

MOTEUR SYNCHROME MONOPHASÉ À EXCITATION PAR AIMANTS PERMANENTS ET À ALIMENTATION ÉLECTRONIQUE

On se propose d'étudier un moteur de petite puissance dont la structure est souvent utilisée pour la réalisation des ventilateurs dits «à courant continu sans balais». La structure du moteur est monophasée, de type synchrone à aimants permanents, son alimentation est électronique et autopilotée.

Première partie : Étude Électromagnétique du moteur

Dans la première partie, on demande d'effectuer l'analyse électromagnétique du moteur synchrone monophasé à structure inversée : le stator à pôles saillants est intérieur et le rotor est extérieur. La figure 1 montre la structure générale du moteur seul, les parties mécaniques assurant le maintien de l'ensemble et le guidage en rotation ainsi que l'électronique d'alimentation ne sont pas représentées. L'ensemble a une longueur magnétique active L (dans la dimension perpendiculaire au plan de la figure) et les bobinages, entourant les pôles, se referment aux extrémités en formant des "têtes de bobines".

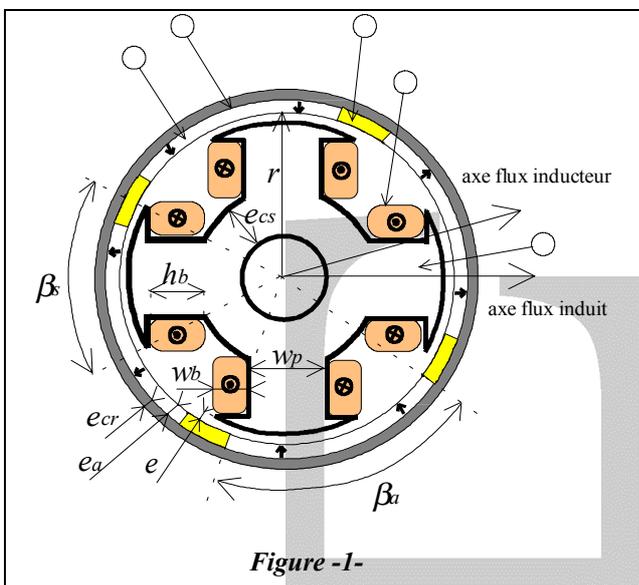


Figure -1-

Rotor :

- ① : culasse rotorique (ferromagnétique, fer massif).
- ② : 4 aimants permanents de polarités alternées, solidaires de la culasse rotorique.
- ③ : zone interpolaire d'aimantation nulle et de perméabilité égale à celle de l'aimant.

Stator :

- ④ : bobinage : 4 bobines concentriques placées autour de chaque pôle statorique, l'orientation des courants est précisée (croix = courant s'éloignant, point = courant se rapprochant). Les 4 bobines possèdent $n/4$ spires et sont parcourues en série par un même courant i . En outre elle seront supposées de section rectangulaire.
- ⑤ : circuit magnétique statorique feuilleté comprenant 4 pôles saillants.

Principaux paramètres dimensionnels et notations :

- $\alpha_p = \frac{\pi}{2}$ est l'angle polaire (le moteur étudié ici possède 4 pôles) ;
- e_a , épaisseur d'aimant ;
- S_a section d'aimant (par rapport au sens de passage de son flux) ;
- β_a angle (en radians) de la zone aimantée d'un pôle inducteur ;
- e valeur de l'entrefer sous un pôle ;
- r rayon d'entrefer ;
- L longueur magnétique active (identique pour le rotor et le stator) ;
- β_s angle (en radians) d'un pôle statorique (épanouissement polaire compris) ici supposé égal à β_a (attention la figure 1 montre un cas général où $\beta_s < \beta_a$) ;
- w_s largeur d'un pôle au niveau de l'entrefer : $w_s = \beta_s \cdot r$;
- w_p largeur d'un pôle au niveau du bobinage ;
- w_b largeur bobinable sur un pôle ;
- h_b hauteur bobinable sur un pôle ;
- $S_b = h_b \cdot w_b$ section bobinable sur un pôle ;
- L_b longueur moyenne d'une spire autour d'un pôle ;
- k_b rapport de la section nette de cuivre sur la section bobinable ;
- e_{cr} épaisseur de la culasse rotorique ;
- e_{cs} épaisseur de la culasse statorique .

Valeurs numériques utiles pour les applications :

$e_a = 2 \text{ mm}$	$\beta_s = \beta_a = 80^\circ$
$e = 0.5 \text{ mm}$	$r = 15 \text{ mm}$
$L = 10 \text{ mm}$	
$h_b = 4 \text{ mm}$	$w_b = 2 \text{ mm}$
$w_p = 3 \text{ mm}$	
$e_{cr} = 1,6 \text{ mm}$	$e_{cs} = 2 \text{ mm}$

Hypothèses (sauf indications contraires) :

- **H1)** Les matériaux magnétiques doux statoriques et rotoriques sont linéaires, sans saturation magnétique, de perméabilité infinie et sans pertes magnétiques.
- **H2)** Les aimants permanents ont une induction rémanente B_r constante et une perméabilité incrémentale $\mu_a \cdot \mu_o$ (où μ_a est la valeur relative et μ_o est la perméabilité du vide), leur modèle B(H) est tel que : $B = B_r + \mu_a \cdot \mu_o \cdot H$, leur épaisseur e_a est constante, leur section, définie en négligeant l'effet de courbure, est notée S_a , (chaque aimant est, en fait, considéré parallélépipédique).
- **H3)** Les flux suivent des trajets simplifiés, on négligera tous les effets de bord et on supposera que les lignes de champ n'empruntent que les plus « courts chemins ».
- **H4)** Enfin pour simplifier les expressions des calculs, on supposera : e_a et $e \ll r$.

Conformément aux hypothèses, les flux d'induction, produits respectivement par l'inducteur et par l'induit, seront étudiés séparément.

La figure 2 montre une vue, développée au niveau de l'entrefer de deux pôles (distants de $\alpha_p \cdot r$), sur laquelle on effectuera l'analyse des flux. On y a précisé les angles β_a et β_s (égaux dans la totalité du problème) de la structure cylindrique et les longueurs correspondantes w_a et w_s (aussi égales) entre parenthèses. θ_m est l'angle mécanique entre l'axe du flux inducteur et l'axe du flux induit. On a représenté aussi deux vues (figure 4) dans des positions extrêmes de flux.

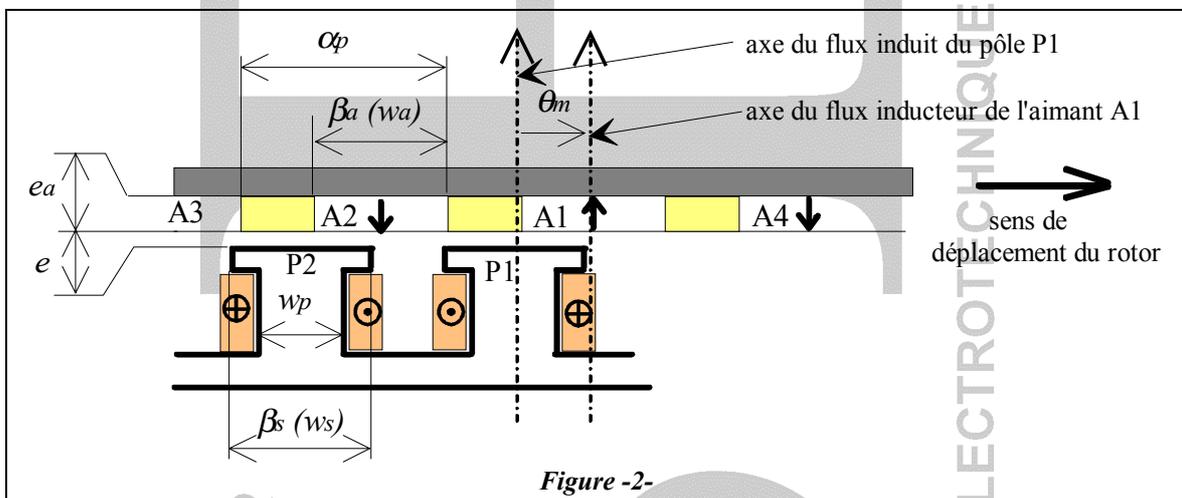


Figure -2-

On admet les conventions suivantes :

- le flux d'un aimant nord est supposé sortant et donc, pour un aimant sud, il est entrant ;
- le signe du flux inducteur reçu dans un pôle sera considéré positif s'il est de même signe que celui créé par son bobinage induit (dont les courants sont orientés) et négatif dans le cas contraire.

1- Étude de l'inducteur (en l'absence de courant dans le bobinage induit)

On suppose que chaque aimant est un générateur de force magnétomotrice $E_a = \frac{B_r}{\mu_a \cdot \mu_o} \cdot e_a$ et de réluctance égale à celle du parallélépipède équivalent.

Les valeurs numériques des caractéristiques des aimants valent : $B_r = 0,2 \text{ T}$, $\mu_a = 1$.

En outre, on se place dans les conditions géométriques particulières suivantes :

$$\beta_s = \beta_a \text{ (rappel) et } \beta_a > \frac{\alpha_p}{2}$$

1.1- Préliminaires : étude d'un circuit magnétique élémentaire.

La figure 3 représente un circuit magnétique élémentaire comprenant deux parties, l'une fixe et l'autre mobile. La partie fixe est en matériau ferromagnétique doux et supporte un bobinage. La partie mobile est également en matériau ferromagnétique doux, soit sans aimants (partie gauche de la figure) soit avec aimants (partie droite de la figure). La partie mobile ne peut se déplacer qu'en translation, la position de l'axe de ses pôles par rapport à celui des pôles de la partie fixe est notée x . Les différentes dimensions utiles sont repérées sur la figure : w : largeur des pôles (fixes et mobiles), e : entrefer, L : épaisseur de l'ensemble.

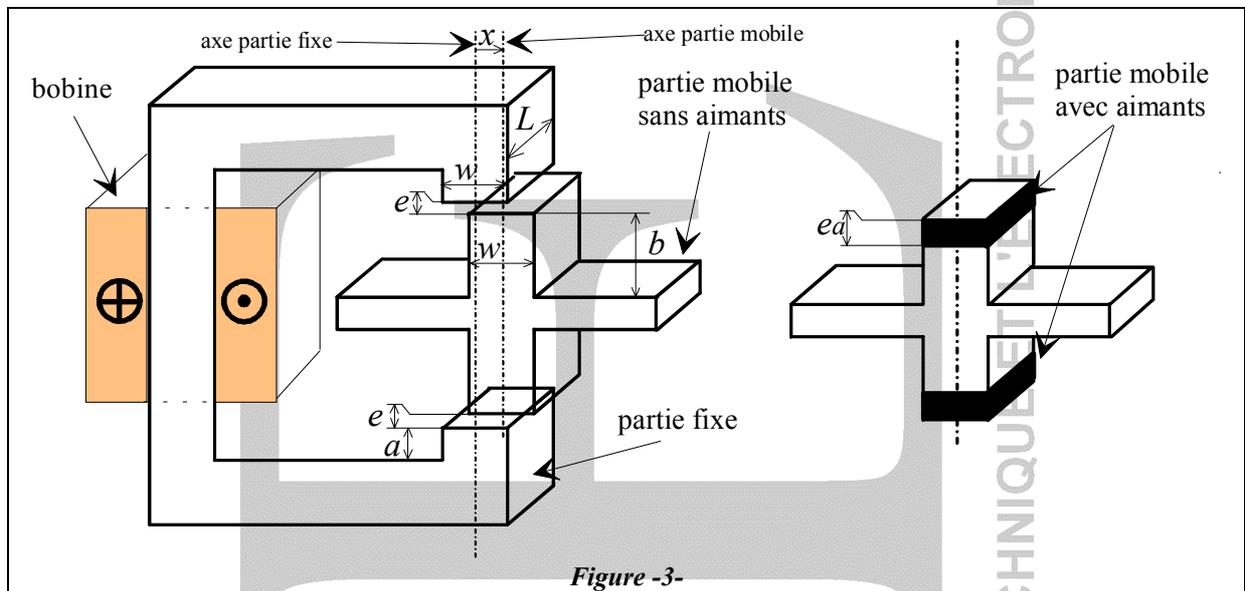


Figure -3-

1.1.1- Soit le circuit magnétique élémentaire dont la partie mobile ne comprend aucun aimant. Dans le cadre des hypothèses H1 à H3 appliquées à ce circuit, déterminer l'expression de la réluctance $R_e(x)$ des deux entrefers en fonction de la position x : pour $0 \leq x \leq w$.

Pour $x > w$, on précisera la valeur vers laquelle tend $R_e(x)$, en supposant, en outre, que a et $b \gg e$.

1.1.2- Soit maintenant le circuit élémentaire constitué de la partie fixe précédente et de la partie mobile comprenant des aimants caractérisés comme dit ci-dessus. Déterminer le schéma magnétique équivalent permettant d'établir le flux inducteur embrassé par la bobine et faisant intervenir les forces magnétomotrices E_a de chaque aimant, leur réluctance R_a ainsi que la réluctance d'entrefer $R_e(x)$. Donner les expressions de E_a et de R_a .

1.2- Calcul des réluctances du circuit magnétique du moteur.

1.2.1- Trajet du flux inducteur

1.2.1a- Dessiner en traits discontinus, sur la figure A1 du document réponse, le trajet du flux inducteur et son orientation (quelques lignes de champ) dans les 4 pôles et pour les deux positions du rotor représentées.

1.2.1b- Le trajet du flux dépend-il de la position du rotor ?

1.2.2- Dans le cadre des hypothèses $H1$ à $H4$, déterminer, en fonction des paramètres géométriques (e , e_a , r , L , $\beta_s = \beta_a$ et α_p) et des caractéristiques utiles des aimants, les expressions de R_a la réluctance d'un aimant, de $R_{e1}(\theta_m)$ et de $R_{e2}(\theta_m)$ les réluctances d'entrefer des zones du pôle P1, respectivement, en regard de l'aimant sud A1 et de l'aimant nord A2, exprimées en fonction de l'angle θ_m sur un demi-cycle magnétique de déplacement, c'est à dire de 0 à $\alpha_p = \frac{\pi}{2}$ (Voir figure 4).

On distinguera 3 cas en fonction des valeurs de θ_m :

- cas 1)** de 0 à $\alpha_p - \beta_a$,
- cas 2)** de $\alpha_p - \beta_a$ à β_a ,
- cas 3)** de β_a à α_p .

1.2.3- Donner les expressions des valeurs extrêmes (minimale et maximale) des réluctances $R_{e1}(\theta_m)$ et $R_{e2}(\theta_m)$.

1.2.4- Calculer les valeurs numériques de R_a , $R_{e1}(\theta_m)$ et $R_{e2}(\theta_m)$.

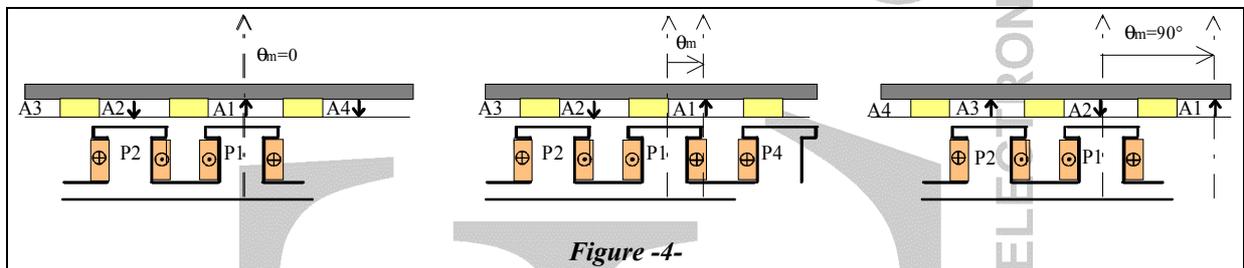


Figure -4-

1.3- Calcul du flux inducteur par pôle.

On appelle flux inducteur par pôle le flux embrassé par le bobinage entourant ce pôle.

1.3.1- Déterminer le schéma équivalent magnétique (avec forces magnétomotrices et réluctances) permettant de calculer le flux inducteur $\varphi_{fp}(\theta_m)$ par pôle pour $0 \leq \theta_m \leq \alpha_p$ dans le cas du pôle P1 représentatif des autres pôles. Pour cela on considère les 2 aimants A1 et A2 ainsi que les 3 pôles P1, P2 et P4 qui se trouvent en regard des 2 aimants.

On note que les réluctances d'entrefer de A2 vers P2 (égale à celle de A1 vers P1) et de A1 vers P4 (égale à celle de A2 vers P1) valent respectivement $R_{e1}(\theta_m)$ et $R_{e2}(\theta_m)$.

On appelle φ_{fp1} et φ_{fp2} les flux produits respectivement par les aimants A1 et A2 dans le pôle P1.

1.3.2- Calculer les expressions de $\varphi_{fp1}(\theta_m)$, $\varphi_{fp2}(\theta_m)$, et $\varphi_{fp}(\theta_m)$ en fonction de la force magnétomotrice E_a des aimants et des réluctances R_a , $R_{e1}(\theta_m)$ et $R_{e2}(\theta_m)$.

1.3.3- Calculer l'expression du flux φ_{fpMax} maximal par pôle, embrassé par une spire. Donner sa valeur numérique.

1.3.4- Détermination de la fonction $\varphi_{fp}(\theta_m)$

1.3.4a- À partir des expressions des réluctances déterminées à la question 1.2, déterminer dans chaque domaine de θ_m , l'expression du flux par pôle $\varphi_{fp}(\theta_m)$.

1.3.4b- Quelle est la périodicité de la fonction $\varphi_{fp}(\theta_m)$?

1.3.4c- Tracer approximativement la courbe correspondante sur un déplacement d'un cycle entier (θ_m de 0 à $2 \cdot \alpha_p = \pi$). On précisera sur la courbe, les valeurs numériques particulières du flux (pour $\theta_m = 0$, $\theta_m = 10^\circ$ et $\theta_m = 45^\circ$).

1.4- Estimation des niveaux d'induction dans le circuit magnétique et des pertes fer.

En supposant que le flux inducteur est prépondérant pour définir l'état magnétique du circuit magnétique, on se propose d'évaluer approximativement les niveaux d'induction et la valeur des pertes fer. On négligera les pertes dans le rotor (culasse et aimants) et on supposera essentiellement deux zones caractéristiques au stator, les dents et les culasses statoriques, dans lesquelles l'induction est uniforme mais variable sinusoïdalement dans le temps.

1.4.1- Déterminer approximativement les valeurs numériques de l'induction maximale, respectivement, B_{cr} dans la culasse du rotor, B_{ps} dans les pôles (hors cornes polaires) du stator et B_{cs} dans les zones de culasse du stator.

1.4.2- Les pertes au rotor sont-elles totalement nulles même lorsque le champ d'induit reste négligeable ? Justifier la réponse.

1.4.3- Pour évaluer les pertes fer au stator, on supposera que la forme du flux est sinusoïdale d'amplitude égale à φ_{fpMax} déterminée à la question 1.3.3. Le modèle de pertes massiques proposé est le suivant :

$$p_f = k_1 \cdot B_M^2 \cdot f^2 + k_2 \cdot B_M^2 \cdot f \text{ en W/kg avec } k_1 \cong 3 \cdot 10^{-4} \text{ et } k_2 \cong 8 \cdot 10^{-2} \text{ unités S.I.}$$

1.4.3a- Justifier ce modèle.

1.4.3b- Pourquoi le stator est-il constitué d'un empilage de tôles ?

1.4.3c- Quel est le terme, de l'expression des pertes précédente, affecté par l'épaisseur des tôles ?

1.4.4- La masse volumique du matériau magnétique statorique vaut 7600 kg.m^{-3} . Les volumes totaux des zones de culasses statoriques V_{cs} et de pôles statoriques V_{ps} sont estimés respectivement aux valeurs suivantes : $V_{cs} = 0,3 \text{ cm}^3$ et $V_{ps} = 1,6 \text{ cm}^3$, évaluer les pertes fer à une vitesse de 3000 tr/mn .

1.5- Calcul du flux produit par les aimants.

On cherche maintenant à déterminer –non plus le flux des aimants traversant les pôles statoriques– mais la totalité du flux délivré par les aimants que l'on notera $\varphi_a(\theta_m)$ pour chaque aimant identique aux autres.

1.5.1- En réutilisant le schéma équivalent obtenu à la question 1.3.1, donner l'expression de $\varphi_a(\theta_m)$ en fonction de la force magnétomotrice E_a des aimants et des réductances R_a , $R_{e1}(\theta_m)$ et $R_{e2}(\theta_m)$.

1.5.2- En reprenant les trois zones (cas 1 à 3 définis en 1.2.2) selon les valeurs de θ_m , déterminer les expressions de $\varphi_a(\theta_m)$ et des valeurs minimale et maximale du flux d'un aimant : φ_{aMin} et φ_{aMax} .

1.5.3- Calculer les valeurs numériques de φ_{aMin} et φ_{aMax} et tracer l'allure de la courbe $\varphi_a(\theta_m)$.
Quelle est la périodicité de la fonction $\varphi_a(\theta_m)$?

2- Étude de l'induit (en l'absence d'aimantation des pôles)

On restera dans le cadre des hypothèse H1 à H4 et en considérant la perméabilité relative du milieu des aimants (μ_a) égale à 1 même lorsqu'ils ne sont pas aimantés.

2.1- Indépendance des flux inducteur et induit.

Pourquoi peut-on étudier séparément le flux inducteur et le flux induit ? Quelle(s) hypothèse(s) permet(tent) cette séparation ?

Cela semble-t-il réaliste dans ce moteur ? Pourquoi ?

Est-ce toujours possible pour tous les moteurs électromagnétiques ?

2.2- Trajet du flux induit.

2.2.1- Tracer en pointillés, sur la figure A2 du document réponse, le trajet des flux produits et leur orientation par les 4 bobinages statoriques d'induit excités simultanément et identiquement.

2.2.2- Le trajet du flux induit dépend-il de la position du rotor ? Pourquoi ? Dans quels cas rencontre-t-on la situation contraire ?

2.3- Perméance d'induit.

2.3.1- Déterminer le schéma équivalent magnétique comprenant, d'une part, les 4 forces magnétomotrices de chaque pôle, d'amplitude $\frac{E}{4} = \frac{n \cdot i}{4}$, et d'autre part, 4 réluctances notées R_{ep1} à R_{ep4} vues des pôles et sur lequel figurent les flux induits φ_{pp1} à φ_{pp4} des 4 pôles.

2.3.2- Calculer les expressions des réluctances R_{ep} (identiques) et des flux induits par pôle φ_{pp} (identiques).

2.3.3- Le flux propre total embrassé par le bobinage d'induit vaut : $\varphi_p = 4 \cdot \frac{n}{4} \cdot \varphi_{pp} = n \cdot \varphi_{pp}$. Déterminer l'expression de la perméance équivalente P telle que : $\varphi_p = \frac{\varphi_p}{n} = P \cdot E$ où φ_p est le flux propre équivalent.

Cette perméance dépend-elle de la position du rotor ?

2.3.4- Calculer les valeurs numériques de R_{ep} , P, et φ_p si $E = 100$ A.

3- Étude de la conversion d'énergie électromécanique

On suppose maintenant le moteur avec ses aimants aimantés et alimenté par un courant i générant une force magnétomotrice totale $E = n \cdot i$.

On rappelle que l'expression du couple électromagnétique d'un dispositif monophasé, en convention moteur, est :

$$c_{em} = \frac{\partial W'_{em}(i, \theta_m)}{\partial \theta_m} \quad (1.1)$$

où $W'_{em}(i_0, \theta_m)$ est la coénergie magnétique, fonction du courant d'alimentation et de la position relative θ_m du rotor par rapport au stator, définie par :

$$W'_{em}(i_0, \theta_m) = \int_0^{i_0} \phi(i, \theta_m) \cdot di \quad (1.2)$$

où $\phi(i, \theta_m)$ est le flux total embrassé par le bobinage d'alimentation "interface" électromagnétique, ce flux correspond, dans ce problème, aux contributions de l'inducteur et de l'induit.

3.1- Principe du calcul du couple électromagnétique.

Montrer, à partir des variations d'énergie d'un système électromagnétique sans pertes alimenté par un seul bobinage (monophasé), comment l'on obtient l'expression du couple électromagnétique (1.1).

3.2- Couple synchrone.

Le nombre n de spires du bobinage n'étant pas encore défini, le moteur est étudié en supposant que toutes les spires bobinées sur chaque pôle embrassent un flux identique $\varphi_{tp} = \varphi_{fp} + \varphi_{pp}$ égal à la somme du flux produit par l'inducteur et du flux propre (définis dans les ensembles de questions 1 et 2).

3.2.1- Calcul du couple électromagnétique dû aux échanges d'énergie avec le bobinage d'induit et désigné par couple synchrone.

Déterminer l'expression de la coénergie magnétique du bobinage complet d'induit exprimée en fonction du flux inducteur $\varphi_{fp}(\theta_m)$, de la perméance équivalente P et la force magnétomotrice totale E.

3.2.2- On approxime la fonction $\varphi_{fp}(\theta_m)$ (définie par parties et obtenue à la question 1.3.4) successivement à un triangle puis à une sinusoïde d'amplitude φ_{fpMax} . Si le bobinage est alimenté par un courant correspondant à une force magnétomotrice E_o continue unidirectionnelle, tracer, dans les deux cas de forme du flux inducteur, sur le même graphique l'allure du couple synchrone en fonction de la position angulaire θ_m et calculer son amplitude.

3.2.3- Supposons que l'on alimente le bobinage d'induit par un courant délivrant une force magnétomotrice $E(\theta_m)$ fonction de la position angulaire de forme rectangulaire d'amplitude E_{Max} , négative lorsque le flux est décroissant (de 0 à α_p) et positive lorsque le flux est croissant (de α_p à

2. α_p). Déterminer les expressions du couple synchrone moyen $2.\alpha_p$ obtenu dans les deux cas idéalisés de formes du flux inducteur.
Effectuer les applications numériques si $E_{Max} = 100$ A.

3.3- Calcul du couple de détente.

Le couple de détente est le couple, en l'absence de courant d'induit, lié aux variations du flux des aimants dues à la variation de la réluctance du circuit magnétique vue des aimants lors de la rotation. On reprend les résultats de la question 1.5 et on fait l'hypothèse très simplificatrice d'une absence de couplage magnétique entre aimants, ce qui permet de n'étudier qu'un seul aimant à la fois.

3.3.1- Exprimer la coénergie $W'_{aem}(E_a, \theta_m)$ d'un aimant en fonction de la position en écrivant que la perméance vue d'un aimant a pour expression $P_{aa}(\theta_m)$ telle que $\varphi_a(\theta_m) = P_{aa}(\theta_m) \cdot E_a$.

3.3.2- On suppose que la perméance $P_{aa}(\theta_m)$ varie sinusoïdalement entre les deux valeurs extrêmes que l'on pourrait déterminer à partir des résultats obtenus à la question 1.5. En utilisant la méthode des variations de la coénergie déterminer l'expression du couple électromagnétique de détente c_{emd} en fonction de E_a , φ_{aMax} et φ_{aMin} (déterminés à la question 1.5.2).

Que vaut sa valeur moyenne ?

3.3.3- Calculer numériquement son amplitude C_{emdMax}

3.3.4- En l'absence de courant d'induit, dans quelles positions stables se place le rotor ? Dans ces positions que vaudrait le couple synchrone si l'on alimentait l'induit ? Le moteur peut-il démarrer ?

3.4- Calcul de la résistance du bobinage d'induit et des pertes par effet Joule.

On suppose que les bobines concentrées qui entourent chaque pôle ont une section rectangulaire de dimensions notées h_b (hauteur bobinable) et w_b (largeur bobinable) précisées au début de l'énoncé. Quel que soit le nombre de spires, la section $S_b = h_b \cdot w_b$ dite bobinable reste constante, la section du fil est donc dépendante du nombre de spires. On notera k_b le rapport de la section nette de cuivre sur la section bobinable (prise en compte de l'isolant des fils et de leur foisonnement), k_b est supposé également constant.

3.4.1- Soit L_b la longueur moyenne d'une spire, montrer que la résistance totale du bobinage d'induit peut se mettre sous la forme : $R_b = n^2 \cdot r_b$ où r_b est appelée résistance spécifique. Donner son expression en fonction des paramètres géométriques et de la résistivité ρ du conducteur utilisé.

3.4.2- Exprimer les pertes par effet Joule, notées P_J , en fonction de r_b et de la force magnétomotrice E_{Max} dans le cas où elle a la forme rectangulaire décrite à la question 3.2.3. Pour un couple moyen donné, les pertes par effet Joule dépendent-elles du nombre de spires ?

3.4.3- Déterminer les valeurs numériques de la résistance spécifique et des pertes par effet Joule si $E_{Max} = 100$ A, $\rho = 2 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$, $L_b = 32$ mm et $k_b = 0,3$.

3.4.4- Effectuer un calcul numérique du rendement électromagnétique (dans lequel on néglige les pertes mécaniques) η_{em} à 3000 tr/mn dans le cadre des différentes hypothèses émises et, en particulier, en supposant un flux inducteur sinusoïdal et une force magnétomotrice rectangulaire d'amplitude 100 A.

3.5- Équation d'alimentation.

3.5.1- Écrire, en convention récepteur, l'équation différentielle d'alimentation qui lie la tension d'alimentation v au courant i et qui fait intervenir le flux inducteur par pôle $\varphi_{fp}(\theta_m)$, la perméance équivalente P , la résistance spécifique r_b et le nombre de spires n du bobinage d'induit, en convention récepteur électrique.

3.5.2- Écrire, cette fois, l'équation liant la tension v à la force magnétomotrice E .

3.5.3- Écrire l'équation précédente en faisant intervenir la vitesse angulaire mécanique $\Omega = \frac{d\theta_m}{dt}$. Que peut on dire du nombre de spires, à couple et vitesse donnés ?

Deuxième partie : Étude de l'alimentation électronique

Dans cette étude, on suppose le circuit magnétique non saturable et les pertes magnétiques négligeables, sauf à la question 2.4 où l'on précise un modèle de pertes magnétiques. L'alimentation est autopilotée, c'est à dire que la tension ou le courant est imposé relativement à la position.

On suppose que l'équation fondamentale d'alimentation du moteur en convention récepteur électrique est :

$$v = e + R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} \quad (2.1)$$

où v est la tension d'alimentation ;

i est le courant injecté dans le bobinage d'induit ;

e est la force contre-électromotrice créée par les aimants et dont la forme est définie en fonction de la position et dont l'amplitude est proportionnelle à la vitesse ;

R est la résistance et L est l'inductance propre du bobinage d'induit ;

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme :

$$v = n \cdot \left[\frac{d\varphi_f(\theta)}{dt} + r \cdot ni(\theta) + P \cdot \frac{dni(\theta)}{dt} \right] \quad (2.2)$$

où :

- n est le nombre de spires ;

- $\varphi_f(\theta)$ est le flux inducteur fonction de la position angulaire électrique $\theta = p \cdot \theta_m$ (θ_m est l'angle mécanique entre rotor et stator), son amplitude est φ_{fMax} , sa forme est supposée d'abord sinusoïdale puis triangulaire ;

- r est homogène à une résistance et est appelée résistance spécifique ;

- P est la perméance du circuit magnétique équivalent d'induit ;

- $ni(\theta)$ représente les ampères-tours d'alimentation d'induit injectés qui sont fonction de la position angulaire.

Les valeurs numériques utiles pour les applications sont :

$$p = 2$$

$$P = 20 \text{ nH}$$

$$r = 70 \text{ } \mu\Omega$$

$$\varphi_{fMax} = 30 \text{ } \mu\text{Wb}$$

Le couple électromagnétique c_{em} instantané est obtenu, en convention moteur, par l'équation suivante :

$$c_{em} = p \cdot \frac{d\varphi_f(\theta)}{d\theta} \cdot ni(\theta), \text{ ou encore :}$$

$$c_{em} = p \cdot \frac{d[n \cdot \varphi_f(\theta)]}{d\theta} \cdot i = p \cdot \frac{e}{\omega} \cdot i \quad (2.3)$$

sa valeur moyenne sera notée C_{em} .

ω est la pulsation électrique liée à la vitesse angulaire Ω par la relation : $\omega = p \cdot \Omega$.

Même si, en régime permanent, le couple n'est pas constant en fonction de la position, on considère que la vitesse angulaire Ω est constante.

Le bobinage d'induit est alimenté par un onduleur en pont complet, à 4 interrupteurs électroniques, lui-même alimenté par une source idéale de tension continue U . La figure 5 représente l'ensemble onduleur, bobinage d'induit du moteur. Les interrupteurs K1 à K4 sont supposés idéaux (bidirectionnalité en courant, chute de tension nulle, courant de fuites nul à l'état bloqué, changements d'état instantanés).

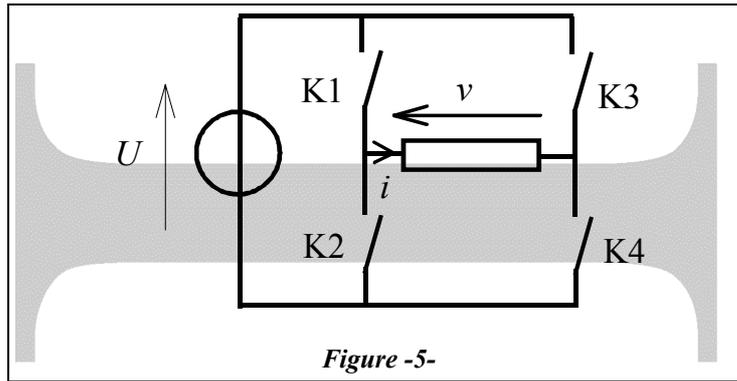


Figure -5-

1- Étude en régime sinusoïdal permanent dans le cas d'un moteur à flux sinusoïdal et force contre-électromotrice sinusoïdale.

$$\phi_f(\theta) = \phi_{fMax} \cdot \sin \theta = \phi_f \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \theta$$

1.1- Équations en régime sinusoïdal.

On suppose que toutes les grandeurs (courant, tension, f.c.e.m.) sont sinusoïdales. On utilise les notations \underline{I} et \underline{V} et \underline{E} (amplitudes complexes efficaces) dont les modules I , V et E sont les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales i , v et e .

1.1.1- Dessiner le schéma équivalent de l'unique phase du moteur en faisant figurer, en convention moteur, la résistance, l'inductance, la f.c.e.m., la tension et le courant.

1.1.2- Écrire l'équation complexe qui lie les 3 grandeurs \underline{I} , \underline{V} et \underline{E} à la pulsation ω .

1.1.3- Tracer le diagramme de Fresnel (ou vectoriel) relatif au schéma équivalent précédent. Choisir la force contre-électromotrice \underline{E} comme référence orientée verticalement de bas en haut. On note ψ l'angle entre \underline{E} et \underline{I} , orienté de \underline{I} vers \underline{E} . Préciser l'angle classique ϕ , de déphasage entre la tension et le courant et représenter aussi le flux total inducteur ϕ_f (avec $\phi_f = n \cdot \phi_f$, la valeur efficace du flux total) tel que $\underline{E} = j \cdot \omega \cdot \phi_f$ (où j est l'opérateur complexe).

1.1.4- Déterminer l'expression du couple électromagnétique moyen C_{em} en fonction de ϕ_f , I et ψ sachant que la puissance électrique vaut : $P_e = P_{em} + P_J = C_{em} \cdot \Omega + R \cdot I^2$.

1.1.5- Quelle valeur de ψ maximise le couple à pertes par effet Joule données ? Dans ces conditions, déterminer l'expression du facteur de puissance noté $\cos \phi$.

1.2- Équations en grandeurs instantanées en régime permanent.

1.2.1- Représenter sur un graphique, les fonctions $e(t)$ et $i(t)$ dans le cas d'un angle ψ positif (i en retard sur e).

1.2.2- Calculer l'expression du couple électromagnétique instantané c_{em} (à partir de l'expression (2.3)) en fonction de ψ , de I et de ϕ_f . Calculer sa valeur moyenne C_{em} .

1.3- Étude du fonctionnement de l'onduleur en modulation sinusoïdale.

1.3.1- Montrer que, si l'on veut obtenir un courant sinusoïdal de la position (avec un déphasage précis par rapport à la f.c.e.m., elle-même fonction sinusoïdale de la position), la tension d'alimentation v doit être modulée sinusoïdalement en largeur d'impulsion à partir de la tension continue U . Tracer des chronogrammes simplifiés de $v(t)$ et de $i(t)$ mettant en évidence les formes d'onde.

1.3.2- On suppose que la fréquence de MLI (Modulation de largeur d'impulsion) est très supérieure à la fréquence de fonctionnement et que la période de découpage correspondante T_d est très faible devant la constante de temps électrique $\tau_e = \frac{L}{R}$ du bobinage. La modulation est de type 2 niveaux : les interrupteurs K1 et K4 sont mis en conduction simultanément pendant $\alpha \cdot T_d$ (α est le rapport cyclique,

variable, de découpage) tandis que les interrupteurs K2 et K3 sont mis en conduction pendant le reste de la période de découpage.

1.3.2a- Donner le schéma équivalent permettant de déterminer l'ondulation du courant autour de la valeur de référence sinusoïdale. Sur une période de découpage, tracer les oscillogrammes de $v(t)$, $i(t)$ et $e(t)$ dans le cadre des hypothèses précédemment énoncées.

1.3.2b- Déterminer l'expression de la valeur moyenne $\langle v \rangle$ (relativement au découpage) de la tension appliquée en fonction de la tension continue U et du rapport cyclique α . Quelle est la valeur de l'amplitude maximale V_{Max} du fondamental de la tension $v(t)$ que l'on peut atteindre si la rapport cyclique maximal de découpage vaut α_{Max} ?

1.3.2c- Déterminer l'expression de l'ondulation du courant Δi en fonction de U , α , T_d et L . Pour quelle valeur de α la valeur de l'ondulation est-elle maximale ? Donner l'expression Δi_{Max} correspondante.

1.4- Calcul du nombre de spires.

1.4.1- En utilisant l'équation (2.2) et sachant que l'on peut alimenter le bobinage du moteur sous une tension d'amplitude fondamentale maximale V_{Max} , déterminer le nombre de spires n du bobinage pour que l'on puisse obtenir un couple de 3 mN.m à une vitesse de 3000 tr/mn en négligeant les pertes magnétiques et mécaniques et avec $\psi = 0$.

Effectuer l'application numérique sur n si la tension U est égale à 12 V et le rapport cyclique maximal α_{Max} vaut 0,95.

1.4.2- Calculer les valeurs de la résistance et de l'inductance du bobinage ainsi que la valeur efficace du courant et les pertes par effet Joule P_J correspondant à ce point de fonctionnement.

1.4.3- Déterminer la fréquence de découpage (MLI) nécessaire pour obtenir une ondulation de courant, autour de la sinusoïde de référence, ne dépassant pas 20 mA.

1.5- Limite de la caractéristique couple-vitesse à angle d'autopilotage ψ constant.

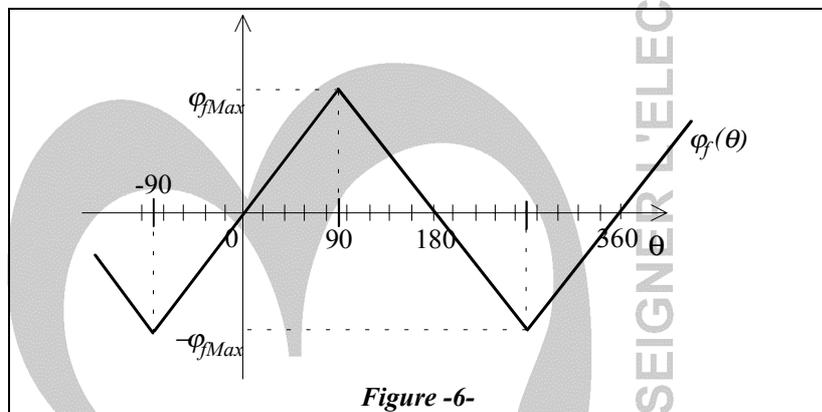
Lorsque l'on régle le courant avec une amplitude constante, un couple moyen constant est obtenu quelle que soit la vitesse à condition que l'amplitude de la tension soit suffisante pour le permettre, c'est à dire que la valeur efficace V de la tension soit inférieure à la valeur $\frac{V_{Max}}{\sqrt{2}}$ déterminée à la question 1.3.2b.

1.5.1- Déterminer, dans le plan couple électromagnétique-vitesse ($C_{em}(\Omega)$), l'équation de la caractéristique limite obtenue lorsque le taux de la modulation sinusoïdale de tension est maximal et lorsque l'on néglige la chute de tension inductive.

1.5.2- En utilisant les valeurs numériques obtenues à la question 1.4 et les données du problème, tracer le graphique et placer le point de fonctionnement de la question 1.4.1.

2- Étude de l'alimentation dans le cas d'un moteur à force contre-électromotrice rectangulaire.

On suppose maintenant que le flux inducteur $\varphi_f(\theta)$ est une fonction triangulaire de la position tel qu'indiqué à la figure 6 :



2.1- Formes d'onde et calcul du nombre de spires.

On applique maintenant une tension en créneaux égale à U de -90° à 90° et égale à $-U$ de 90° à 270° . On ne connaît pas encore le nombre de spires, les seules données numériques sont celles introduites au début de la deuxième partie du problème.

2.1.1- Tracer le graphique de l'allure des fonctions $e(t)$, $v(t)$ et $i(t)$ sachant que la période électrique T est très grande devant la constante de temps électrique $\tau_e = \frac{L}{R} = \frac{P}{r}$ à la vitesse maximale envisagée (3000 tr/mn).

2.1.2- On néglige maintenant l'effet de l'inductance d'induit. Établir l'équation d'alimentation simplifiée et déterminer l'expression de l'amplitude des ampères-tours nI_{Max} en fonction de la vitesse angulaire Ω , du flux maximal ϕ_{fMax} , de r , de U et de n .

2.1.3- Calcul du couple.

2.1.3a- Tracer, dans les conditions de la question 2.1.1, l'allure du couple électromagnétique instantané $c_{em}(\theta)$.

2.1.3b- Déterminer l'expression de sa valeur moyenne C_{em} en fonction de nI_{Max} dans les conditions de la question 2.1.2. On utilisera la constante $k_\phi = p \cdot \frac{2 \cdot \phi_{fMax}}{\pi}$ dans la formulation du couple électromagnétique C_{em} .

2.1.3c- Calculer la valeur numérique de nI_{Max} permettant de convertir un couple de 3 mN.m.

2.1.4- Déterminer l'expression du couple moyen en fonction de la vitesse Ω , de U , k_ϕ , r et de n .

2.1.5- Déterminer le nombre de spires nécessaire à l'obtention d'un couple moyen de 3 mN.m à la vitesse de 3000 tr/mn sous une tension U égale à 12 V.

2.2- Calcul des caractéristiques.

2.2.1- Calculer les valeurs numériques du courant maximal, de la résistance d'induit et des pertes par effet Joule au couple de 3 mN.m compte tenu de la valeur du nombre de spires obtenue à la question 2.1.5.

2.2.2- Tracer la caractéristique du couple moyen en fonction de la vitesse sous la tension continue de 12 V en indiquant les valeurs numériques particulières.

2.2.3- Comparaison au moteur à courant continu à aimants permanent et à collecteur mécanique.

2.2.3a- Quels sont les avantages du moteur étudié par rapport au moteur à courant continu ?

2.2.3b- Quel est son principal avantage dans une application de ventilateur d'équipement informatique ?

2.3- Régulation du courant par modulation de largeur d'impulsion.

Lorsque l'on souhaite régler le point de fonctionnement couple-vitesse au dessous de l'ensemble des valeurs définies par la caractéristique précédente (question 2.2.2), on asservit le courant par modulation de largeur d'impulsion (MLI) à une consigne en créneaux.

2.3.1- Montrer l'allure des caractéristiques couple-vitesse paramétrées en courant, obtenues dans un tel mode de commande.

2.3.2- On effectue une MLI de type 3 niveaux. Pour obtenir, une tension moyenne $\langle v \rangle$ (à l'échelle de la période de découpage ou de hachage) positive, on maintient K1 passant et K2 ouvert et l'on effectue un découpage par les deux interrupteurs K3 et K4 commandés de façon complémentaire, on appelle α , rapport cyclique de hachage, le rapport du temps de conduction de K4 rapporté à la période T_d (supposée constante). Pour obtenir une tension moyenne négative, on maintient K3 passant et K4 ouvert, le découpage est alors effectué par K1 et K2 commandés complémentaires et le rapport cyclique α est défini par le temps de conduction de K2.

2.3.2a- Tracer les graphiques de la tension $v(t)$ et du courant $i(t)$ en synchronisme avec $e(t)$ permettant de montrer de façon qualitative les formes d'onde.

2.3.2b- Calculer l'expression de l'ondulation du courant en fonction de U , α , L et T_d .

2.3.2c- Calculer la valeur numérique de la fréquence de hachage F_d pour que l'ondulation de courant reste inférieure à 0,02 A.

2.3.3- On effectue maintenant une MLI de type 2 niveaux décrite à la question 1.3.2.

Calculer la nouvelle expression de l'ondulation du courant en fonction de U , α , L et T_d .

Calculer la valeur numérique de la fréquence de hachage F_d pour que l'ondulation de courant reste inférieure à 0,02 A.

2.4- Étude en valeurs réduites des caractéristiques du moteur à courant continu à commutation électronique équivalent.

On propose d'effectuer une étude générale des caractéristiques d'un moteur à courant continu qui sera applicable au cas étudié précédemment. Les hypothèses sont les suivantes :

- dans la plage des fréquences considérées, les pertes magnétiques P_{mag} sont essentiellement de type hystérétique : $P_{mag} = C_o \cdot \Omega$ avec $C_o = 0,64$ mN.m ;

- les pertes mécaniques sont négligeables.

2.4.1- Effectuer le bilan énergétique de la conversion en moteur en déterminant les expressions de la puissance absorbée P_{abs} et de la puissance utile P_u en fonction du couple électromagnétique C_{em} , de la vitesse Ω , de la résistance d'induit R , du nombre de spires n , de k_ϕ (constante liant le couple électromagnétique au courant d'induit) et du couple de pertes magnétiques C_o .

2.4.2- Pour pouvoir travailler en grandeurs réduites, on pose :

$$\Omega_o = \frac{U}{n \cdot k_\phi}, \quad x = \frac{\Omega}{\Omega_o}$$

$$I_o = \frac{C_o}{n \cdot k_\phi}, \quad I_{cc} = \frac{U}{R}, \quad a = \frac{I_o}{I_{cc}}$$

$$P_{cc} = \frac{U^2}{R}$$

Toutes les expressions demandées devront être exprimées en fonction de P_{cc} , de a et de la vitesse réduite x .

2.4.2a- Déterminer l'expression de la puissance utile P_u .

2.4.2b- Pour quelle expression $x_{P_{uMax}}$ de x la puissance utile est-elle maximale ? Donner l'expression correspondante de la puissance maximale P_{uMax} .

2.4.2c- Tracer le graphe de $\frac{P_u}{P_{cc}} = f(x)$ dans le cas particulier où $a = 67 \cdot 10^{-3}$.

2.4.3- Rendement.

2.4.3a- Déterminer l'expression du rendement η en fonction de la vitesse réduite x et de a .

2.4.3b- Pour quelle expression $x_{\eta_{Max}}$ de x le rendement est-il maximal ?

2.4.3c- Donner l'expression correspondante du rendement maximal η_{Max} .

2.4.3d- Tracer le graphique de $\eta = f(x)$ dans le cas particulier où $a = 67 \cdot 10^{-3}$.

2.5- Application numérique au moteur étudié.

2.5.1- Calculer la puissance maximale utile P_{uMax} que l'on peut obtenir sous 12 V ainsi que la vitesse $\Omega_{P_{uMax}}$ correspondante.

2.5.2- Calculer les pertes magnétiques et par effet Joule ainsi que les puissances absorbée et utile au point de fonctionnement 3 mN.m (électromagnétique) et 3000 tr/mn, en déduire la valeur du rendement.

2.6- Recherche d'un dimensionnement permettant un fonctionnement au rendement maximal.

On souhaite concevoir le moteur pour qu'il fonctionne, lorsqu'il est alimenté sous tension constante (sans MLI), à son point de rendement maximal. On suppose que l'on n'agit pas sur les paramètres du moteur C_o et k_ϕ mais seulement sur le nombre de spires n et sur la résistance spécifique r . La tension U , le couple utile C_u et la vitesse angulaire Ω sont des constantes du cahier des charges.

En synthèse de l'ensemble des questions précédentes de cette deuxième partie du problème, écrire le système d'équations qui permet de déterminer les valeurs optimales de r et n .

