulics - Flow and Transport Processes in Channels of Simple Geometry*. John Wiley & Sons: 681 pp.
- Granger, R. A., 1995. *Fluid Mechanics*. Dover Publications, Inc., New York: 896 pp.
- Gray, D. D., 2000. *A First Course in Fluid Mechanics for Civil Engineers*, Water Resources Publ., LLC: 487 pp.
- Liggett, J. A. and D. A. Caughey, 1998. *Fluid Mechanics*, American Society for Civil Engineers.
- Mott, R.L., 2006. *Applied Fluid Mechanics*. Pearson Prentice Hall: 626 pp.
- Nortier, I. W. en P. de Koning, 1994. *Toegepaste vloeistofmechanica – Hydraulica voor waterbouwkundigen*. Stam Techniek: 489 pp.
- Streeter, V. L. and E. B. Wylie, 1985. *Fluid Mechanics*. McGraw Hill Book Company: 586 pp.
- Young, D. F., B. R. Munson, and T.H. Okiishi, 2001. *A Brief Introduction to Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons: 517 pp.