SIGNAUX NUMERIQUES ET MODULATIONS NUMERIQUES

LES SIGNAUX NUMERIQUES

Un signal numérique est une suite de nombres le plus souvent codés en binaire . On peut les classer en deux catégories en fonction de leur origine :

-Signaux purement informatiques échangés entre des processeurs .

-Issus de la conversion analogique numérique de signaux analogiques .Nous nous attarderons sur ce second cas .

Bruit de quantification et compression ;

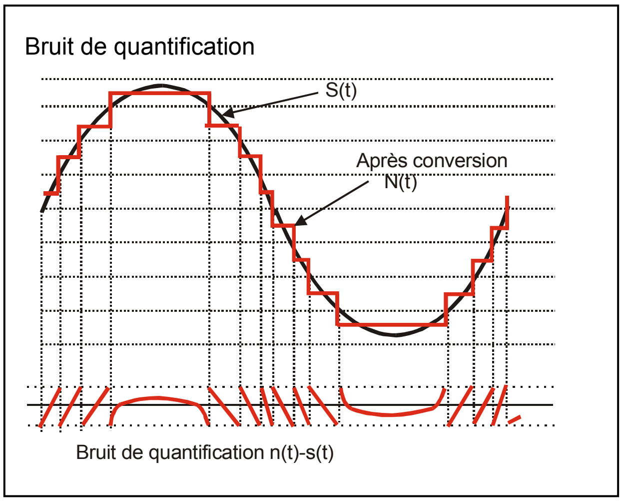
Un convertisseur analogique numérique fait correspondre à un niveau v un mot n avec la règle de conversion suivante :

$$n = N \rightarrow si \rightarrow Nq - \frac{q}{2} < v \leq Nq + \frac{q}{2}$$

q étant le pas de quantification . Plus q est faible et meilleure est la précision , mais il faut pour représenter n un mot ayant un plus grand nombre de bits.

L'amplitude du signal est à chaque instant mesurée avec une incertitude ±q/2 . Quelle que soit la valeur de q cette incertitude est incompressible, il n'existe par de théorème équivalent au théorème de quantification qui permettrai de calculer la valeur exacte de la tension d'entrée. Lorsque l'on reconstitue un signal analogique grâce à un convertisseur numérique analogique (CAN) il reste une erreur qui constitue le **bruit de quantification** .

La figure ci contre montre que ce bruit de quantification est un signal en dent de scie d'amplitude crête à crête q .(sauf au voisinage des maximum et minimum) Bien qu'il ne soit pas périodique il est facile de calculer sa puissance , elle vaut q²/12 .On peut montrer également , mais la démonstration sort du cadre de ce cours , que ce bruit de quantification à un spectre plat , c'est **un bruit blanc** .



Considérons un amplificateur capable de délivrer un signal sinusoïdal d'amplitude maximale A sans écrêtage. (Amplitude crête à crête 2A) .

Si ce signal est échantillonné en respectant le théorème de Shannon puis numérisé avec un CAN n bits , le pas de quantification est :

$$\frac{2A}{2^n} = A.2^{-(n-1)}$$

le bruit de quantification est donc :

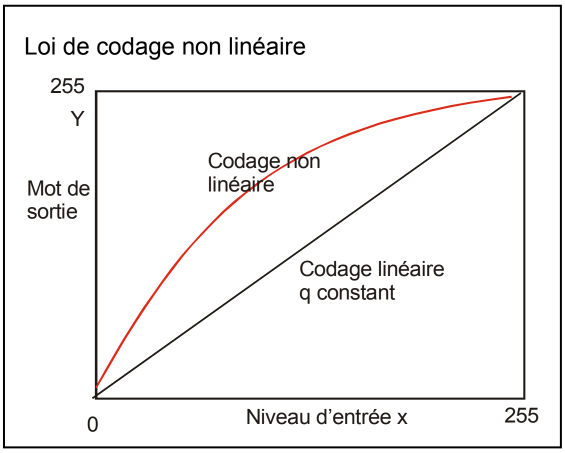
$$P_B = \frac{A^2}{3}.2^{-2n}$$

La puissance du signal étant A²/2 , le rapport signal sur bruit vaut :

$$\frac{S}{B} = 3.2^{2n-1}$$ ou en dB

$$\frac{S}{B}dB = 10\log 3 + 10(2n-1)\log 2 = 1,7 + 6N$$

Pour n=8 ce rapport signal bruit , pour le signal d'amplitude maximale n'atteint pas 50dB .A ce niveau le bruit de quantification perceptible comme un souffle est très perceptible. Pour atteindre une qualité correcte une conversion sur 12 bits est nécessaire . (dans ce cas S/B=73,7dB) Malheureusement un tel codage augmente de 50% le débit de bits nécessaires donc le coût de la liaison. Pour résoudre le problème on fait appel à une conversion non linéaire. Pour de faibles niveaux le pas de quantification est choisi petit par contre il est beaucoup plus grand aux forts niveaux de façon à maintenir un quotient erreur de quantification/ niveau de signal sensiblement constant .



A un écart Δy donné du mot de sortie correspond un écart Δx du niveau d'entrée. Pour maintenir un rapport signal bruit constant il faut que Δx/x soit indépendant de x .Soit

$$\frac{\Delta x}{x} = Cte = \frac{1}{x}\frac{\Delta x}{\Delta y}\Delta y$$

c'est à dire :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Cte}{x}$$

dont une solution est évidemment y=log x

Malheureusement une telle loi n'est pas acceptable car log 0 est infini . La solution retenue est une loi linéaire pour les faibles valeurs de x qui se raccorde ensuite à une loi logarithmique pour les niveaux plus élevés. En Europe la formule retenue s'appelle loi A :

Pour 0<|x|<1 :

$$y = sign(x).\frac{A|x|}{1+Ln(A)} \qquad pour \qquad |x| \le \frac{1}{A}$$

$$y = sign(x).\frac{1+Ln|Ax|}{1+Ln(A)} \qquad pour \qquad 1 > |x| > \frac{1}{A}$$

Le raccordement s'effectue pour |x|=1/A .Le paramétre A=87,6 a été choisi de façon que pour |x|=1/A |y|=16/A . Ainsi pour les faibles niveaux le codage est 16 fois plus fin que la loi linéaire ce qui correspond à un codage sur 12 bits . Ainsi le rapport signal/bruit est équivalent à celui qui serait obtenu avec 12 bits pour tous niveaux .

Les américains ont choisi une loi légèrement différente , la loi μ :

$y = sign\frac{Ln(1+\mu x)}{Ln(1+\mu)}$ $avec$ $\mu = 255$ pour laquelle la pente à l'origine est de 48 ce qui correspond à un codage sur 13 bits pour les faibles niveaux.

Ce codage non linéaire appellé compression est exécutée de façon numérique . Le signal est quantifié sur 12 bits et la valeur obtenue utilisée comme adresse d'une mémoire morte . (table de codage) qui délivre le mot de 8 bits correspondant.

MODULATION EN IMPULSIONS CODEES (MIC) (PCM)

Cette méthode de modulation a été développée en France dès 1970 pour moderniser notre réseau téléphonique ,elle était alors la première au monde , elle est maintenant universellement adopté (En anglais Pulse Code Modulation) .

Les informations à transmettre sont organisés en octets qui sont transmis l'un après l'autre sur le canal de transmission. Il est fait appel à un multiplexage temporel pour faire passer sur la même voie jusqu'à 32 communications simultanées dans chaque sens Un octet est transmis en 120nS ,toutes les 125µS (Pour obtenir les 8000 échantillons/sec imposés par le théorème de Shannon) 960 octets sont transmis correspondant aux octets fournis par les convertisseurs analogiques numériques puis compression ,loi A , ainsi que les bits de synchronisation et de correction d'erreurs .

Une description détaillée de ce système sort du cadre de ce cours .

MODULATIONS Δ

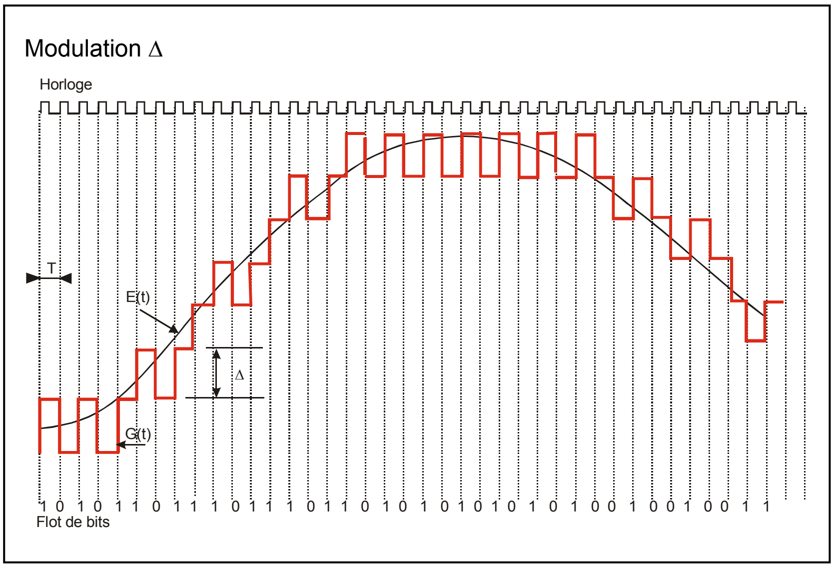
Principe de la modulation delta

Dans les années 60 lorsqu'il a fallu choisir un système numérique pour moderniser notre réseau qui en était au temps du ' 22 à Asnières' deux solutions étaient possibles , le MIC , simple sur le plan théorique mais complexe au niveau matériel (à cette époque un convertisseur 8 bits capable de fournir 8000 mots par seconde était encore cher) , et la modulation delta facile à mettre en œuvre avec des circuits simples mais inextricable sur le plan théorique . Le MIC fut choisi mais la modulation Δ reste intéressante dans certains cas .

Lorsque l'on échantillonne à 8kHz un signal téléphonique les octets successifs obtenus sont le plus souvent très voisins l'un de l'autre .On peut penser qu'il serait économique de ne transmettre que la différence entre deux mots successifs , cette différence pouvant le plus souvent être codée sur un nombre réduit de bits Plusieurs systèmes différentiels ont été étudiée mais la modulation delta est un cas extrême pour lequel la différence est codée sur un seul bit

Le principe est le suivant :

Le système est piloté par une horloge rapide H. A chaque début de période le signal d'entrée analogique e(t) est comparé à un signal interne g(t) .Si e<g g est augmenté d'une quantité constante Δ et un bit 1 est transmis si au contraire e≥g g est diminué de Δ et c'est un bit 0 qui est transmis. Ce processus est illustré par la figure ci dessous .



Pour la modulation delta une notion très importante est la saturation de pente . Le signal g ne peut pas monter ou descendre avec une pente moyenne supérieure à Δ/T , un signal analogique ne peut donc être approché par une modulation delta que si sa pente reste inférieure à cette limite . Pour un signal sinusoïdal :

$$x = a.\cos 2\pi ft$$

la valeur absolue maximale de la pente est $2\pi af$

La condition de non saturation de pente s'écrit alors :

$$2\pi af < \frac{\Delta}{T}$$

d'où deux conditions :

pour une amplitude a $\quad f < \dfrac{\Delta}{2\rho aT}$

pour une fréquence donnée f $\quad a < \dfrac{\Delta}{2\pi fT}$

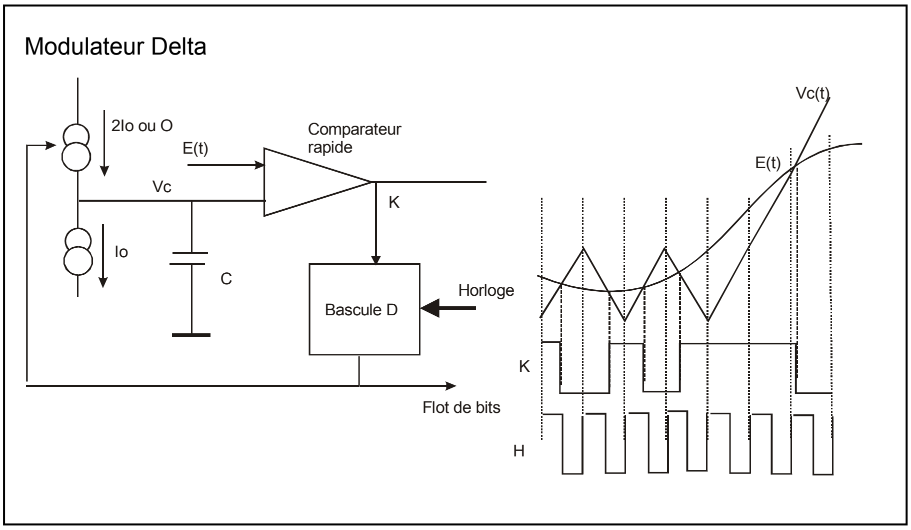
Il est très difficile de déterminer quelle doit être la fréquence d'horloge assurant une reproduction correcte d'un signal vocal., dans ce domaine l'expérience est essentielle. On constate qu'une qualité équivalente à un codage classique sur 8 bits et 8000 échantillons par seconde éxige une fréquence d'horloge voisine de 64kHz,ce qui correspond à un débit binaire identique.

Cependant avec une cadence plus faible le son est encore compréhensible et des circuits de synthèse vocale utilisant une modulation delta ont été commercialisés.

Réalisation du modulateur delta .

Un modulateur delta est très simple à réaliser. La figure ci contre est un exemple .

Le condensateur C est chargé et déchargé par deux sources de courant , l'intensité de l'une étant double de celle de l'autre. La source de courant supérieure est pilotée par le signal fourni par la bascule D, elle même recopiant sur le front d'horloge l'état du comparateur K.(le courant fourni par cette source est soit 2Io ,alors C se charge avec un courant Io , soit 0 et alors la source inférieure décharge C) La figure montre que le signal recueilli aux bornes de C est constitué de rampes de pente ±Δ/T (qui seraient obtenues en intégrant le signal g précédent.)



La détection est encore plus simple , il suffit de ne conserver du schéma que les deux sources de courant et le condensateur. Le flot de bits est appliqué à la source de courant supérieure et le signal recueilli aux bornes de C .

La modulation Δ adaptative

Pour limiter l'effet de la saturation de pente l'accroissement Δ est augmenté si le signal g ne parvient pas à suivre e ,ce décrochement étant mis en évidence par une succession de bits semblables. A un instant donné la valeur de l'accroissement dépend des 3 derniers bits crées comme le montre le tableau ci joint .

Modulation Delta adaptative .Loi de commande

A_{i-2}	A_{i-1}	A_i	Δ	Note
	0	1	Δ	
	1	0	Δ	
0	1	1	2Δ	2 1 reçus de suite Δ est doublé
1	0	0	2Δ	
0	0	0	4Δ	3 bits successifs identiques Δest quadruplé
1	1	1	4Δ	

La figure ci dessous montre le comportement d'une modulation adaptative en présence d'une transition brutale du signal d'entrée.

La modulation Δ Σ (Delta Sigma)

Une solution pour éviter la saturation de pente est d'intégrer le signal avant traitement . En effet si $a.\cos 2\pi ft$ est le signal initial , il devient après intégration $-\frac{a}{2\pi f}\sin 2\pi ft$ dont la dérivée a une valeur maximale égale à a .La condition de saturation s'écrit alors $a < \frac{\Delta}{T}$ et ne dépend plus de la fréquence . La modulation ΔΣ présente aussi l'avantage d'accepter les composantes continues .

Bruit de quantification en modulation Δ

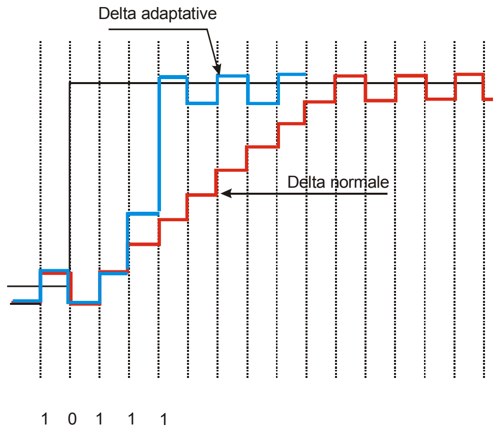
Le calcul du rapport signal sur bruit de quantification est beaucoup plus complexe qu en MIC et dépend en particulier de la statistique du signal traité. Une évaluation grossière peut être faite avec des hypothèses simplificatrices strictes. Nous supposerons :

- Que le signal x à un spectre limité à une fréquence de coupure fc
- Pas de saturation de pente

La distorsion de quantification est considérée comme un signal aléatoire carré de fréquence f_E , d'amplitude maximale $\pm\Delta$ et de densité de probabilité uniforme entre ces deux limites .

-On admet enfin que le spectre du bruit b est blanc jusqu'à f_E . (Ce qui est confirmé par des mesures)

Modulation delta adaptative, réponse à un échelon



f(s) fonction de la variable s de densité de probabilité p(s) à pour valeur moyenne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s).p(s)ds$$

La puissance du bruit qui est b² à donc comme expression :

$$P_B = \int_{-\Delta}^{+\Delta} b^2 p(b)db \quad \text{mais} \quad \int_{-\Delta}^{+\Delta} p(b)db = 1 \quad \text{donc p étant uniforme} \quad p(b) = \frac{1}{2\Delta}$$

alors il vient :

$$P_B = \int_{-\Delta}^{+\Delta} b^2 \frac{1}{2\Delta} db = \frac{\Delta^2}{3}$$

Mais cette puissance est répartie uniformément de 0 à Fe et cette fréquence d'échantillonnage fe est beaucoup plus grande que fc fréquence de coupure du signal. Seule la partie de bruit contenue dans cette bande 0-fc est perceptible, soit une puissance :

$$P_B^{'} = \frac{f_C}{f_E}\frac{\Delta^2}{3}$$

Dans le cas particulier d'un signal sinusoïdal d'amplitude a et de fréquence f donc de puissance a²/2 , le rapport signal sur bruit devient :

$$\rho = \frac{P_S}{P_B^{'}} = \frac{a^2}{2}\frac{3f_E}{f_C\Delta^2}$$

Ce rapport augmente avec l'amplitude du signal (ce qui est normal, or cette dernière ne peut pas dépasser la limite imposée par la saturation de pente :

$$a_{\max} = \frac{\Delta f_E}{2\pi f}$$

Dans ce cas limite le rapport signal bruit est maximal et a pour valeur :

$$\rho_{\max} = \frac{3}{8\pi^2}\left[\frac{f_E}{f_C}\right]^3\left(\frac{f_C}{f}\right)^2$$

f_E/f_c est une constante du système et le rapport S/B diminue en 1/f² lorsque la fréquence du signal d'entrée augmente.

Application :

Nous désirons obtenir un rapport signal bruit de 40dB (10000) par modulation delta d'un signal vocal. Ce dernier sera considéré comme ayant un spectre maximal à 800Hz et une fréquence de coupure de 3500Hz (téléphone) .Nous écrirons donc :

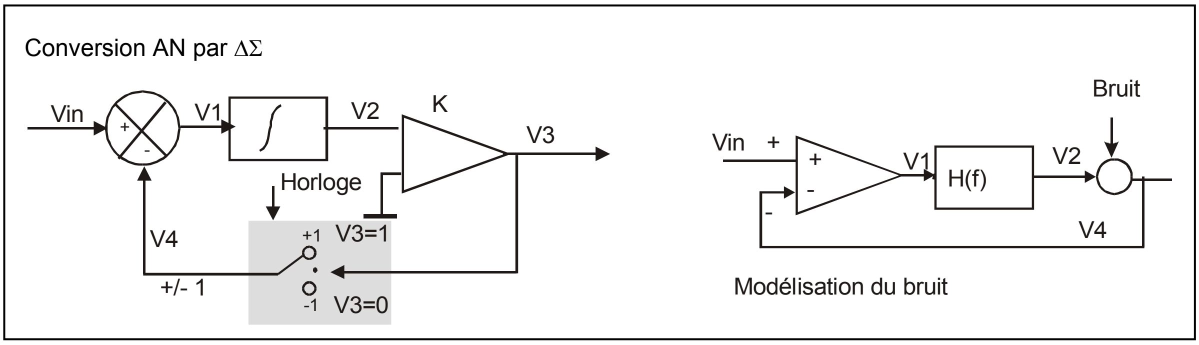
$$10^4 = \frac{3}{8\pi^2}\left(\frac{f_E}{3500}\right)^3\left(\frac{3500}{800}\right)^2$$

c'est à dire Fe=84 kHz . Résultat conforme avec ce que nous avions annoncé plus haut .

Conversion analogique numérique à modulation ΔΣ

La modulation ΣΔ permet de réaliser des convertisseurs analogique numérique de haute précision (20 bits par exemple) mais relativement lents (conversion en 1 mS par exemple)

Le schéma de base est reproduit ci dessous .



Le comparateur délivre un signal binaire V_3 commandant l'interrupteur qui applique sur l'entrée – de l'additionneur soustracteur une tension analogique ayant deux valeurs possibles ±1V . Ce signal V_4 peut être considéré comme l'image bruitée du signal analogique V_2 fourni par l'intégrateur interne. Soit $v_4=v_2+b$

Le fonctionnement est alors décrit par les équations suivantes :

$$v_1 = v_{in} - v_4$$

$$v_2 = H(p).v_1$$

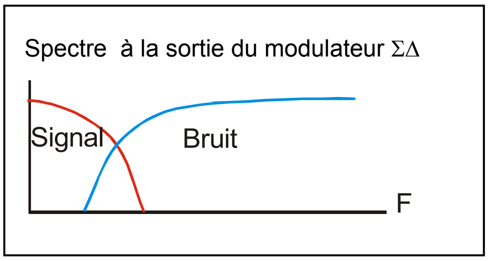
$$v_4 = b + H(p).v_1$$

d'ou l'on tire : $v_4 = \dfrac{b}{1+H(p)} + \dfrac{H(p)}{1+H(p)}.v_{IN}$

Si H est un intégrateur H(p)=A/p il vient : $v_4 = b.\dfrac{p}{p+A} + \dfrac{A}{p+A}.v_{IN}$

Le premier terme est un passe haut , le second un passe bas . Cette expression montre que le bruit subit un filtrage passe haut , il est donc rejeté vers les hautes fréquences alors que le signal est filtré passe bas .

Le flot de bits V3 sortant du comparateur contient en particulier la composante continue du signal d'entrée Vin., il peut être considéré comme une suite de mots de 1 bit .



Les convertisseurs analogique numérique Sigma Delta

Le flot de bits sortant du comparateur peut être considéré comme une suite de mots de 1 bits de valeur +1 ou –1 .Nous venons de voir que la composante continue est conservée .C'est ce que montre bien l'exemple suivant .

Le schéma est celui de la figure précédente ; nous supposerons que l'intégrateur est construit de façon qu'entre deux tops d'horloge sa tension de sortie varie d'une quantité égale à la tension appliquée à son entrée

Fixons alors Vin=0,5V,:

$\int_0^T V1dt = V1$ Le comparateur délivre V3=1 si V2≥0 et V4 recopie V3 avec la règle suivante (+1v si V3=1 , -1V si V3=0) à l'arrivée d'un top d'horloge H.

Au top H V4 prend une nouvelle valeur ce qui défini une nouvelle valeur de V1 (V1=Vin-V4)

Entre deux tops H l'intégrateur travaille V2 change ainsi que V3 mais V4 conserve la valeur qu'il vient de prendre au top H précédent .

Nous partons de l'état initial suivant immédiatement après un top d'horloge H

V2(0)=0 donc V3=1 et V4=+1V donc V1=0,5-1=-0,5V

Les valeurs suivantes sont alors données dans le tableau suivant :

Evolution des potentiels dans un CAN $\Delta\Sigma$

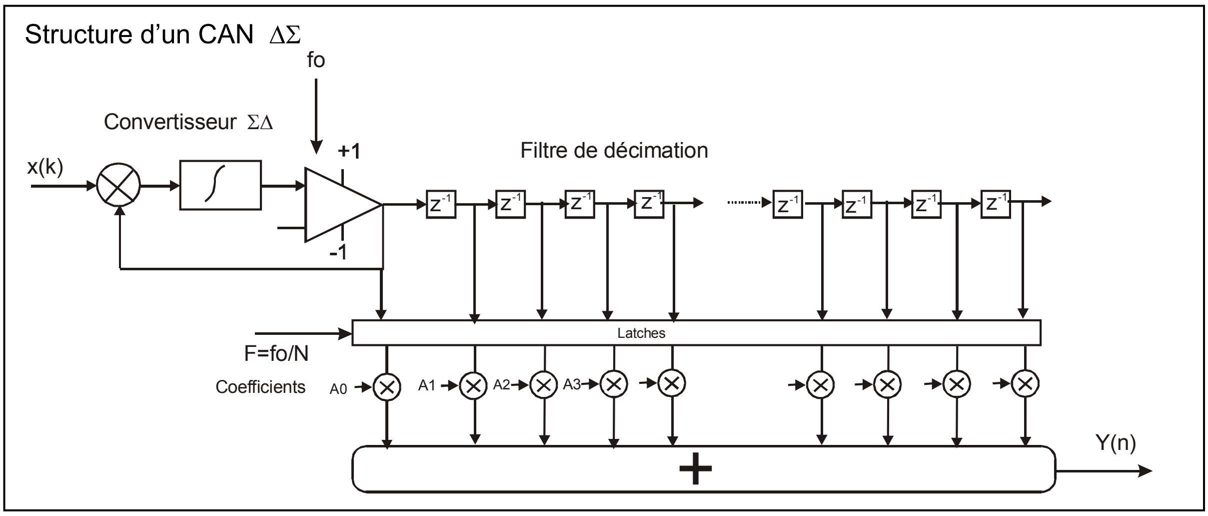
Vin (fixe)	V1=Vin-V4	V2	V3	V4	
0,5	-0,5	0	1	+1	Etat initial après H
0,5		-0,5	0	1	Intégration nouveau V3
0,5	1,5			-1	Top H nouveau V4 et V1
0,5		+1	1		Intégration nouveau V3
0,5	-0,5			+1	Top H nouveau V4 et V1
0,5		0,5	1		
0,5	-0,5			1	
0,5		0	1		
0,5	-0,5			1	
0,5		-0,5	0		
0,5	1,5			-1	
0,5		+1	1		
0,5	-0,5			1	
0,5		0,5	1		
0,5	-0,5			1	
0,5		0	1		
0,5	-0,5			1	
0,5		-0,5	0		
0,5			1	-1	

On notera que V3 et V4 sont périodiques et que V4 a pour valeur moyenne 0,5 qui est bien la tension d'entrée.

Si la tension d'entrée au lieu d'être fixe est lentement variable, le spectre du flot de bit comporte une raie à sa fréquence de variation.

Structure d'un convertisseur A N Delta Sigma

Les mots successifs codés sur un bit constituent un signal dont la composante continue (ou basse fréquence) est égale à celle du signal d'entrée , mais superposée au bruit de quantification. Ce dernier est rejeté aux fréquences élevées par le convertisseur et peut être fortement atténué par un filtrage passe bas. Le filtre passe bas utilisé est un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie (filtre transversal) dont la structure est représentée ci dessous .



Les mots (de 1 bit) successifs x(k) issus du convertisseur ΔΣ sont appliqués à une chaine de bascules D formant un registre à décalage .Les valeurs à la sortie des différents étages sont multipliés par des coefficients a_k tous plus grands que 1 en valeur absolue et les résultats sommés. La sortie y est une suite :

$$y(n) = \sum_k a_k x(n-k)$$

Expression caractéristique d'un filtre transversal. Les coefficients sont choisis pour que ce filtre soit de type passe bas .Bien que les échantillons entrés soient codés sur un seul bit, les mots de sortie y_n sont beaucoup plus long, les coefficients étant nombreux et codés sur au moins 8 à 12 bits.

Le filtre étant passe bas le signal de sortie a un spectre plus étroit et il est inutile de disposer des y à la même cadence qu'a l'entrée, on calculera par exemple la sortie pour un point sur 64, c'est l'opération de décimation. Le filtre est appelé **filtre de décimation** . Ceci est réalisé grâce au banc de latches qui mémorisent les mots d'entrée une fois sur N .

Les filtres numériques utilisés dans les circuits de ce type peuvent avoir un nombre élevé de coefficients ,de 50 à plus de 300.

Dans certains circuits la décimation est effectuée en plusieurs étapes, un premier filtre traite directement les bits issus du codeur ΔΣ avec une réduction de vitesse faible et fournit des mots assez courts qui sont repris ensuite par en second filtre qui allonge de nouveau les mots et réduit leur cadence , et ainsi de suite . .

La nature binaire des mots d'entrée facilite grandement la structure du multiplicateur. Il suffit à chaque étage d'introduire dans le sommateur final a_k ou $-a_k$ suivant que le mot d'entrée est +1 ou –1 . Ceci est illustré schématiquement par la figure ci contre .