4. Simplification d'une fonction logique - Tableau de KARNAUGH

1. Problème posé

Une fonction logique peut être représentée par plusieurs expressions différentes mais **totalement** équivalentes :

$F = ab + \bar{a}c + bc$ est identique à $F = ab + \bar{a}c$ (cf . théorème du consensus)

$G = \bar{a}\bar{b} + ab + bc$ est identique à $G = \bar{a}\bar{b} + ab + \bar{a}c$

Simplifier une expression logique n'est pas facile car il y a plusieurs solutions possibles. Il faut donc <u>adopter une méthode</u> et <u>définir un critère</u> permettant de justifier que l'écriture de l'expression est minimale.

Exemple :

Soit la fonction logique F(a, b, c et d) définie sous forme décimale suivante (a poids fort) :

F(a,b,c,d) = Σ (1,5,7,9,11,12,14,15)

La 1ère forme canonique (somme de produit) de F est :

$$F = \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd + ab\bar{c}\bar{d} + abc\bar{d} + abcd$$

→ <u>Première simplification</u> : $F = \bar{a}\bar{c}d + bcd + \bar{b}\bar{c}d + acd + ab\bar{d}$
On obtient **5 produits** de **3 variables**

→ <u>Deuxième simplification</u> : $F = \bar{a}\bar{c}d + bcd + a\bar{b}d + ab\bar{d}$
On obtient **4 produits** de **3 variables**

→ <u>Troisième simplification</u> : $F = \bar{b}\bar{c}d + \bar{a}bd + ab\bar{d} + acd$
On obtient **4 produits** de **3 variables** différents du précédent

⇒ On obtient 3 écritures différentes. Certes, il est possible de passer d'une écriture à l'autre en utilisant les règles de l'algèbre de Boole ; ce qui n'est pas évident. Nous allons utiliser une représentation qui permet de trouver, de façon systématique, une expression algébrique la plus simple possible : la représentation par KARNAUGH : c'est une « table de vérité » dont la particularité réside dans la disposition des différentes valeurs que peut prendre la fonction pour chacune des combinaisons différentes des variables d'entrée.

2. Tableaux de KARNAUGH : Représentation

2.1 Définitions

- Le tableau de KARNAUGH est une représentation géométrique des fonctions logiques utilisant les surfaces (rectangles de KARNAUGH). L'intersection de ces rectangles forment des cases. L'ensemble de ces cases forment un tableau, d'où le nom « tableau de KARNAUGH »

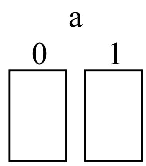
- Pour une fonction logique f de n variables, le tableau est constitué de la façon suivante :
    - il comporte 2^n cases : une case est associée à chaque état d'entrée ;
    - chaque case contient la valeur de la fonction f correspondant à l'état d'entrée associé à cette case

- Cette représentation est équivalente à celle d'une table de vérité: c'est à dire qu'une ligne de la table de vérité correspond à une case du tableau de KARNAUGH.

- Le tableau de KARNAUGH est généralement utilisé pour la simplification des fonctions logiques de 3 à 5 variables.

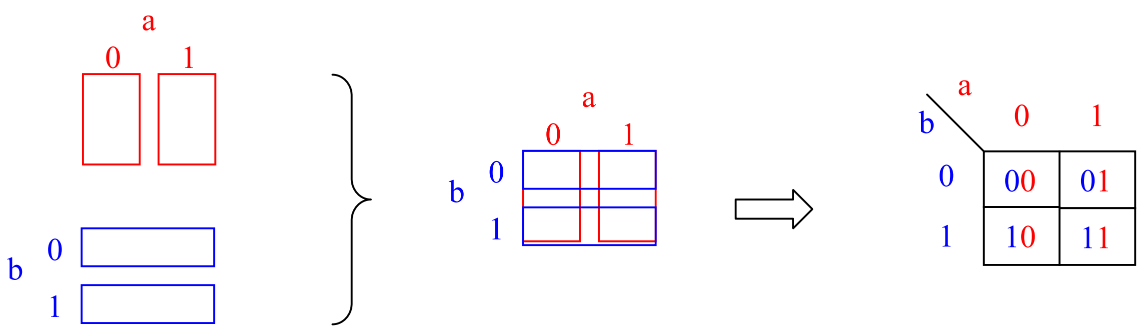
2.2 Représentation d'une variable

Soit la variable logique a : Elle peut prendre les valeurs 0 et 1. Cette variable est représentée par deux rectangles qui valent 0 ou 1 :

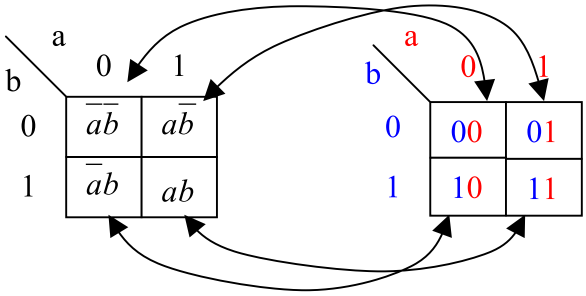


2.3 Représentation de deux variables

Pour représenter deux variables, on utilise deux fois la représentation d'une variable en superposant les rectangles :



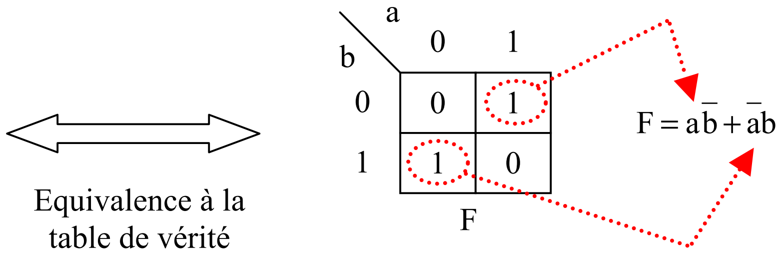
A chacune des surfaces élémentaires, on fait correspondre les 4 relations élémentaires pouvant exister dans le cas de deux variables :



La case est alors une des combinaisons de l'état des entrées. Dans cette case, on met alors la valeur que prend la fonction pour la combinaison d'entrée correspondante.

Exemple :

a	b	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



2.4 Représentation de trois variables

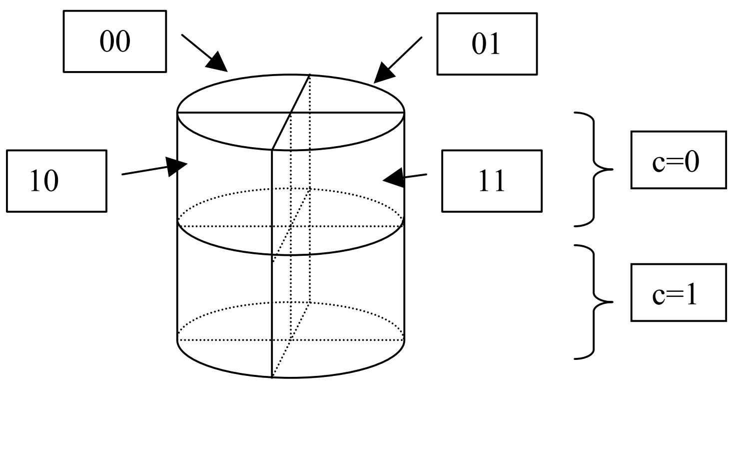
Pour trois variables binaires, il y a 2^3 combinaisons ; soit 8 cases :

c \ ab	00	01	11	10
0				
1				

Remarque**:**

Pour passer d'une colonne à une autre, il faut respecter la **règle d'adjacence**; deux colonnes voisines correspondent à deux codes adjacents : on doit changer la valeur que d'une seule variable à la fois. On obtient le codage de ab dans l'ordre : "00-01-11-10". Il s'agit du **"code de Gray"** (code cyclique qui interdit le changement simultané de deux ou plusieurs variables: c'est à dire que le passage d'un code à l'autre ne se fait que par le changement d'UNE seule variable).
On l'appelle aussi code à distance unité.

Le tableau est assimilable à un cylindre afin de respecter la cyclicité du code:



Exemple :

Soit la fonction de 3 variables a, b et c : $X = a.\overline{b}.\overline{c} + a.\overline{b}.c + \overline{a}.b.c + a.b.c$

La représentation décimale de cette fonction est : X = Σ (3, 4, 5, 7)

c \ ab	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

Numérotation des cases sous forme décimale

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	1	1	1

Représentation de la fonction X

2.5 Représentation de quatre variables

Pour quatre variables binaires a, b, c et d, il y a 2^4 combinaisons = 16 cases :

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

La case 13 est adjacente à 4 cases : 5, 9, 12 et 15.
Le passage de cette case à l'une des quatre adjacentes ne modifie l'état que d'une seule variable

Remarque:

Ces cases sont numérotées par l'équivalent décimal de la combinaison binaire correspondante. En fixant a poids fort, alors la combinaison abcd = 0101 vaut 5.

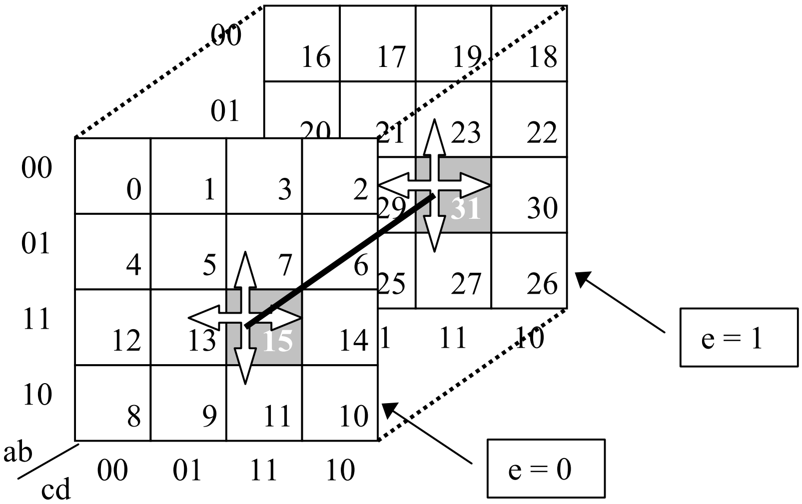
Exemple:

Soit la fonction F de quatre variables a, b, c et d (a poids fort) telle que
F = Σ (1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 12 , 14)
La représentation de F dans le tableau de Karnaugh donne:

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	1	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

2.6 Représentation de cinq variables

Pour cinq variables binaires a, b, c, d et e , il y a 2^5 combinaisons = 32 cases. On utilise une représentation spatiale (deux faces opposées d'un cube) :



Le tableau peut être représenté par deux tableaux de 4 variables. La cinquième variable change de valeur lorsqu'on passe d'un tableau à l'autre. Deux cases, occupant la même position dans les deux tableaux sont adjacentes

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

e = 0

ab \ cd	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

e = 1

On peut également utiliser un seul tableau en codant en **code Gray** des lignes et des colonnes afin de respecter l'adjacence des cases.

ab \ cde	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

3. Tableaux de KARNAUGH et simplification

- Représentation des monômes

Exemple 1 :

soit la fonction f (a,b,c,d) = Σ (2,3,5,10,13,14)

Alors $f = \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{c}d + abc\bar{d}$

La fonction f s'écrit comme une somme de produit logique de 4 variables. Chacun de ces produit logique s'appelle « monôme ». La fonction f comprend 5 monômes de 4 variables qu'on représente dans le tableau de KARNAUGH suivant :

ab \ cd	00	01	11	10
00	0_{0}	0_{1}	1_{3}	1_{2}
01	0_{4}	1_{5}	0_{7}	0_{6}
11	0_{12}	1_{13}	0_{15}	1_{14}
10	0_{8}	0_{9}	0_{11}	0_{10}

$\bar{a}\bar{b}cd$

$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$

$\bar{a}b\bar{c}d$

$abc\bar{d}$

$ab\bar{c}d$

- 1er simplification

Dans un tableau de KARNAUGH on peut regrouper deux cases adjacentes pour lesquelles la fonction étudiée vaut 1.

→ Dans un tableau de 4 variables, on obtient alors des monômes de 3 variables.

→ Dans un tableau de 3 variables, on obtient alors des monômes de 2 variables.

Application à l'exemple 1 :

ab \ cd	00	01	11	10
00	0_{0}	0_{1}	1_{3}	1_{2}
01	0_{4}	1_{5}	0_{7}	0_{6}
11	0_{12}	1_{13}	0_{15}	1_{14}
10	0_{8}	0_{9}	0_{11}	0_{10}

$\bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$
$= \bar{a}\bar{b}c$

$\bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{c}d$
$= b\bar{c}d$

$abc\bar{d}$

- $2^{\text{ème}}$ simplification

Dans un tableau de KARNAUGH on peut regrouper quatre cases adjacentes pour lesquelles la fonction étudiée vaut 1.

→ Dans un tableau de 4 variables, on obtient alors des monômes de 2 variables.

→ Dans un tableau de 3 variables, on obtient alors des monômes de 1 variable.

Exemple 2 : Soit la fonction f (a,b,c,d) = Σ (2,3,6,7,9,13)

Alors $f = \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}d + ab\bar{c}d$

ab \ cd	00	01	11	10
00	0 $_{0}$	0 $_{1}$	1 $_{3}$	1 $_{2}$
01	0 $_{4}$	0 $_{5}$	1 $_{7}$	1 $_{6}$
11	0 $_{12}$	1 $_{13}$	0 $_{15}$	0 $_{14}$
10	0 $_{8}$	1 $_{9}$	0 $_{11}$	0 $_{10}$

$\bar{a}c$

$a\bar{c}d$

- $3^{\text{ème}}$ simplification

Dans un tableau de KARNAUGH on peut regrouper huit cases adjacentes pour lesquelles la fonction étudiée vaut 1.

→ Dans un tableau de 4 variables, on obtient alors des monômes de 1 variable.

→ Dans un tableau de 3 variables, la fonction est alors égale à 1 !

- Règles de simplification

  - Lorsqu'on fait un regroupement de 2^k cases adjacentes dans le tableau de KARNAUGH d'une fonction f de n variables, on obtient un monôme de n-k variables.

  - Afin de simplifier au maximum une fonction logique, on cherchera à faire les regroupements les plus importants dans le tableau de KARNAUGH correspondant à la fonction.

4. Expression algébrique minimale

- Définition : Critère de minimalité (critère non unique mais classique)

  Une expression algébrique sera dite minimale si et seulement si elle minimise :

  - le nombre de termes de la somme
  - le nombre de variables de chaque terme

- Application

  Une expression algébrique minimale peut être obtenue à partir du tableau de KARNAUGH en déterminant le plus petit ensemble de groupements les plus grands possibles.

  Méthode :

  - Etape 1 : Trouver les groupements de 1 les plus grands possibles (ce sont les monômes premiers)
  - Etape 2 : Parmi ces monômes premiers, garder ceux qui couvrent au moins une case 1 et qu'ils sont les seuls à couvrir (ce sont les monômes premiers principaux)
  - Etape 3 : Si tous les 1 ne sont pas recouverts à l'étape 2, choisir un ensemble de monômes parmi les autres monômes premiers tels que tous les 1 soient couverts et que cet ensemble soit le plus petit possible.

5. Cas de fonctions incomplètement spécifiées

Le principe de la méthode précédente peut être appliqué aux fonctions incmplètement spécifiées.

On cherchera toujours à trouver les plus grands regroupements possibles en utilisant la couverture supérieure de la fonciton incomplètement spécifiée pour laquelle tous les indifférents sont supposés égaux à 1.