



Departement industriële wetenschappen en technologie

Smith Kaarten

Jan Genoe
KHLim

AC-Stroom van een transmissielijn

- Wanneer een signaal met amplitude $u(x)$ langs een transmissielijn van de bron naar de belasting loopt, hoort daarbij een stroom $i(x)$ zijnde:
- Wanneer een signaal met amplitude $\rho u'(x)$ van de belasting terugloopt naar de bron, hoort daarbij een stroom $i'(x)$ zijnde:
- Gecombineerd levert dit een stroom i'' :

$$i(x) = \frac{u(x)}{Z_o}$$

$$i'(x) = \frac{\rho u'(x)}{Z_o}$$

$$i''(x) = \frac{u(x)}{Z_o} - \frac{\rho u'(x)}{Z_o}$$

Verband tussen de amplitude en de positie

- Een in één richting lopende golf met vaste amplitude en frequentie van de bron heeft overal op de transmissielijn dezelfde amplitude maar een verschillende fase
- De fase varieert met de afstand x als:
- De fase van de teruglopende golf evolueert natuurlijk omgekeerd

$$u(x) = u_o e^{-jkx}$$

$$\rho u'(x) = \rho u_o' e^{jkx}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

Relatie ter hoogte van de belasting

- Ter hoogte van de belasting kiezen we $x=0$
- Daardoor krijgen we een negatieve x naar de bron toe
- De stroom en de spanningen aan de belasting worden nu:
- En natuurlijk geldt ook de wet van Ohm

$$u(0) = u_o + \rho u_o$$

$$i(0) = \frac{u_o}{Z_o} - \frac{\rho u_o}{Z_o}$$

$$Z_L = \frac{u(0)}{i(0)} = Z_o \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

Waarde van de reflectie aan de belasting

De waarde van de reflectiecoëfficiënt kan bepaald worden uit de karakteristieke impedantie Z_o en de belasting Z_L

$$Z_L = Z_o \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$
$$\rho = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}$$

Stroom-spanningsrelatie elders op de transmissielijn

- Eens de reflectie gekend, kunnen we ook de stromen en de spanning uitrekenen elders op de transmissielijn
- Hieruit volgt dan ook de impedantie op dat punt

$$u(-l) = u_o e^{-jk(-l)} + \rho u_o e^{jk(-l)}$$

$$i(-l) = \frac{u_o e^{-jk(-l)}}{Z_o} - \frac{\rho u_o e^{jk(-l)}}{Z_o}$$

$$Z(-l) = \frac{u(-l)}{i(-l)} = Z_o \frac{e^{jkl} + \rho e^{-jkl}}{e^{jkl} - \rho e^{-jkl}}$$

Andere formulering van de impedantie

- Dit is de impedantie van een transmissielijn bij een bepaalde frequentie
- Wanneer de frequentie verandert, verandert het golfgetal k en dus ook de impedantie

$$\begin{aligned} Z(-l) &= Z_o \frac{e^{jkl} + \rho e^{-jkl}}{e^{jkl} - \rho e^{-jkl}} \\ &= Z_o \frac{Z_L + jZ_o \tan(kl)}{Z_o + jZ_L \tan(kl)} \end{aligned}$$

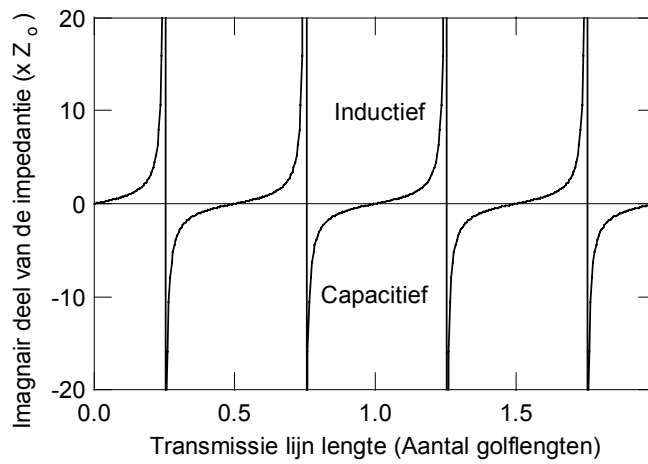
Voorbeeld 1: aangepaste transmissielijn

- Er treedt geen reflectie op en de impedantie is over de gehele transmissielijn gelijk aan de karakteristieke impedantie Z_o .
- De impedantie is ook onafhankelijk van de frequentie
- Alle energie van het signaal wordt overgebracht naar de belasting

$$\rho = 0$$
$$Z(-l) = Z_o = Z_L$$

Voorbeeld 2: kortgesloten transmissielijn

- Terugkerende golf heeft zelfde amplitude maar tegengesteld teken
- Alle energie in de golf keert terug
 - kan ook niet anders, er is geen belasting om energie aan te geven
- De geziene impedantie is zuiver imaginair
 - kan ook niet anders, er is geen vermogenverbruik



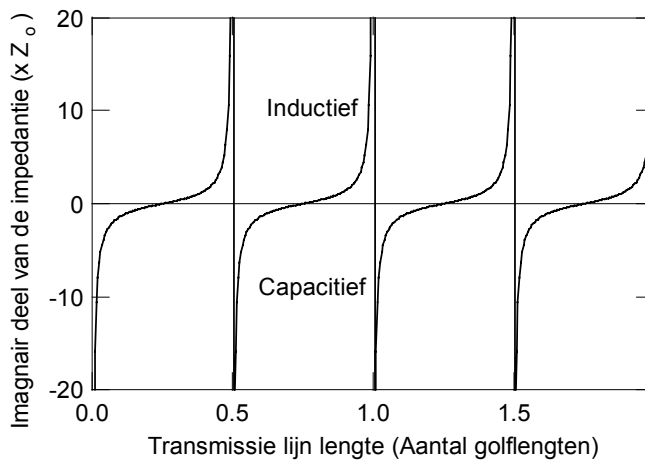
$$\rho = -1$$
$$Z(-l) = jZ_0 \tan(kl)$$

Smith kaarten

Jan Genoe

Voorbeeld 3 open transmissielijn

- Terugkerende golf heeft zelfde amplitude en hetzelfde teken
- Alle energie in de golf keert terug
 - kan ook niet anders, er is geen belasting om energie aan te geven
- De geziene impedantie is zuiver imaginair
 - kan ook niet anders, er is geen vermogenverbruik



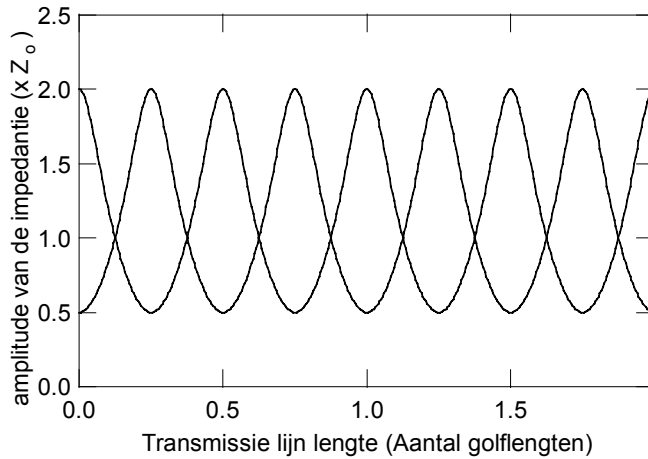
$$\rho = 1$$
$$Z(-l) = \frac{-jZ_0}{\tan(kl)}$$

Smith kaarten

Jan Genoe

Voorbeeld 4: slecht aangepaste transmissielijn

- Wanneer de transmissielijn afgesloten is op een belasting die niet aangepast is, dan varieert de impedantie van de lijn met zijn lengte.



Lijn afgesloten op

- de helft
- het dubbele van zijn Z_0 .

Een deel van de energie komt dan ook terug naar de bron.

Voorbeeld 5: frequentieafhankelijkheid

- In de voorafgaande voorbeelden beschouwden we steeds de impedantie in functie van de lengte van de lijn. We kunnen de impedantie ook plotten in functie van de frequentie. We bekomen hier gelijkaardige grafieken omdat:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

$$Z(k) = Z_o \frac{Z_L + jZ_o \tan(kl)}{Z_o + jZ_L \tan(kl)}$$

Uitdrukking in functie van Γ

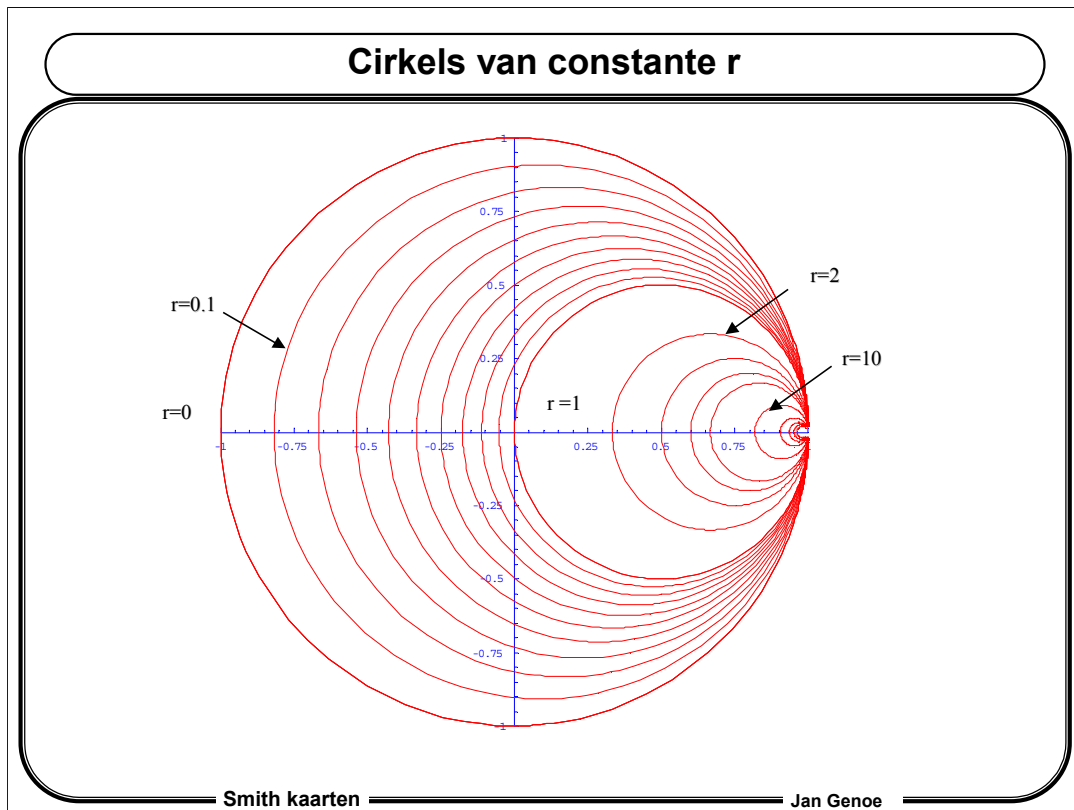
- De absolute waarde van ρ is steeds kleiner dan 1
- Γ kan voorgesteld worden in het complexe vlak
- Bewegen langs de transmissielijn is bewegen op een cirkel rond de oorsprong.

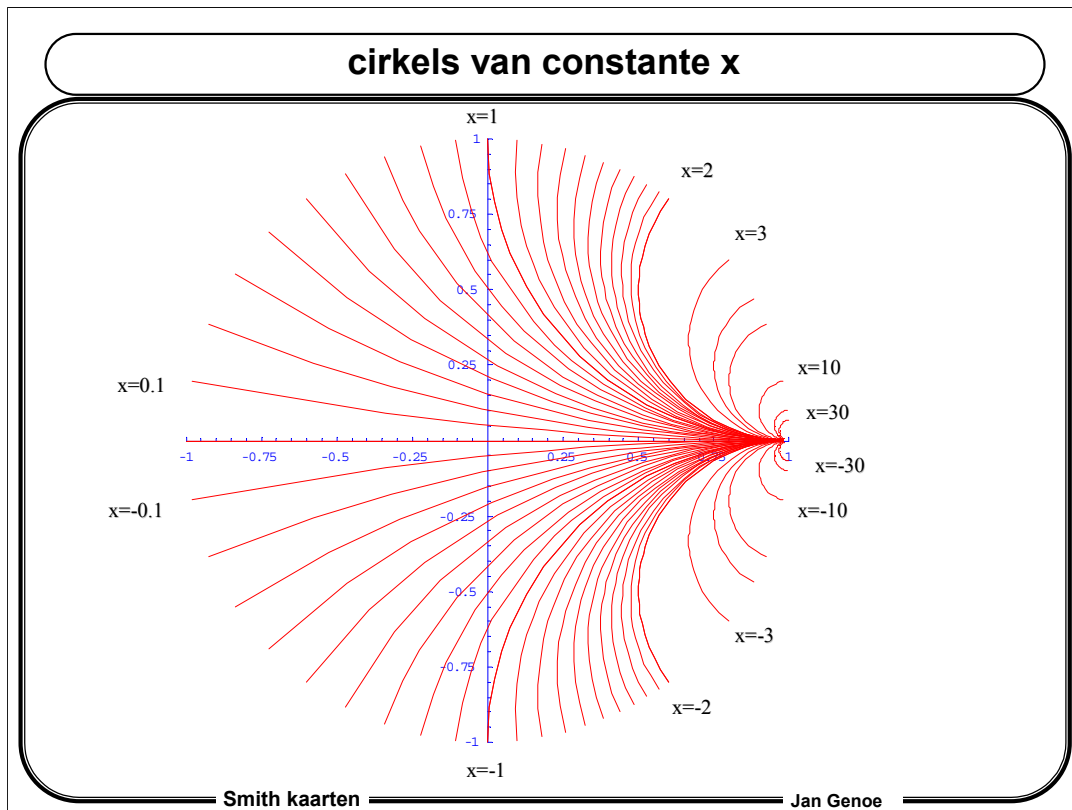
$$\begin{aligned} Z(-l) &= Z_o \frac{e^{jkl} + \rho e^{-jkl}}{e^{jkl} - \rho e^{-jkl}} \\ &= Z_o \frac{1 + \rho e^{-2jkl}}{1 - \rho e^{-2jkl}} \\ &= Z_o \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \end{aligned}$$

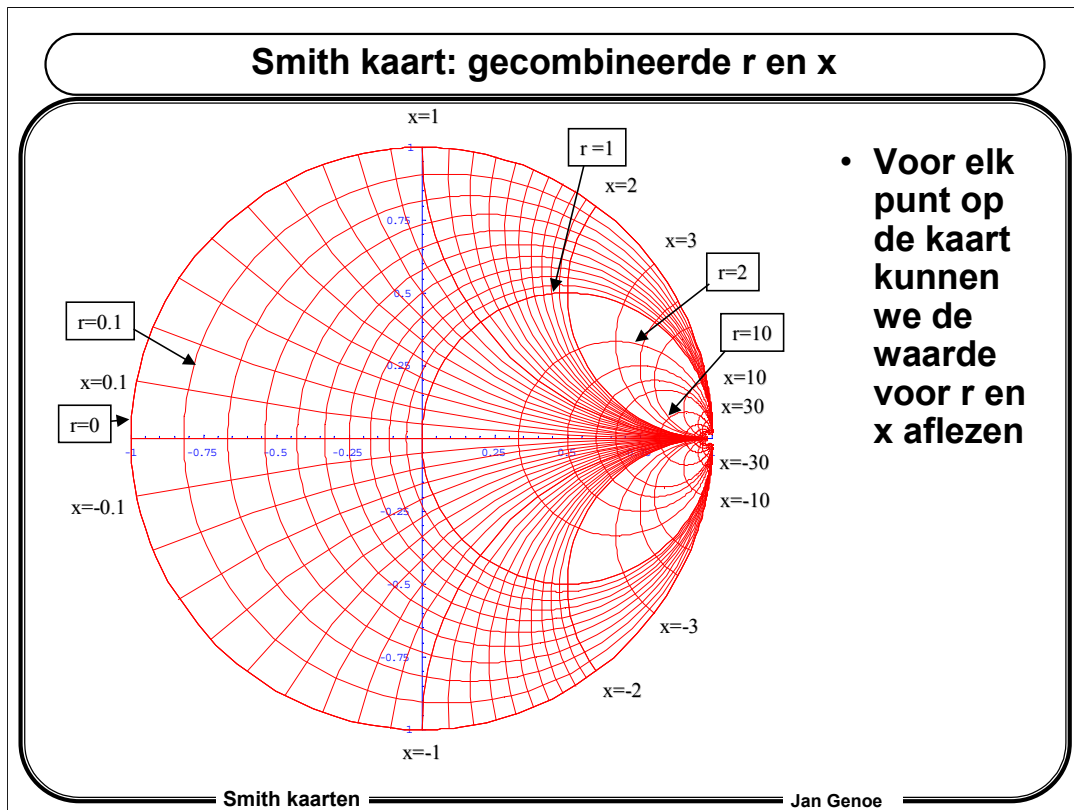
$$\Gamma = \rho e^{-2jkl}$$

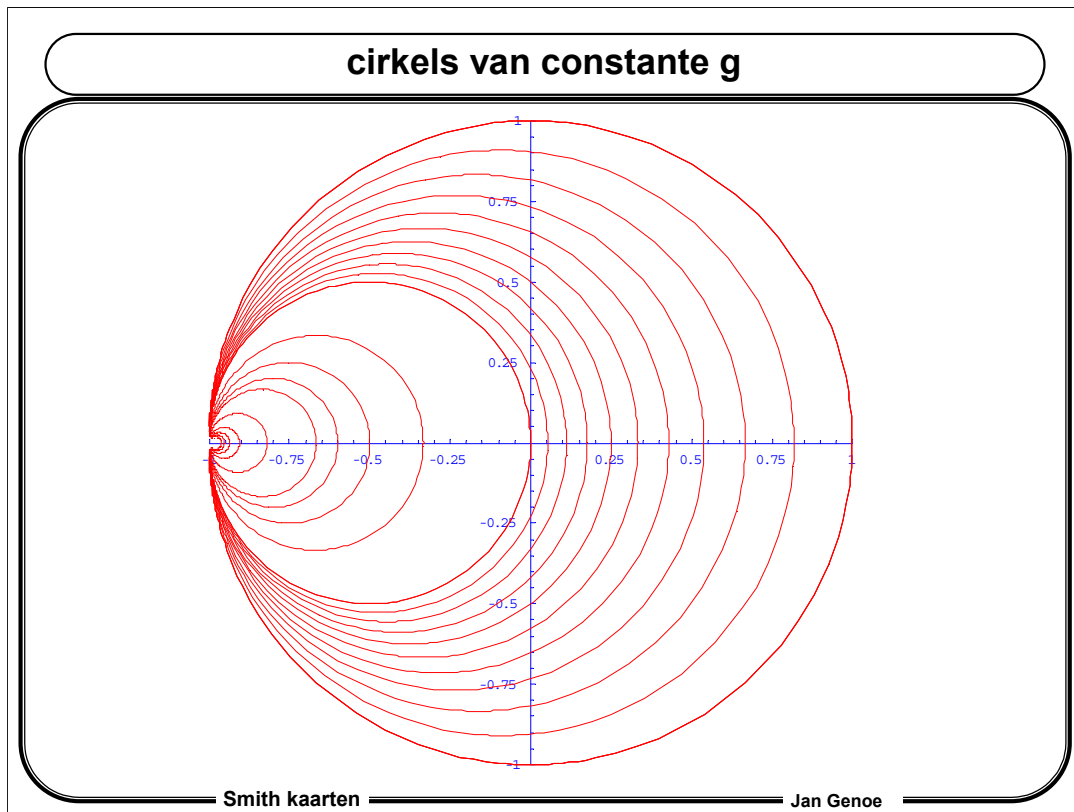
Smith kaart

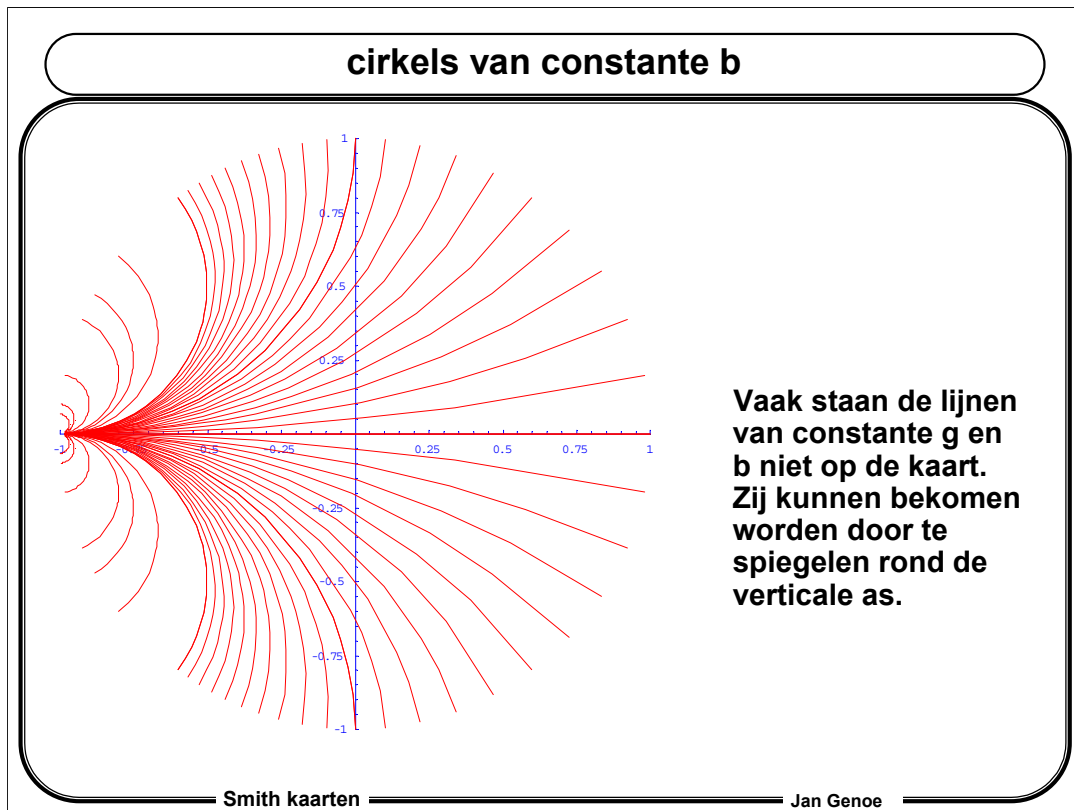
- Een Smith kaart is een cirkel met straal 1 in het complexe vlak waar we de waarde van Γ in tekenen.
- Een hele toer in de Smith kaart is een transmissielijnlengte van $\lambda/2$
- Lijnen van constante r en x van $Z/Z_0 = r + iy$ zijn in deze kaart getekend zodat we van de waarde van Γ onmiddellijk oom de waarde van Z kunnen aflezen.
- Ook lijnen van constant g en b (met $Y/Z_0 = g + ib$) kunnen op deze Smith kaart getekend worden











Werken met een Smith kaart

- Plaats het punt van de belasting $Z_L/Z_o=r+ix$ of $Y_L Z_o=g+ib$ op de Smith kaart door de kruising te vinden van de respectievelijke r en x lijnen of de g en b lijnen.
- Beweeg dan aan de hand van een concentrische cirkel (wijzerzin) van de belasting naar de bron toe (een halve golflengte is een omwenteling).
- Hier kunnen we dan weer Z of Y aflezen.
 - mogelijk tellen we hier een bijkomend element op
 - de nieuwe Z of Y plaatsen we dan terug op de kaart en herbeginnen voor het resterend stuk van de lijn ...

Opmerkingen

- In het voorafgaande veronderstelden we steeds een redelijk korte transmissielijn, waarbij we de verzwakking op de lijn konden verwaarlozen. Wanneer de verzwakking meegeteld wordt, wordt de formule:

$$Z(-l) = Z_o \frac{e^{jkl+\alpha l} + \rho e^{-jkl-\alpha l}}{e^{jkl+\alpha l} - \rho e^{-jkl-\alpha l}}$$

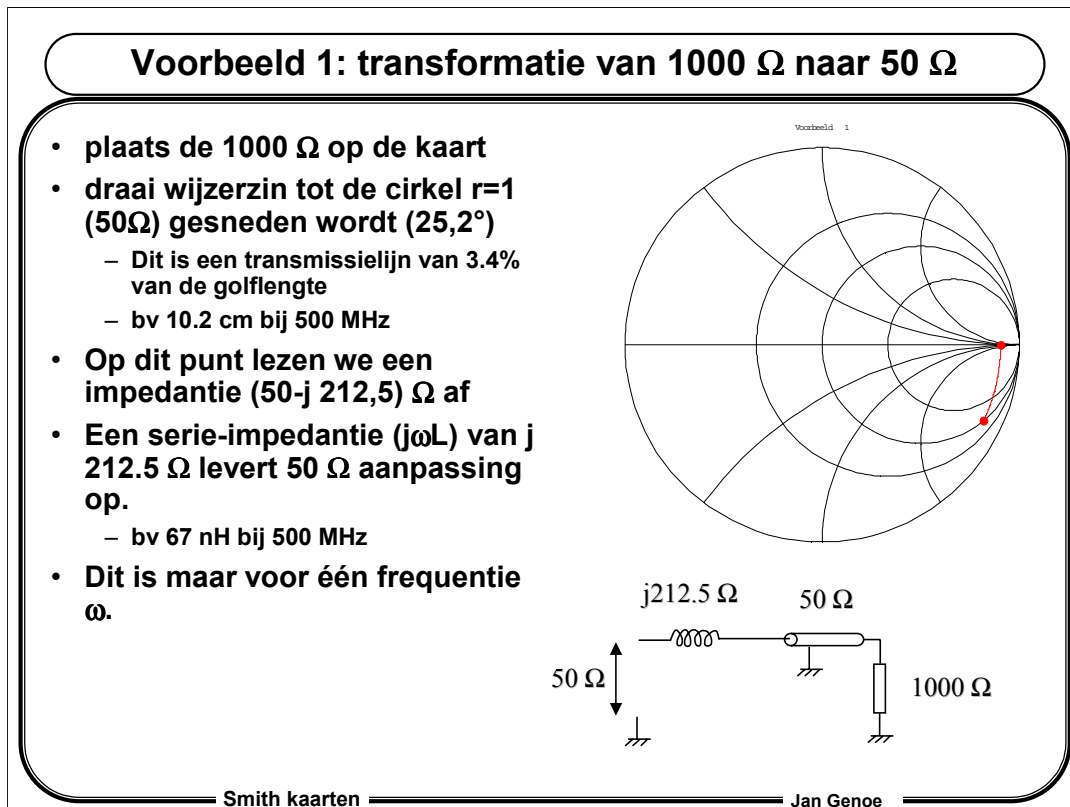
Inbrengen van de verzwakking in Γ

- De verzwakking op de lijn maakt de reflectie kleiner
- We gaan dus op de Smith kaart op een exponentiele spiraal naar het centrum toe als we van de belasting naar de bron gaan.

$$\Gamma = \rho e^{-2jkl} e^{-2\alpha l}$$

Matching

- Wanneer we een signaal met een bepaalde frequentie beschouwen en we gaan naar de bron toe, zullen we op een bepaald moment de cirkel $r=1$ snijden.
- Hier kunnen we dan ofwel de juiste condensator in serie plaatsen, ofwel de juiste inductantie in serie bijplaatsen zodat $x=0$
- We kunnen ook stoppen als we de cirkel $g=1$ snijden.
- Hier kunnen we een condensator, inductantie of transmissielijn in parallel bijplaatsen zodat $b=0$

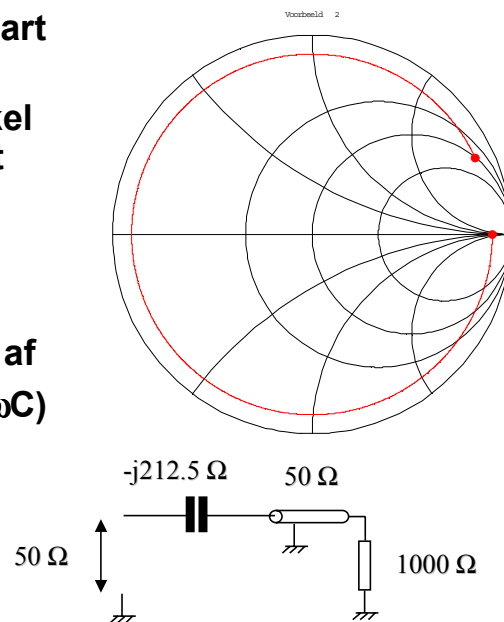


We kunnen dus aan de hand van deze aanpassing een antenne van 1000 Ohm aansluiten op een coaxiale kabel met een karakteristieke impedantie van 50 Ohm zonder reflecties te bekomen. Let echter wel op: Dit werkt slechts bij een frequentie en de 1000 Ohm weerstand zal ook de volledige energie in het signaal dissiperen. Stel bijvoorbeeld dat er een sinusvormig signaal van 1 Volt piekspanning wordt aangelegd. Hierdoor zou er bij een afsluiting op 50 Ohm 10 mW gedissipeerd worden. Welnu de 1000 Ohm weerstand zal evenveel energie opnemen. Hierdoor wordt het spanningsniveau aan de belasting wel opgeslingerd tot 4.47 Volt piekspanning.

P.S. Bij de berekening van de golflengte werd de permitiviteit van het dielectricum van de transmissielijn 4 verondersteld.

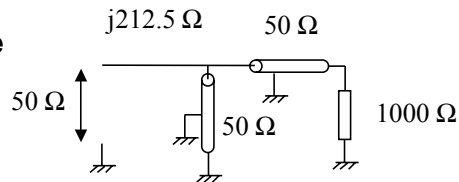
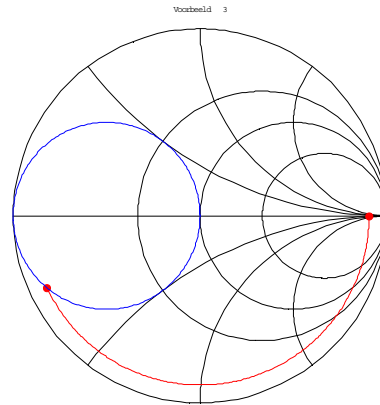
Voorbeeld 2: transformatie van 1000Ω naar 50Ω

- plaats de 1000Ω op de kaart
- draai wijzerzin tot de bovenste helft van de cirkel $r=1$ (50Ω) gesneden wordt ($334,8^\circ$)
 - Dit is een transmissielijn van 46.6% van de golflengte
- Op dit punt lezen we een impedantie $(50+j 212,5) \Omega$ af
- Een serie-impedantie ($1/j\omega C$) van $-j 212.5 \Omega$ levert 50Ω aanpassing op.
 - bv 1.5 pF bij 500 MHz
- Dit is maar voor één frequentie ω .



Voorbeeld 3: transformatie van 1000Ω naar 50Ω

- plaats de 1000Ω op de kaart
- draai wijzerzin tot de onderste helft van de cirkel $g=1$ (0.02 S) gesneden wordt ($154,8^\circ$)
 - Dit is een transmissielijn van 21.6 % van de golflengte
- Op dit punt lezen we een impedantie ($0.02+j 0.08497$) S af
- Een parallel-impedantie van $-j 0.08497 \text{ S}$ levert 50Ω aanpassing op.
 - bv een spoel van 3.4 nH bij 500 MHz
- In de plaats van een spoel kunnen we ook een kortgesloten stuk transmissielijn van de juiste lengte gebruiken.
- Dit is maar voor één frequentie ω .



Smith kaarten

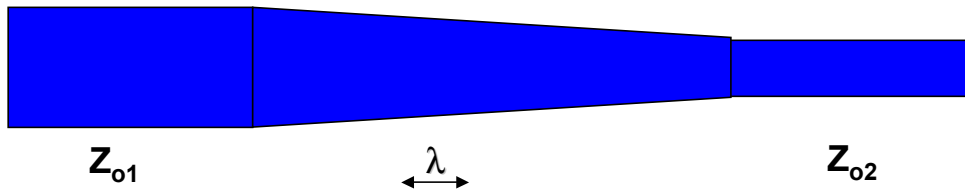
Jan Genoe

Als er een DC signaal op de transmissielijn kan zitten, is het in de meeste sommige gevallen beter een open stuk transmissielijn als stub (parallel stuk) te nemen. In dit geval zullen we een langer stuk transmissielijn nodig hebben.

We kunnen, als we het stuk transmissielijn nog een stuk langer maken (tot het tweede snijpunt met de blauwe cirkel) ook een een capaciteit in parallel plaatsen. Deze capaciteit kunnen we dan vervangen door een stukje open transmissielijn.

Impedantie aanpassing tussen transmissielijnen

- Om over te gaan van een transmissielijn met een karakteristieke impedantie Z_{o1} naar een transmissielijn met impedantie Z_{o2} bestaan de volgende mogelijkheden:
 - Een kwart golflengte stukje
 - » Dit werkt maar bij één frequentie
 - Een getaperde overgang over meerdere golflengtes
 - » Door de langzame overgang treedt slechts een minimale reflectie op.
 - » Werkt voor alle frequenties

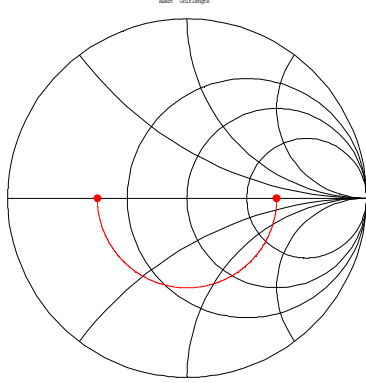
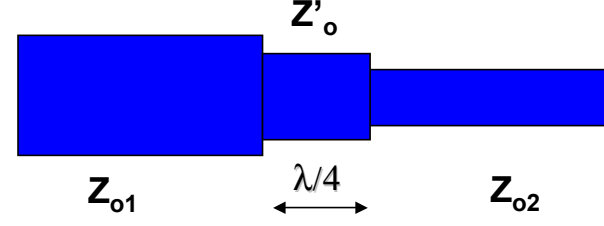


Smith kaarten

Jan Genoe

kwart golflengte stukje

- Kies een stukje transmissielijn met karakteristieke impedantie $(Z'_o)^2 = Z_{o1} Z_{o2}$
- Hierdoor liggen Z_{o1} en Z_{o2} symmetrisch op de Smith kaart van Z'_o
- Een halve cirkel verbindt de beide impedanties, dit is een kwart van de golflengte

Smith kaarten Jan Genoe