

CHAPITRE 6 : REPRESENTATION DES FONCTIONS DE TRANSFERT - DIAGRAMMES DE BODE

1.	INTRODUCTION	44
2.	DIAGRAMMES DE BODE - INTERET DE L'ECHELLE LOGARITHMIQUE	44
2.1	LE DECIBEL	44
2.2	REPRESENTATION EN ECHELLE LINEAIRE	44
2.3	REPRESENTATION EN ECHELLES LOGARITHMIQUES.....	45
2.3.1	<i>Echelle logarithmique</i>	45
2.3.2	<i>Représentation du module</i>	45
2.3.3	<i>Représentation de la phase</i>	47
3.	INTERET DES DIAGRAMMES DE BODE POUR LES SYSTEMES EN CASCADE.....	47

1. Introduction

La fonction de transfert $\overline{H(j\omega)}$ d'un système quelconque est un nombre complexe.

Trois solutions sont utilisées en pratique pour représenter ce nombre complexe graphiquement.

- Partie imaginaire en fonction de la partie réelle avec paramétrage en fréquence : **plan de Nyquist**.
- Module en fonction de la phase avec paramétrage en fréquence : **plan de Black**.
- Module en décibels en fonction de la fréquence et phase en fonction de la fréquence sur une échelle de fréquence logarithmique : **diagrammes de Bode**.

Dans ce chapitre, nous décrivons la représentation par les diagrammes de Bode. Les autres représentations seront abordées en seconde année dans le module M6.

Pour la suite, on notera H , H_{dB} et j le module linéaire, le module en décibels et la phase de la fonction de transfert respectivement.

2. Diagrammes de Bode - Intérêt de l'échelle logarithmique

2.1 Le décibel

Le décibel (*dB*) est une échelle logarithmique définie à partir des puissances de la façon suivante :

$$P_{dB} = 10 \text{Log}_{10}(P)$$

où : P est une puissance exprimée en **Watts** sur une échelle linéaire.

Pour les tensions, le facteur devant le *Log* est 20 du fait que la puissance est proportionnelle au carré de la tension.

Le module de la fonction de transfert s'exprime comme le rapport du module de la tension de sortie sur le module de la tension d'entrée du système considéré. En *dB*, on aura donc :

$$H_{dB} = 20 \text{Log}_{10}(H) = 20 \text{Log}_{10}\left(\left|\frac{\overline{V_s}}{\overline{V_e}}\right|\right)$$

Pour la suite, on utilisera *Log* pour signifier le logarithme en base 10.

2.2 Représentation en échelle linéaire

Prenons l'exemple du circuit *RC* de la figure 6.1.

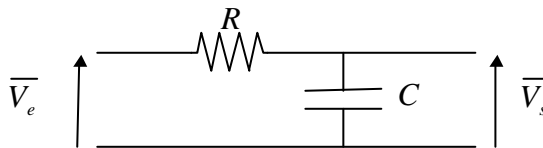


Figure 6.1. Circuit RC.

On a :

$$\overline{H} = \frac{\overline{V_s}}{\overline{V_e}} = \frac{1}{1 + j\omega t} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

où $t = RC$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Soit pour le module :

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

En posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient : $H = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Si l'on représente H sur une échelle de fréquence linéaire, on obtient une courbe ne présentant pas d'asymptote lorsque $x \ll 1$ ou $x \gg 1$. Le tracé de H nécessite donc le calcul d'un grand nombre de points.

Ce raisonnement peut être généralisé à toutes les fonctions de transfert se présentant sous une forme polynomiale :

$$\overline{H} = \frac{1 + a_0 jx + a_1 (jx)^2 + \dots + a_n (jx)^n}{1 + b_0 jx + b_1 (jx)^2 + \dots + b_m (jx)^m}$$

Dans tous les cas le tracé en échelle linéaire est long et fastidieux. On verra également qu'il ne permet pas de dégager des informations de façon rapide sur le système (Fréquence de coupure, Bande Passante, ...).

2.3 Représentation en échelles logarithmiques

2.3.1 Echelle logarithmique

L'échelle des fréquences est logarithmique. On fait correspondre x à $\text{Log}(x)$. On peut indifféremment utiliser le Log en base 2 (log népérien) ou en base 10.

Trois points importants sont à retenir lorsque l'on utilise une échelle logarithmique :

- Une multiplication de la fréquence par un facteur constant se traduit par un décalage géométrique constant sur l'axe des fréquences.
- L'échelle ne peut pas démarrer du point 0 (fréquence nulle) du fait que $\text{Log}(0) = -\infty$.
- Une octave et une décade correspondent respectivement à une multiplication par un facteur 2 et 10 de la fréquence.

2.3.2 Représentation du module

2.3.2.1 Tracé asymptotique

Le module est représenté en dB sur l'échelle logarithmique. En reprenant l'exemple du circuit RC , on a :

$$H_{dB} = 20\text{Log}(H) = 20\text{Log}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -20\text{Log}\left(\sqrt{1+x^2}\right).$$

- Lorsque $x \gg 1$, on a : $\lim_{x \gg 1} H_{dB} = -20\text{Log}\left(\sqrt{x^2}\right) = -20\text{Log}(x)$ qui représente une droite de pente -20dB/décade sur une échelle logarithmique (ou encore -6dB/octave). En effet, pour $x=1$, on a $H_{dB} = 0$; pour $x=10$, on a $H_{dB} = -20dB$, soit une diminution du module de 20dB pour une décade.
- Lorsque $x \ll 1$, on a : $\lim_{x \ll 1} H_{dB} = -20\text{Log}\left(\sqrt{1}\right) = 0$ qui représente une droite de pente nulle.

En échelle logarithmique, le module en dB présente donc deux asymptotes, pour $x \gg 1$ et $x \ll 1$, soit pour les «hautes» fréquences et les «basses» fréquences (figure 6.2). C'est évidemment le cas pour toutes les fonctions de transfert se présentant sous une forme polynomiale.

L'intérêt de l'échelle logarithmique est donc énorme pour **le tracé et l'analyse** du module d'une fonction de transfert.

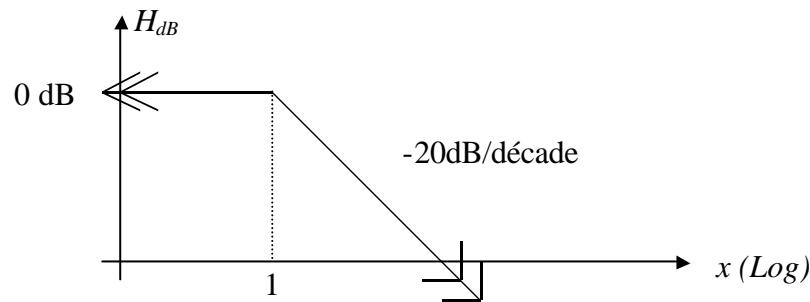


Figure 6.2. Diagramme de Bode. Tracé asymptotique du module de la fonction de transfert du circuit RC.

Quelques points (1 à 3) suffisent à représenter le module de la fonction de transfert à partir du tracé asymptotique.

2.3.2.2 Bande passante - Fréquences de coupure

En observant le tracé asymptotique de la figure 6.2, on remarque que le circuit RC laisse passer, sans trop les atténuer, les signaux de « basse » fréquence et atténue fortement les signaux de « haute » fréquence. On dit qu'il s'agit d'un filtre « Passe-bas ». De façon arbitraire, on a l'habitude de définir une limite entre les « basses » et les « hautes » fréquences. Cette limite aboutit aux notions de **Bande Passante** et de **fréquences de coupure**.

Considérons un système auquel on applique un signal d'entrée de puissance P_e et qui délivre en sortie un signal de puissance P_s . Lorsque le signal d'entrée \bar{V}_e n'est pas atténué par le filtre, le rapport $\frac{P_s}{P_e}$ est

maximum. Ce rapport devient très faible si le signal \bar{V}_e est fortement atténué par le filtre. Si $\left(\frac{P_s}{P_e}\right)_{\max}$ est la

valeur maximum du rapport $\frac{P_s}{P_e}$, on convient de façon arbitraire que le signal « passe » tant que le rapport

$\frac{P_s}{P_e}$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{P_s}{P_e}\right)_{\max}$ et « ne passe pas » dans le cas contraire.

La **Bande Passante (BP)** est l'intervalle de fréquence Δf pour lequel :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P_s}{P_e}\right)_{\max} \leq \frac{P_s}{P_e} \leq \left(\frac{P_s}{P_e}\right)_{\max}$$

Les fréquences pour lesquelles $\frac{P_s}{P_e} = \frac{1}{2}\left(\frac{P_s}{P_e}\right)_{\max}$ sont les **fréquences de coupure** du système considéré.

Le plus souvent, on s'intéresse à l'amplitude des signaux plutôt qu'à leur puissance. Or $\frac{P_s}{P_e}$ est

proportionnel à $\frac{S^2}{E^2}$. La relation définissant la bande passante devient donc :

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} \right|_{\max}^2 \leq \left| \frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} \right|^2 \leq \left| \frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} \right|_{\max}^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} \right|_{\max} \leq \left| \frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} \right| \leq \left| \frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} \right|_{\max}$$

Du fait que $\left| \frac{\overline{V_s}}{\overline{V_e}} \right| = |\overline{H}|$, on peut écrire : $\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \leq H \leq H_{\max}$.

Les fréquences de coupure du système sont donc les fréquences pour lesquelles on a : $H = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$. En dB,

cela devient : $20 \text{Log}(H) = 20 \text{Log}\left(\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}\right) = H_{dB_{\max}} - 3 \text{dB}$.

On parlera dans ce cas de **fréquence de coupure à -3dB**.

2.3.3 Représentation de la phase

La phase est représentée en degrés ou en radians sur l'échelle logarithmique. En reprenant l'exemple du circuit RC, on a :

$$j = -\text{ArcTan}(x)$$

- Lorsque $x \gg 1$, on a : $\lim_{x \gg 1} j = -\frac{P}{2}$ qui représente une droite de pente nulle.
- Lorsque $x \ll 1$, on a : $\lim_{x \gg 1} j = 0$ qui représente une droite de pente nulle.

En échelle logarithmique, la phase présente donc deux asymptotes, pour $x \gg 1$ et $x \ll 1$, soit pour les « hautes » fréquences et les « basses » fréquences (figure 6.3). C'est évidemment le cas pour toutes les fonctions de transfert se présentant sous une forme polynomiale.

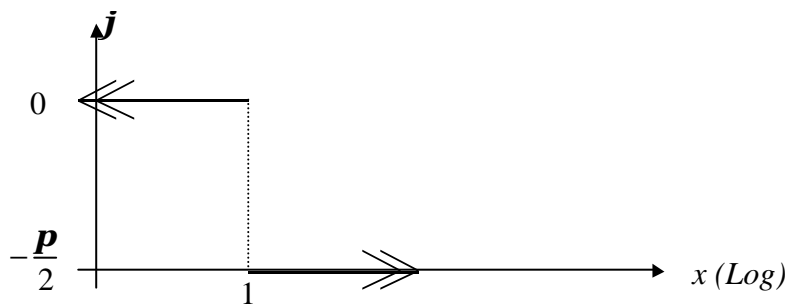


Figure 6.3. Diagramme de Bode. Tracé asymptotique de la phase de la fonction de transfert du circuit RC.

Quelques points (1 à 3) suffisent à représenter la phase de la fonction de transfert à partir du tracé asymptotique.

3. Intérêt des diagrammes de Bode pour les systèmes en cascade

On considère n systèmes de fonctions de transfert $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \dots, \overline{H}_n$ montés en cascade (figure 6.4).

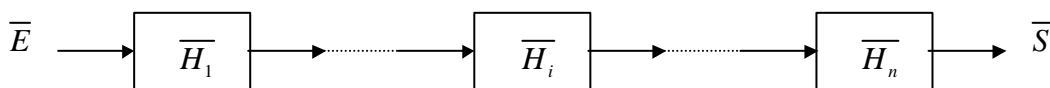


Figure 6.4. Cascade de n systèmes.

La fonction de transfert globale \overline{H} s'écrit :

$$\overline{H} = \frac{\overline{S}}{\overline{E}} = \overline{H}_1 \overline{H}_2 \dots \overline{H}_n = \prod_{i=1}^n \overline{H}_i$$

Le module et la phase de \overline{H} s'écrivent alors :

$$H = \prod_{i=1}^n H_i \text{ et } j = \sum_{i=1}^n j_i$$

Le module en dB s'écrit : $H_{dB} = 20 \text{Log} \left(\prod_{i=1}^n H_i \right) = \sum_{i=1}^n H_{dB_i}$.

Donc le module en dB et la phase de la fonction de transfert globale \overline{H} s'obtiennent en additionnant les modules en dB et les phases des \overline{H}_i . Il est alors aisé de tracer les diagrammes asymptotiques de \overline{H} à partir des diagrammes asymptotiques des \overline{H}_i en additionnant simplement les asymptotes.

Exemple : cascade de deux systèmes du premier ordre.

On considère deux systèmes du premier ordre définis par leurs fonctions de transfert respectives \overline{H}_1 et \overline{H}_2 :

$$\overline{H}_1 = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \quad \text{et} \quad \overline{H}_2 = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$$

Sur la figure 6.5, on a représenté les diagrammes de Bode de \overline{H}_1 et \overline{H}_2 (en considérant $\omega_1 > \omega_2$), puis ceux de $\overline{H} = \overline{H}_1 \overline{H}_2$.

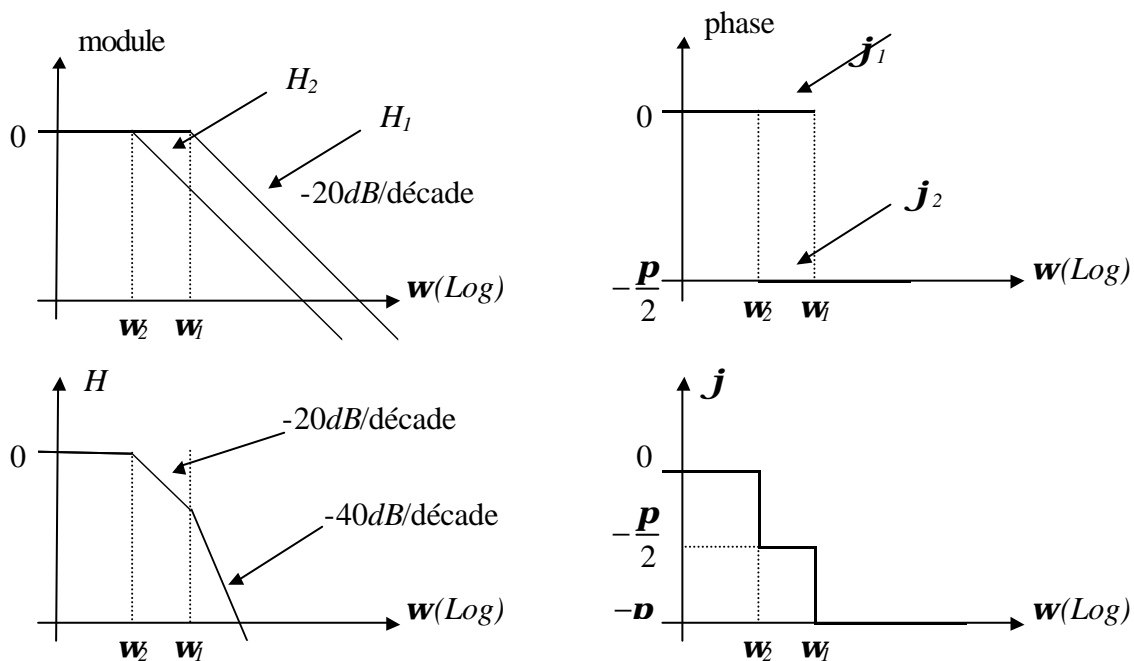


Figure 6.5. Diagrammes de Bode de \overline{H}_1 , \overline{H}_2 et $\overline{H} = \overline{H}_1 \overline{H}_2$.

Pour le module de \overline{H} , on a une asymptote $H_{dB} = 0$ pour $\omega \ll \omega_2$, un « palier » de pente -20dB/décade entre ω_2 et ω_1 et une asymptote de pente -40dB/décade pour $\omega \gg \omega_1$.

Pour la phase de \overline{H} , on a une asymptote $j = 0$ pour $\omega \ll \omega_2$, un palier $j = -\frac{p}{2}$ entre ω_2 et ω_1 et une asymptote $j = -p$ pour $\omega \gg \omega_1$.

L'allure des courbes réelles se déduit ensuite très simplement à partir des tracés asymptotiques.