

ETUDE D'UN HAUT-PARLEUR ELECTRODYNAMIQUE

Note au candidat

La calculatrice, qu'elle soit programmable ou non, est **interdite**. Les applications numériques demandées peuvent être traitées à la main.

La numérotation des questions doit être scrupuleusement respectée.

Le sujet étudie divers aspects du fonctionnement d'un haut-parleur. Les quatre parties ont été rédigées pour être largement indépendantes.

Les vecteurs sont notés en caractères **gras**.

Introduction

Le schéma simplifié du haut-parleur électrodynamique étudié est donné ci-dessous, figure 1.

La symétrie est cylindrique autour de l'axe Oz , le champ magnétique produit par l'aimant est radial dans l'entrefer.

La membrane, le support, le dôme et la bobine sont solidaires et constituent l'*équipage mobile*.

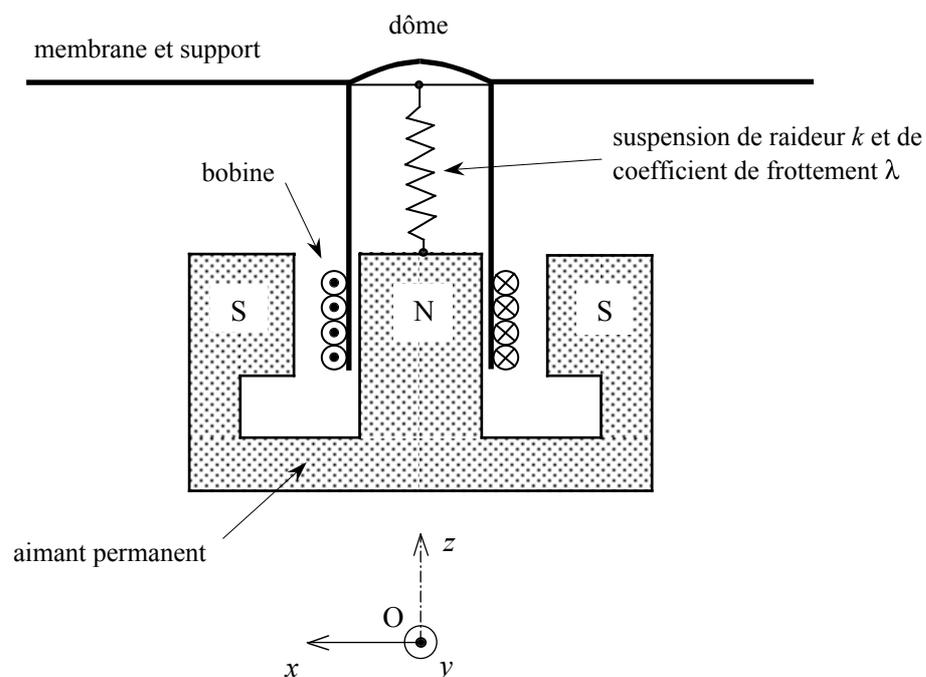


Figure 1

PREMIERE PARTIE
CARACTÉRISTIQUES ELECTRIQUES DE LA BOBINE

La bobine étudiée est un solénoïde cylindrique situé dans le vide, représenté sur la figure 2. Elle est supposée de longueur h très grande devant son rayon a , et comporte n spires par unité de longueur. Les effets de bord seront négligés. La bobine est alimentée par un courant i lentement variable. La perméabilité magnétique du vide est notée μ_0 .

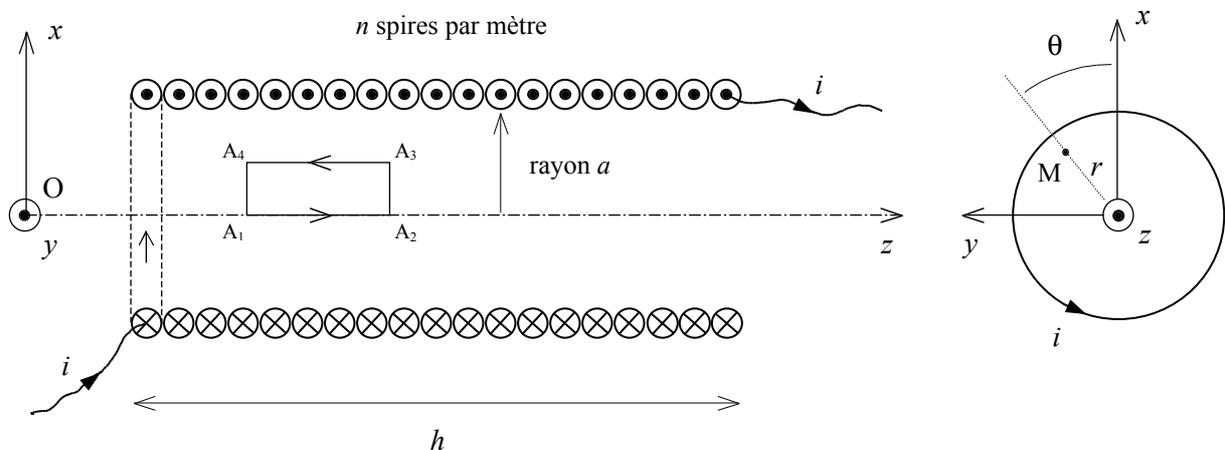


Figure 2

Calcul de l'inductance propre

Topographie du champ magnétique

- 1.1 En supposant le solénoïde de longueur infinie, déterminer la direction du champ magnétique \mathbf{B} en tout point de l'espace à l'aide de considérations de symétrie.
- 1.2 On s'intéresse ici au champ produit par une seule spire du solénoïde, représentée figure 3. Enoncer la loi de Biot et Savart pour les circuits filiformes. On notera $i d\mathbf{l}$ un élément de courant source situé en un point P du circuit.
Reproduire le schéma de la figure 3 en précisant la direction et le sens :
 - du vecteur champ élémentaire $d\mathbf{B}_s(\mathbf{N})$ créé par l'élément de courant source $i d\mathbf{l}$ en un point N de l'axe ;
 - du vecteur champ magnétique $\mathbf{B}_s(\mathbf{N})$ créé par la spire de courant au même point.

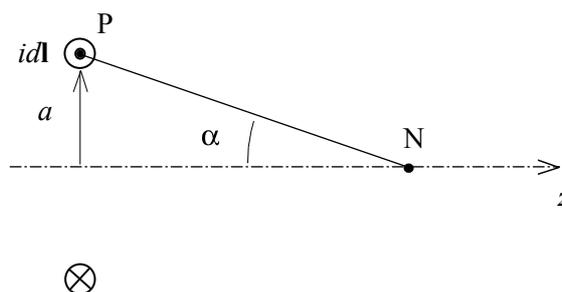


Figure 3

On s'intéresse maintenant au champ magnétique $\mathbf{B}(M)$ créé par l'ensemble du solénoïde.

- 1.3** Soit M un point quelconque, situé à l'intérieur du solénoïde.
- Lorsque M est sur l'axe Oz , déduire de ce qui précède le sens du champ $\mathbf{B}(M)$.
 - Quelle que soit la position de M (hors d'axe), préciser, en considérant les symétries du problème, la (les) coordonnée(s) cylindrique(s) (r, θ, z) dont le champ $\mathbf{B}(M)$ dépend *a priori*.
- 1.4** En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour analogue au contour $A_1 A_2 A_3 A_4$ défini figure 2, montrer que le champ $\mathbf{B}(M)$ à l'intérieur du solénoïde ne dépend pas de r .

Calcul du champ magnétique sur l'axe

On donne l'expression du champ magnétique produit par une spire parcourue par un courant i , en un point N de son axe, en fonction des paramètres définis sur la figure 3 :

$$\mathbf{B}_s(N) = B_{sr} \mathbf{e}_r + B_s \mathbf{e}_\theta + B_{sz} \mathbf{e}_z \quad \text{avec : } B_{sz}(N) = \frac{\mu_0 i}{2a} \sin^3 \alpha$$

- 1.5** Précisez les valeurs de B_{sr} et de B_s et montrer que le champ sur l'axe du solénoïde, loin des deux extrémités, vaut :

$$\mathbf{B}(M) = B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta + B_z \mathbf{e}_z \quad \text{avec : } B_z(M) = \mu_0 n i$$

Que valent B_r et B_θ ?

Champ magnétique dans tout l'espace

- 1.6** En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour que l'on précisera, trouver l'expression du champ $\mathbf{B}(M')$ lorsque M' est un point situé à l'extérieur du solénoïde.
- 1.7** Réaliser un schéma faisant figurer les lignes de champ et leur sens dans le cas du solénoïde infini.
- 1.8** Réaliser qualitativement le même tracé dans le cas du solénoïde fini.

Calcul de l'auto-inductance

- 1.9** Définir le flux magnétique Φ créé à travers une spire par l'ensemble du solénoïde. On pourra s'aider d'un schéma pour définir les orientations nécessaires.
- 1.10** Déduire des questions précédentes la valeur du flux total Φ à travers le solénoïde (supposé très long) et la valeur de l'auto-inductance L de la bobine en fonction de n , a , h , et μ_0 .

Application numérique

On donne la longueur totale de fil $l = 5$ m, la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, $h = 1$ cm, et $a = 2$ cm.

- 1.11** Déterminer le nombre de spires par mètre n en fonction de l , a et h .
- 1.12** Calculer la valeur numérique de L .

Calcul de la résistance électrique de la bobine

La bobine est constituée d'un fil cylindrique de cuivre, de conductivité $\sigma = 5 \cdot 10^7$ S.I. et de diamètre $d = 0,14$ mm.

1.13 Donner l'expression de la résistance R de la bobine en fonction de l , σ et d .

En quelle unité s'exprime la conductivité σ ?

Calculer la valeur numérique de R en utilisant les approximations : $14^2 \approx 200$ et $2/3 \approx 0,64$.

DEUXIEME PARTIE

MESURE DES PARAMETRES MECANIQUES

Cette mesure s'effectue dans la configuration de la figure 1. On rappelle que l'axe Oz est l'axe vertical ascendant. Le circuit électrique est ouvert, les seules forces à considérer sont donc les forces d'origine mécanique. L'équipage mobile possède une masse totale m et est astreint à se déplacer selon Oz. La suspension est modélisée par un ressort de raideur k , de longueur à vide l_0 et de coefficient de frottement λ .

On notera $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.

- 2.1** Dessiner le système masse-ressort-amortisseur équivalent. On prendra comme origine des z l'extrémité inférieure du ressort, supposée fixe.
Exprimer la position z_0 de la masse m à l'équilibre en fonction de m , l_0 , k et g .

Mesure de k

- 2.2** On place une masse supplémentaire m' sur le dôme. Au repos, on mesure un enfoncement d de l'équipage. Montrer qu'on peut déduire k de la connaissance de m' et de d .
- 2.3** Avec $m' = 10 \text{ g}$, on mesure $d = 50 \text{ }\mu\text{m}$. Donner la valeur numérique de k en précisant son unité.

La masse supplémentaire est ôtée dans toute la suite.

Etude énergétique et équation du mouvement

- 2.4** Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le système (équipage mobile). Parmi ces forces, lesquelles sont conservatives ? On précisera la définition du qualificatif « conservative ».
- 2.5** Soit une force \mathbf{F} donnée dérivant d'une énergie potentielle E_p . Rappeler la relation entre \mathbf{F} et E_p . En déduire une expression de E_{pm} , l'énergie potentielle relative à la force de pesanteur pour la masse m , en fonction de z et g .
- 2.6** Etablir l'expression de l'énergie potentielle E_{pk} relative à la force de rappel du ressort en fonction de k , l_0 et z .
- 2.7** En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(z)$, définie telle que $E_p(z_0) = 0$ à la position d'équilibre (cf. question 2.1). Montrer que $E_p(z)$ peut s'écrire en fonction de la seule variable $z^* = z - z_0$ et de la raideur k .
- 2.8** Enoncer le théorème de l'énergie cinétique et définir l'énergie mécanique E_m du système. En déduire l'expression de dE_m/dt en fonction du coefficient de frottement λ et de la vitesse $v = dz/dt$. Interpréter physiquement le résultat (notamment son signe).

A l'aide de ce qui précède (questions 2.7 et 2.8), montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{d^2 z^*}{dt^2} + \lambda \frac{dz^*}{dt} + k z^* = 0$$

- 2.9** A quelle condition l'équation précédente conduit-elle à des solutions oscillantes ?
- 2.10** On suppose cette condition remplie. Résoudre l'équation précédente avec les conditions initiales suivantes : $z^*(0) = 0$, $(dz^*/dt)_{t=0} = v(0) = v_0$. Montrer que le résultat peut se mettre sous la forme : $z^*(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$, où l'on précisera la valeur de A , α et ω_0 en fonction de m , k , λ et v_0 .

- 2.11** Que devient l'expression de ω_0 lorsqu'on se trouve en régime de faible amortissement (loin du régime critique, lorsque $\alpha \ll \omega_0$) ?
- 2.12** On note $T_0 = 2\pi/\omega_0$ la pseudo-période du mouvement. Montrer que si $\tau = 1/\alpha = 4 T_0$, le système oscille en régime de faible amortissement. En déduire une expression approchée de la vitesse $v(t)$, fonction des seuls paramètres v_0 et ω_0 .
- 2.13** Déduire de 2.11 et 2.12 les expressions des énergies potentielle $E_p(t)$, cinétique $E_c(t)$ et mécanique $E_m(t)$ en fonction de ω_0 , α , v_0 et m . Tracer alors le graphe de ces énergies en fonction du temps pour $0 \leq t \leq 2 T_0$. Interpréter physiquement.

Application numérique : mesure de la masse mobile et du coefficient de frottement en régime de faible amortissement

- 2.14** On met en vibration libre l'équipage mobile. On mesure alors une pseudo-fréquence de 71 Hz. En déduire un bon ordre de grandeur de la masse m de l'équipage (on retiendra que $2\pi^2 \approx 20$).
- 2.15** On observe une réduction de l'amplitude de la vibration d'un facteur 1000 en 0,5 s. En déduire une valeur numérique approchée de α , arrondie à deux chiffres significatifs (on donne $\ln 10 \approx 2,3$). En déduire la valeur numérique de λ et préciser son unité S.I.

TROISIEME PARTIE

EFFET D'UNE ENCEINTE CLOSE

Pour des raisons d'efficacité acoustique, le haut-parleur est enfermé dans une enceinte hermétiquement close. Le système mécanique à étudier est alors équivalent à celui donné figure 4. Le piston coulisse selon Oz et l'étanchéité de l'enceinte est maintenue à tout instant. Le volume occupé par la suspension est négligé. L'air environnant et contenu dans l'enceinte est assimilé à un gaz parfait.

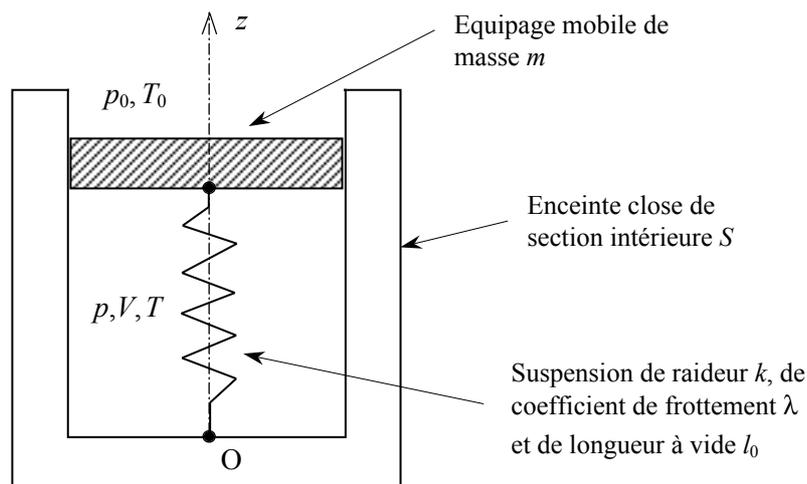


Figure 4

Données du problème

La pression extérieure est la pression atmosphérique p_0 et la température extérieure vaut T_0 .

On suppose que lorsque la masse est au repos :

- la masse m est située en $z = z_0$;

- la pression à l'intérieur de l'enceinte vaut $p = p_0$;
- la température intérieure $T = T_0$ et le volume intérieur $V = V_0 = Sz_0$.

Lors d'un déplacement, on note p , V et T la pression, le volume et la température du gaz dans l'enceinte.

Le nombre de moles de gaz contenu dans l'enceinte est n .

Etude de la transformation liée au déplacement du piston

Les oscillations de la masse mobile autour de l'équilibre sont suffisamment rapides pour que les échanges de chaleur, beaucoup plus lents, puissent être considérés comme négligeables. Cependant, la vitesse du piston reste suffisamment modérée pour pouvoir considérer l'équilibre thermodynamique dans l'enceinte comme atteint à chaque instant.

- 3.1 Qualifier, d'après l'énoncé, la transformation subie par le gaz contenu dans l'enceinte.
- 3.2 Rappeler l'expression du travail élémentaire δW des forces de pression en fonction des variables d'état du système. Sachant que l'énergie interne du système vaut $U = 5/2 nRT$, montrer la relation $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$ où on précisera la valeur numérique de γ .

Force de rappel équivalente aux forces de pression

- 3.3 On suppose un petit déplacement ε du piston par rapport à sa position de repos. Exprimer la variation de volume V correspondante. En déduire la variation de pression p correspondante en fonction de γ, p_0, V_0 et ε .
- 3.4 Montrer que la force résultante des efforts de pression sur le piston est analogue à une force de rappel élastique de raideur k_a . Donner l'expression de k_a en fonction de S, γ, p_0, V_0 .
- 3.5 Vérifier que l'expression obtenue est homogène à une raideur.
- 3.6 La surface du piston est celle du diaphragme du haut-parleur qui possède un rayon $R_{HP} = 10$ cm. Le volume de l'enceinte est de 140 litres et on prendra $p_0 = 10^5$ Pa. Calculer la valeur numérique de k_a (sachant que $\pi^2 \approx 10$).

Force résultante équivalente au système complet

On suppose toujours que le piston est situé en $z_0 + \varepsilon$.

- 3.7 On appelle \mathbf{f} la résultante de tous les efforts exercés sur le piston. Exprimer \mathbf{f} en fonction de m, g (l'accélération de la pesanteur), k, l_0, z_0, k_a et ε .
- 3.8 En considérant la relation précédente lorsque le piston est au repos, montrer que \mathbf{f} est équivalente à une force de rappel élastique, dont on précisera la raideur k_e .
- 3.9 Commenter le résultat en termes d'ordre de grandeur, en s'aidant du résultat de la question 2.2. De combien de pour-cent, la fréquence propre du système va-t-elle varier lorsqu'on ajoute l'enceinte ? Va-t-elle augmenter ou diminuer ?

QUATRIEME PARTIE

MODELISATION ELECTROMECHANIQUE DU HAUT-PARLEUR

Dans cette partie, on suppose que le circuit électrique est fermé. L'équipage mobile est soumis aux actions électromagnétiques sur la bobine et aux actions mécaniques liées à la suspension. Le haut-

parleur n'est pas placé dans une enceinte. Pour étudier les actions magnétiques sur la bobine on considèrera que le champ magnétique permanent \mathbf{B}_p dû à l'aimant est très supérieur au champ propre créé par le solénoïde. Il est rappelé que les lignes de ce champ permanent sortent par le pôle N et rentrent par le pôle S.

Equation différentielle mécanique

- 4.1 En se référant à la figure 3, donner l'expression de la force magnétique $d\mathbf{F}$ qui s'exerce sur un élément de courant $i d\mathbf{l}$. Précisez le sens et la direction du champ magnétique \mathbf{B}_p et de $d\mathbf{F}$ sur un schéma.
- 4.2 Exprimer alors la force magnétique \mathbf{F} qui s'exerce sur la bobine en fonction de l , la longueur totale de fil de cette dernière, de la valeur algébrique du champ magnétique B_p , de i et du vecteur unitaire \mathbf{e}_z .
- 4.3 Etablir l'équation différentielle en $z^* = z - z_0$ du mouvement de la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant i . z_0 désigne la position de l'équipage mobile au repos.

Equation différentielle électrique

- 4.4 A quel phénomène donne lieu le déplacement de la bobine dans le champ magnétique permanent \mathbf{B}_p ? Déterminer l'expression de la force électromotrice e correspondante en fonction de B_p , l et v , la vitesse de l'équipage mobile.
- 4.5 En se référant à la figure 1 et en choisissant un sens de déplacement de l'équipage mobile selon $+\mathbf{e}_z$, vérifier par des considérations physiques le signe de l'expression obtenue pour e .

La bobine, d'auto-inductance L et de résistance R , est maintenant alimentée par une tension $u(t)$ variable, telle que précisée sur la figure 5.

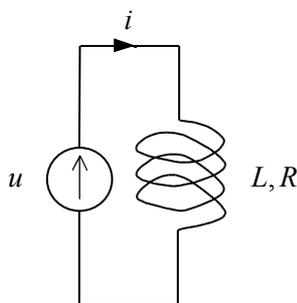


Figure 5

- 4.6 Dessiner le schéma électrique équivalent à la bobine en mouvement et en déduire l'équation différentielle qui régit le circuit en fonction de L , R et v .

Etude harmonique et impédance équivalente

Dans toute la suite, on suppose que les dépendances temporelles sont sinusoïdales. On utilisera la notation complexe : $\underline{U} = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$ pour la tension u , \underline{I} pour le courant i et \underline{V} pour la vitesse v .

- 4.7 Exprimer \underline{V} en fonction de \underline{I} .
- 4.8 En déduire l'expression de la tension sous la forme $\underline{U} = Z \underline{I}$ avec $Z = Z_e + 1/Y_m$. Z_e regroupe uniquement des éléments électriques et Y_m regroupe uniquement des éléments mécaniques. Donner les expressions de Z_e et de Y_m .
- 4.9 Montrer que ce résultat peut se mettre sous la forme du schéma électrique donné figure 6 et préciser la valeur des impédances Z_1 à Z_5 en fonction des données. Quels sont les éléments passifs correspondants ?



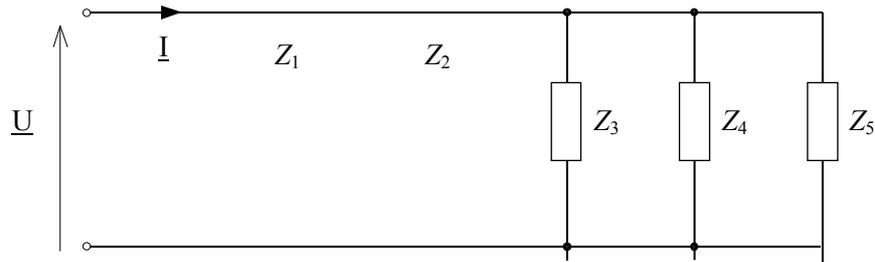


Figure 6

Résultats de mesures

On mesure l'amplitude de la tension $|U_0(j\omega)|$ à courant sinusoïdal d'amplitude constante $I_0 = 0,1$ A. En balayant lentement en fréquence, on obtient alors la figure 7.

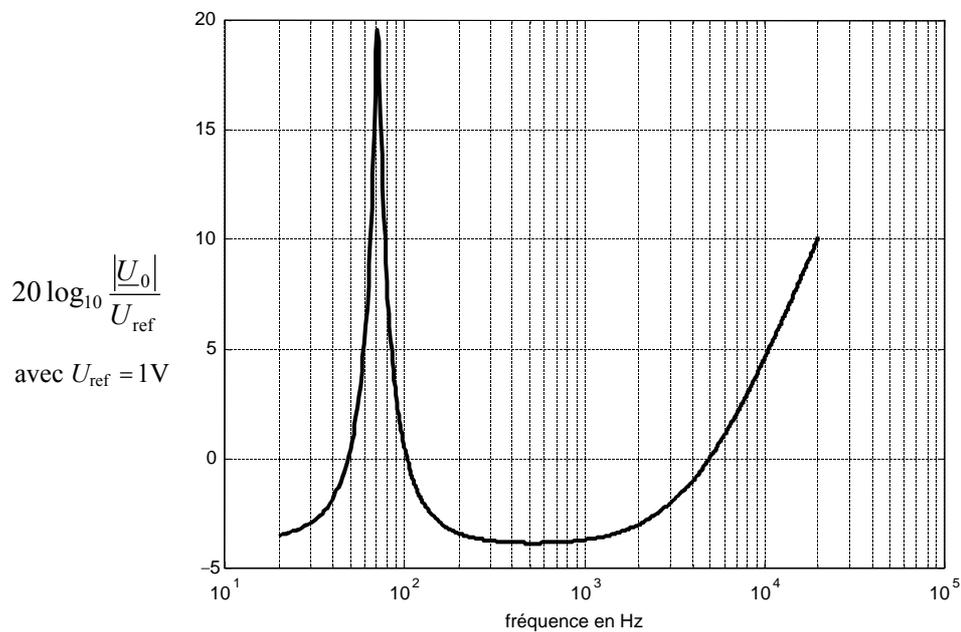


Figure 7

- 4.10** Commenter les différentes zones d'intérêt du graphe (on pourra le reproduire rapidement).
- 4.11** Montrer que ces résultats sont en accord avec les résultats numériques sur R et sur L (on prendra : $\log_{10}(0,64) = -0,2$).
- 4.12** Indiquer un point de mesure permettant de trouver la valeur de l'intensité du champ B .

○○○○○○