# Ontwerp van filters

Johan Baeten
KHLim



## Introductie filters

- In deze cursus bespreken we hoe we een elektronisch circuit kunnen opbouwen (synthetiseren) met een gevraagde transferfunctie
- Dit is het omgekeerde van een analyse:
  - Een analyse vertrekt van een circuit en bepaalt hieruit het gedrag
- We gaan de werkwijze die we gebruikten voor de analyse dan ook omkeren.

## Analyse van een willekeurig circuit

- Het kleinsignaalgedrag van een willekeurig circuit kunnen we uitrekenen aan de hand van de MNA matrix (MNA: Modified Nodal Analysis).
- Wanneer we één enkel ingangsignaal hebben ($V_{in}$) kunnen we de spanningen van alle knopen uitdrukken in functie van de spanningsbron die staat aan $V_{in}$. Dus ook $V_{uit}$.

Filters Johan Baeten KHLim

## Ingang- en uitgangssignalen in een Nodale Matrix

$$\boxed{M \cdot V = G}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \overset{\longleftarrow\quad n \quad\longrightarrow}{} \qquad\qquad \overset{\leftarrow\; p \;\rightarrow}{} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ n \\ \\ \\ \\ \\ p \\ \\ \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 & \ddots & \vdots & & \vdots & & & & & \\
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & -1 & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & \ddots & & & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \\
\hline
 & & 1 & & -1 & & & \ddots & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \ddots & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} \\ v_{uit} \\ v_i \\ \\ v_j \\ \\ \\ \hline I \\ \\ \\ \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ \\ 0 \\ \\ \\ \hline v_{in} \\ \\ \\ \end{array}\right]
\end{array}$$

Filters Johan Baeten KHLim

## Uitdrukking voor de transferfunctie

- **De transferfunctie kan bepaald worden als een element uit de inverse van de nodale matrix.**
- **Een element van de inverse van een matrix kan uitgedrukt worden als een breuk van 2 determinanten.**
- **Deze determinanten kunnen uitgeschreven worden als veeltermen**
- **Hieruit kunnen we besluiten dat de transferfunctie kan geschreven worden als een breuk van 2 veeltermen in j$\omega$**
  - **De orde van de veeltermen is maximaal het dubbele van het aantal elementen uit de matrix**
  - **Deze veeltermen hebben reële coëfficiënten**

$$V = M^{-1}G$$

$$\frac{v_{uit}}{v_{in}} = M^{-1}_{p,q}$$

$$\frac{v_{uit}}{v_{in}} = \frac{\sum_{i=0}^{2n} a_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{2n} b_i (j\omega)^i}$$



## Opsplitsing van transferfuncties

$$\frac{v_{uit}}{v_{in}} = \frac{\sum_{i=0}^{2n} a_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{2n} b_i (j\omega)^i} = \frac{\prod_{i=1}^{m} (j\omega - n_i)}{\prod_{i=1}^{k} (j\omega - p_i)}$$

- **Door het zoeken van de nulpunten van deze veeltermen kunnen we deze veeltermen ontbinden in factoren.**
  - **De nulpunten van de teller noemen we nullen**
  - **De nulpunten van de noemer noemen we polen**

## Bekomen van 2de orde veeltermen

$$(j\omega - n_i)\cdot\left(j\omega - \overline{n_i}\right) = (j\omega)^2 - 2\Re(n_i)\,j\omega + |n_i|^2$$
$$= s^2 - 2\Re(n_i)s + |n_i|^2$$

- **Wanneer er een nul of een pool complex is , hebben we ook steeds zijn complex toegevoegde, zodat we deze 2 factoren kunnen samennemen in een tweede orde veelterm.**
- **Deze tweede orde veelterm heeft reële coëfficiënten**



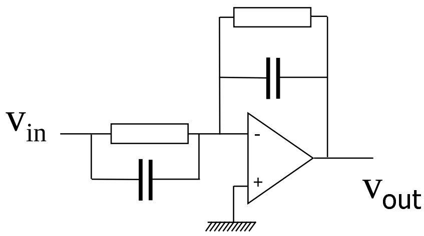
## Realisatie in cascadeerbare actieve circuits

$$H(j\omega) = \frac{v_{uit}}{v_{in}} = \frac{\prod_{i=1}^{m}(j\omega - n_i)}{\prod_{i=1}^{k}(j\omega - p_i)} = H_1(j\omega)\cdot H_2(j\omega)\cdot H_3(j\omega)\cdot \mathrm{K}$$

- **Om een gevraagde transferfunctie te realiseren gaan we deze opsplitsen in een product van eentermen en tweetermen met reële coëfficiënten.**
- **We realiseren elk van deze circuits op zich en plaatsen ze gewoon achter elkaar.**
  - **Het volgende circuit mag wel het vorige niet belasten, anders verandert de transferfunctie.**

## Algemeen circuit voor een eerste orde filter

- **Algemeen circuit voor een eerste orde filter**






## Transferfuncties van eerste orde filters

- **Laagdoorlaat**
- **Hoogdoorlaat**
- **'All Pass'**

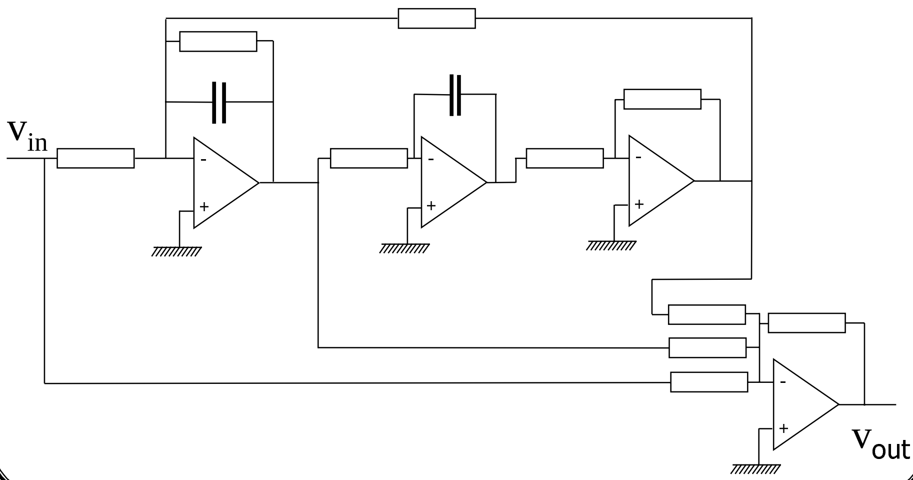
$$T_{LP} = \frac{\omega_o}{s+\omega_o} = \frac{1}{S+1}$$

$$T_{HP} = \frac{s}{s+\omega_o} = \frac{S}{S+1}$$

$$T_{AP} = \frac{s-\omega_o}{s+\omega_o} = \frac{S-1}{S+1}$$

## Biquad-filter

- **Algemeen circuit voor een tweede orde filter**






## Transferfuncties van tweede orde filters

- **Laagdoorlaat**

$$T_{LP} = \frac{\omega_o^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} = \frac{1}{S^2 + \frac{S}{Q} + 1}$$

- **Hoogdoorlaat**

$$T_{HP} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} = \frac{S^2}{S^2 + \frac{S}{Q} + 1}$$

- **Banddoorlaat**

$$T_{BP} = \frac{\frac{\omega_o}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} = \frac{\frac{S}{Q}}{S^2 + \frac{S}{Q} + 1}$$

- **Bandsper**

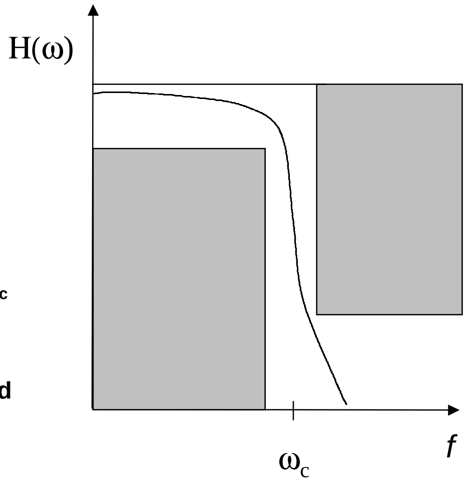
$$T_{BE} = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} = \frac{S^2 + 1}{S^2 + \frac{S}{Q} + 1}$$

- **'All Pass'**

$$T_{AP} = \frac{s^2 - \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} = \frac{S^2 - \frac{S}{Q} + 1}{S^2 + \frac{S}{Q} + 1}$$

## Laagdoorlaatfilters

- **Butterworth-filter:**
  - maximaal vlak rond 0
  - stijl dalend vanaf $\omega_c$
- **Chebyshev-filter**
  - een constante rimpel tot $\omega_c$
  - stijl dalend vanaf $\omega_c$
- **Invers-Chebyshev-filter**
  - een constante rimpel vanaf $\omega_c$
- **Bessel-Thomson-filter**
  - een maximaal vlakke vertragingskarakteristiek rond de frequentie $\omega_c$






## Butterworth-filter: transferfunctie

- **De transferfunctie is:**
  - alle afgeleiden rond 0 tot 2n-1 van deze functie zijn 0

$$T_n^2 = \frac{1}{1+(jS)^{2n}}$$

- **Voor een laagdoorlaatfilter is S:**

$$S = \frac{s}{\omega_c}$$

- **De amplitude voor s=$\omega_c$ is:**

$$|T_n| = 1/\sqrt{2}$$

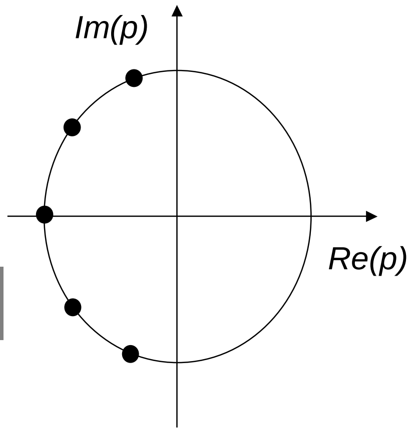
- **Boven deze frequentie daalt deze functie als:**

$$|T_n| = 1/|S|^n$$

## Butterworth-filter: plaats van de polen

- **Deze laagdoorlaatfilter heeft enkel polen**
- **Deze polen liggen op een cirkel met straal $\omega_c$ in het complexe vlak**
- **De orde van de filter *n* geeft een scheiding tussen de polen van $\pi/n$**

$$p_k = \omega_c \left[ -\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right) + j\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right) \right]$$



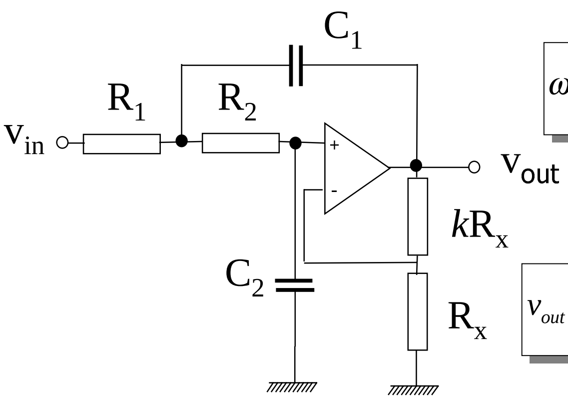

- **De polen met hetzelfde reëel deel vormen een 2de graads veelterm:**

$$s^2 + 2\,\mathrm{Re}(p_k)\,s + \omega_c^2$$



## Circuit ter realisatie van een Butterworth-filter

- **Sallen- en Key-circuit**
- **Dit circuit heeft maar 1 OPAMP nodig, in tegenstelling met het algemene circuit**
- ***k* laat toe de positie op de cirkel te kiezen**




$$\omega_c = \frac{1}{R_1C_1} = \frac{1}{R_2C_2} = \frac{1}{R_2C_1}$$

$$v_{out} = \frac{k+1}{s^2 + \omega_c(2-k)s + \omega_c^2}\,v_{in}$$

## Chebyshev-filter: transferfunctie

- **De transferfunctie is:**
  - **n rimpels in de doorlaatband**

$$T_n^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2\left(jS\right)}$$

- **met**

$$C_n\left(x\right) = \cos\left(n \cdot \arccos(x)\right)$$

- **met S voor een laagdoorlaatfilter:**

$$S = \frac{s}{\omega_c}$$

- **De amplitude voor s=$\omega_c$ is:**
  - **Dit is ook de amplitude van de rimpel**

$$\left|T_n\right| = 1\Big/\sqrt{1+\varepsilon^2}$$

- **Boven deze frequentie daalt deze functie als:**

$$\left|T_n\right| = 1\Big/\varepsilon^2 2^{n-1}\left|S\right|^n$$



## Chebyshev-filter: plaats van de polen

- **Deze laagdoorlaatfilter heeft enkel polen**
- **Deze polen liggen op een ellips in het complexe vlak met als lange as $\omega_c$ cosh(a) en als korte as $\omega_c$ sinh(a)**

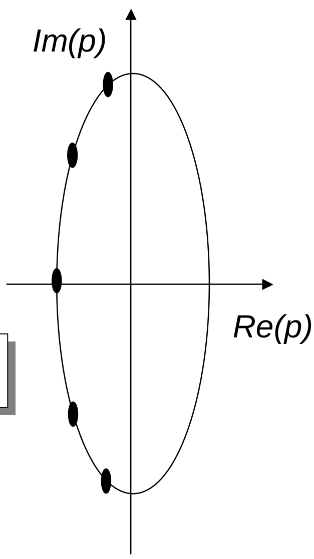
$$a = \frac{1}{n} \sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}$$

- **De orde van de filter n geeft een scheiding tussen de polen van $\pi$/n**

$$p_k = \omega_c\left[-\sinh a \sin\left(\frac{\pi(2k\text{-}1)}{2n}\right) + j\cosh a \cos\left(\frac{\pi(2k\text{-}1)}{2n}\right)\right]$$

- **De polen met hetzelfde reëel deel vormen een 2^de^ graads veelterm:**

$$s^2 + 2\,\mathrm{Re}(p_k)\,s + \omega_c^2$$



## Invers-Chebyshev-filter

- **De transferfunctie is:**
  - n rimpels in de sperband

$$T_n^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2(j/S)}{1+\varepsilon^2 C_n^2(j/S)}$$

- **met**

$$C_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$$

- **met S voor een laagdoorlaatfilter:**

$$S = \frac{s}{\omega_c}$$

- **De polen zijn de omgekeerden (1/p) van de Chebyshev-filter**
  - deze liggen niet op een cirkel



## Bessel-Thomson-filter (Delay filter)

- **We willen de output een vaste vertraging geven ten opzichte van de ingang.**
- **Hiervoor moet de fase lineair veranderen met de ingang.**
- **We drukken de group delay uit als een reeksontwikkeling van ω, en stellen hierin zoveel mogelijk coëfficiënten gelijk aan nul**

Fase delay

$$\theta = -\omega D$$

Group delay

$$D = -\frac{\partial\theta}{\partial\omega}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right]$$

## Transfer functie Bessel-Thomson-filter

- **De transferfunctie van een Bessel-Thomson-filter met eenheidsdelay kan ook bekomen worden aan de hand van de Bessel veeltermen.**
- **Een belangrijk voordeel van deze laagdoorlaatfilter is ook dat er geen overshoot is als het gevolg van een stap aan de ingang.**

$$T_n(s) = \frac{\mathcal{B}_n(0)}{\mathcal{B}_n(s)}$$

$$\mathcal{B}_n(s) = (2n-1)\mathcal{B}_{n-1}(s) + s^2\mathcal{B}_{n-2}(s)$$
$$\mathcal{B}_0(s) = 1$$
$$\mathcal{B}_1(s) = s+1$$



## Frequentie transformatie voor hoogdoorlaatfilter

- **Vanuit de transferfunktie**
  - **S voor een hoogdoorlaatfilter:** $S = \frac{\omega_c}{s}$
  - **We bekomen evenveel nullen op 0 als er polen zijn in de transferfunctie**
- **Vanuit een schema**
  - **vervang elke weerstand $R_i$ door de condensator:** $C_i = \frac{1}{R_i}$
  - **vervang elke condensator $C_i$ door de weerstand:** $R_i = \frac{1}{C_i}$

## Frequentie transformatie voor banddoorlaatfilter

- **Vanuit de transferfunktie**
  - S voor een banddoorlaatfilter:

$$S = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\frac{s^2 + \omega_1\omega_2}{s}$$

  - We bekomen dubbel zoveel trappen als er nodig zijn voor de laagdoorlaatfilter van dezelfde orde
  - We bekomen half zoveel nullen als er polen zijn in de transferfunctie



## Delay Equalization

- **Eerste orde all-pass**

$$\theta_{AP_1} = -2\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$$

$$D_{AP_1} = -\frac{\partial}{\partial\omega}\theta(\omega) = \frac{2/\omega_o}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$$

- **Tweede orde all-pass**

$$\theta_{AP_2} = -2\arctan\left(\frac{\omega\omega_o/Q}{\omega_o^2 - \omega^2}\right)$$

$$D_{AP_2} = \frac{2}{\omega_o Q}\frac{1+\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2/Q^2}$$