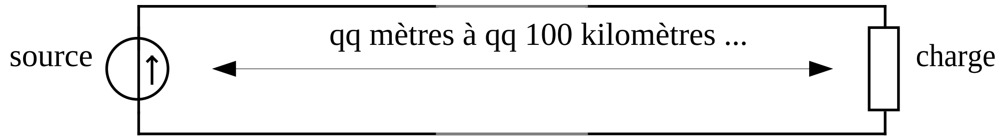
B31 - Modèle à constante répartie d'une ligne de transmission

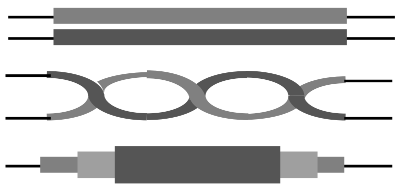
• *Propagation d'un signal électrique dans une ligne de transmission*



Une ligne de transmission par câble électrique comprend toujours deux voies. Si la ligne ne fonctionne pas en mode différentiel, la voie de retour est la masse.

Matériellement, la ligne est le plus souvent formée par :

- une paire de fils parallèles
- une paire de fils torsadés
- un câble coaxial



Le signal électrique se propage de la source vers la charge à une vitesse V *(ou célérité)* égale ou inférieure à la vitesse de la lumière c (c = 300.000 km/s). En pratique, on a toujours : $V < c$ (typiquement 200.000 km/s).

Rappels : relation longueur d'onde λ, célérité V, période T : $\lambda = V.T$

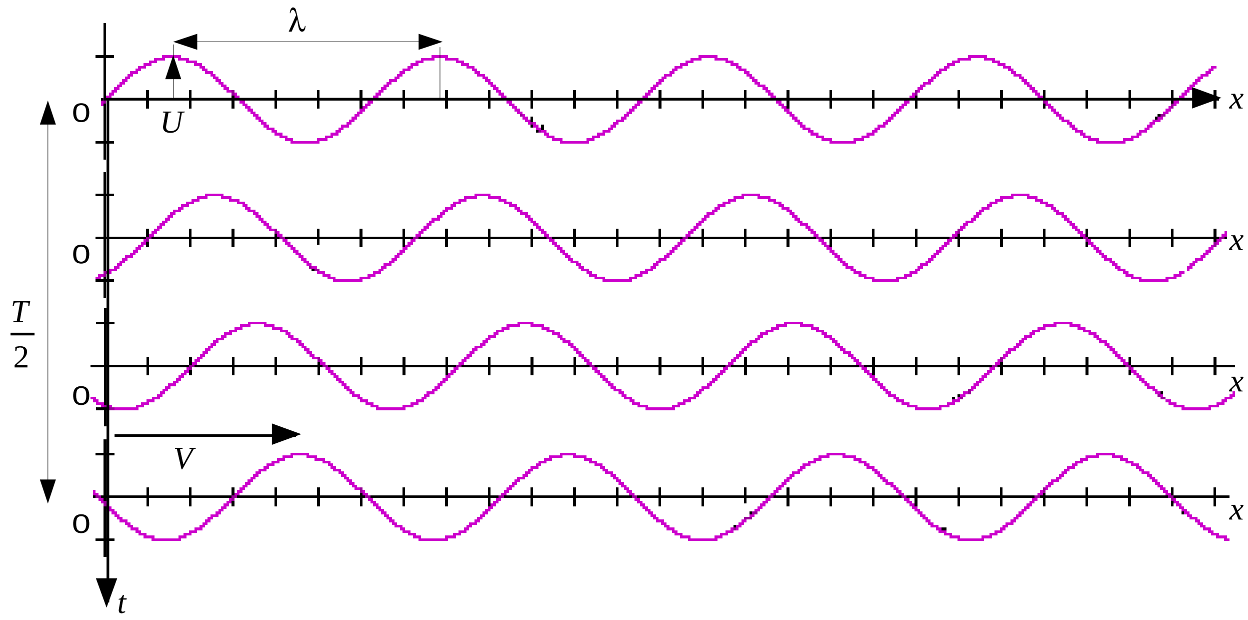
Equation d'une source de tension sinusoïdale : $u_0 = U \sin \omega t$

ou, en notation complexe : $\underline{u}_0 = U\, e^{j\omega t}$

Définition : on appelle *ligne non dispersive* une ligne où la vitesse V des signaux électriques est indépendante de leur fréquence.

- *Equation de propagation du signal dans une ligne :*

L'onde de tension ou de courant se déplace le long de la ligne à la vitesse V :



Equation horaire du signal en déplacement le long du câble : cette équation donne la tension en fonction du temps t et de la distance x à la source : $u = U \sin [\omega(t - \Delta t)]$

----

où : $\Delta t = \dfrac{x}{V} = T\dfrac{x}{\lambda} \Rightarrow$ $u = U \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$

ou, en notation complexe : $\underline{u} = U\, e^{\mathrm{j}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)} = U\, e^{\mathrm{j}(\omega t - \beta x)}$

en posant : $\beta = \dfrac{\omega}{V}$

• *Paramètres physiques de la ligne (appelés paramètres primaires)*

- *Résistance linéique :* $R' = \dfrac{R}{l}$ Ω/m

- En basse fréquence : $R = \rho\dfrac{l}{S} = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{l}{\sigma d^2}$

ρ	Ω/m	résistivité
σ	S/m	conductivité (= 1/ρ)
d	m	diamètre
S	m^2	section (= $\pi d^2/4$)
l	m	longueur

exemple : fil de cuivre ($\sigma = 58.10^6$ S/m), Ø 1 mm, longueur 1 km ⇒ R = 22 Ω

- En haute fréquence (> 100 kHz) : un effet electromagnétique repousse les lignes de courant vers la surface du conducteur *(effet de peau)* : la section utile (section réellement parcourue par le courant) diminue, donc la résistance augmente. On montre que (en unités SI) :

$$R = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\pi\sigma}}\,\frac{\sqrt{f}}{d}$$

μ_0	H/m	perméabilité du vide = $4\pi.10^{-7}$
μ_r		perméabilité relative du métal
f	Hz	fréquence

exemple : pour le même fil de cuivre que précédemment (μ_r = 1), on trouve $R'_{\Omega/\mathrm{km}} = 0{,}083\sqrt{f}$ à partir d'une fréquence f > 70 kHz.

NB : pour une ligne bifilaire ou pour un câble coaxial, les résistances des deux conducteurs s'ajoutent.

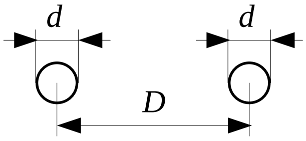
- *Conductance linéique :* $G' = \dfrac{G}{l}$ S/m

La conductance transversale par unité de longueur caractérise les pertes diélectriques le long de la ligne. Sur les circuits aériens en fils nus, elle dépend de la qualité des isolateurs et de l'humidité de l'air ambiant. Sur les circuits en câbles, elle dépend de l'angle de pertes des isolants. Elle est en général négligeable pour les diélectriques utilisés et pour des fréquences inférieures au GHz.

Définition : on appelle *ligne sans pertes* une ligne où R' et G' sont nulles (⇔ pas de pertes Joule).

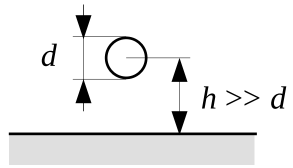
- *Inductance linéique :* $L' = \dfrac{L}{l}$ H/m

Ligne symétrique : $L' = \dfrac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \ln \dfrac{2D}{d}$



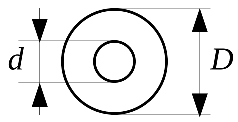
$L' = 0{,}92 \log_{10} \dfrac{2D}{d}$ µH/m

Ligne dissymétrique à plan de masse :



$L' = 0{,}46 \log_{10} \dfrac{4h}{d}$ µH/m

Ligne coaxiale : $L' = \dfrac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \dfrac{D}{d}$



$L' = 0{,}46 \log_{10} \dfrac{D}{d}$ µH/m

- *Capacité linéique :* $C' = \dfrac{C}{l}$ F/m

Ligne symétrique : $C' = \dfrac{12\,\varepsilon_r}{\log_{10} \dfrac{2D}{d}}$ pF/m

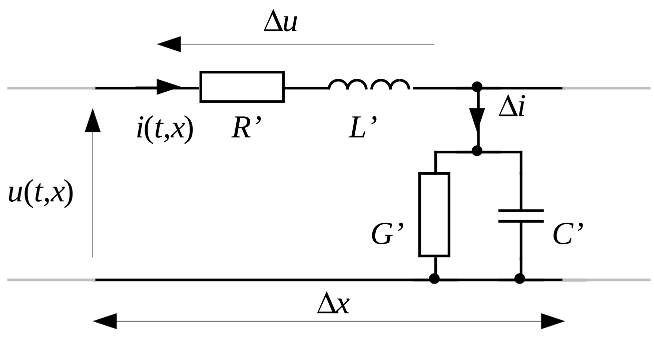
Ligne dissymétrique à plan de masse : $C' = \dfrac{24\,\varepsilon_r}{\log_{10} \dfrac{4h}{d}}$ pF/m

Ligne coaxiale : $C' = \dfrac{2\pi\,\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln \dfrac{D}{d}}$ $\qquad C' = \dfrac{24\,\varepsilon_r}{\log_{10} \dfrac{D}{d}}$ pF/m

- *Exemple : ligne téléphonique à paire torsadée :*
L' = 0,5 mH/km ; C' = 50 nF/km ; R' = 100 Ω/km ; G' = 0,01 S/km

• *Paramètres électriques de la ligne (appelés paramètres secondaires)*

- *Modèle équivalent de la ligne : ligne à constantes réparties*



Pour un élément de ligne de longueur Δx, on établit le système d'équations suivant :

$$(1)\begin{cases} \underline{\Delta u} = (\Delta R + \mathrm{j}\Delta L\omega)\underline{I} \Rightarrow \dfrac{\underline{\Delta u}}{\Delta x} = -\left(\dfrac{\Delta R}{\Delta x} + \mathrm{j}\dfrac{\Delta L}{\Delta x}\omega\right)\underline{i} = -(R' + \mathrm{j}L'\omega)\underline{i} \\ \underline{\Delta i} = (\Delta G + \mathrm{j}\Delta C\omega)(\underline{u} - \underline{\Delta u}) \approx (\Delta G + \mathrm{j}\Delta C\omega)\underline{u} \Rightarrow \dfrac{\underline{\Delta i}}{\Delta x} = -\left(\dfrac{\Delta G}{\Delta x} + \mathrm{j}\dfrac{\Delta C}{\Delta x}\omega\right)\underline{u} = -(G' + \mathrm{j}C'\omega)\underline{u} \end{cases}$$

NB : la tension et le courant diminuent quand la distance augmente (à cause des pertes Joule) : les variations relatives $\Delta\underline{u}/\Delta x$ et $\Delta\underline{i}/\Delta x$ sont donc négatives. Ceci explique la présence des signes – dans ces équations.

En passant aux différentielles et en dérivant la premère équation pour faire apparaître la quantité $\mathrm{d}\underline{i}/\mathrm{d}x$, on aboutit à l'*équation* dite *des télégraphistes :*

$$\frac{d^2\underline{u}}{dx^2} = (R' + \mathrm{j}L'\omega)(G' + \mathrm{j}C'\omega)\underline{u}$$

dont la solution est :

$$\underline{u}(t, x) = U\, e^{\mathrm{j}\omega t}\, e^{-\gamma x} + U\, e^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\, e^{+\gamma x} \qquad \text{en posant} \qquad \gamma^2 = (R' + \mathrm{j}L'\omega)(G' + \mathrm{j}C'\omega)$$

Le signal se décompose en deux termes. Le premier terme de l'équation $\underline{u}(t,x)$ correspond à l'onde aller ou *onde incidente*, le second terme à l'onde retour ou *onde réfléchie* :

onde incidente : $\underline{U}_i = \underline{U}\ \mathrm{e}^{-\gamma x}$

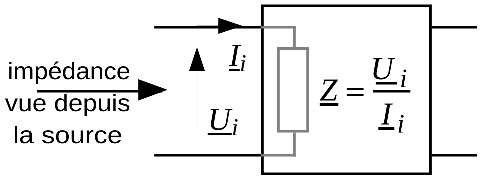
onde réfléchie : $\underline{U}_r = \underline{U}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{+\gamma x}$

NB : *il ne faut pas confondre le sens de circulation d'un courant et le sens de propagation d'une onde de courant* .

- *Impédance caractéristique :* $\underline{Z}_c = \sqrt{\dfrac{R' + \mathrm{j}L'\omega}{G' + \mathrm{j}C'\omega}}$

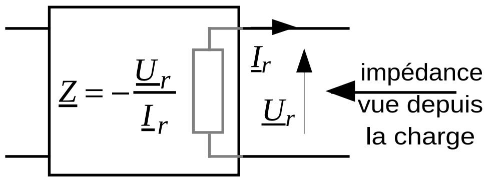
Rappel (cf § A12) : l'impédance caractéristique d'un quadripôle est l'impédance telle que, si l'on connecte à sa sortie une charge égale à $\underline{Z}_c$, son impédance d'entrée est aussi égale à $\underline{Z}_c$.

Calcul de $\underline{Z}_c$ à partir de l'onde incidente, qui est générée par la source...



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\underline{U}_i}{dx} = -(R' + \mathrm{j}L'\omega)\underline{I}_i \\ \underline{U}_i = \underline{U}\ e^{-\gamma x} \Rightarrow \dfrac{d\underline{U}_i}{dx} = -\gamma\underline{U}_i \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\underline{U}_i}{\underline{I}_i} = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R' + \mathrm{j}L'\omega}{G' + \mathrm{j}C'\omega}}$$

... ou à partir de l'onde réfléchie, qui est "générée" par la charge (même résultat) :



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\underline{U}_r}{dx} = -(R' + \mathrm{j}L'\omega)\underline{I}_r \\ \dfrac{d\underline{U}_r}{dx} = +\gamma\underline{U}_r \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r} = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R' + \mathrm{j}L'\omega}{G' + \mathrm{j}C'\omega}}$$

- *Exposant linéique de propagation* : $\gamma = \sqrt{(R' + \mathrm{j}L'\omega)(G' + \mathrm{j}C'\omega)}$

On pose : $\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta$:

α : coefficient d'affaiblissement linéique (m^{-1})

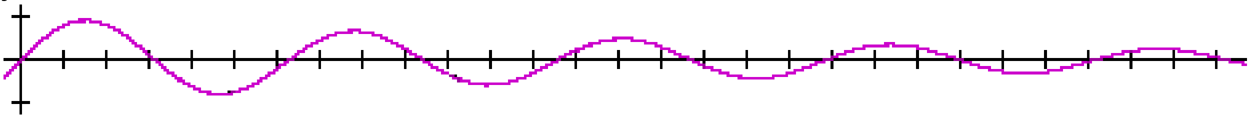
$\beta = \dfrac{\omega}{V}$: déphasage linéique (m^{-1})

La résolution de l'équation des télégraphistes introduit le facteur multiplicatif $\mathrm{e}^{\pm\gamma x} = \mathrm{e}^{\pm\alpha x}.\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\beta x}$.

L'onde incidente a pour équation : $u = Ue^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x)$. On en déduit qu'une ligne réelle présente deux types de défauts :

- *Atténuation :*

A cause des pertes par effet Joule, le signal subit une décroissance exponentielle le long de son trajet :



Le coefficient α, exprimé en m^{-1}, est *l'atténuation par unité de longueur.* On l'exprime aussi en dB/m. Le gain en dB entre la tension U en un point x quelconque et la tension U_0 à la source vaut :

$$G = 20\log\frac{U}{U_0} = 20\log e^{-\alpha x} = -\alpha x\ 20\log e$$

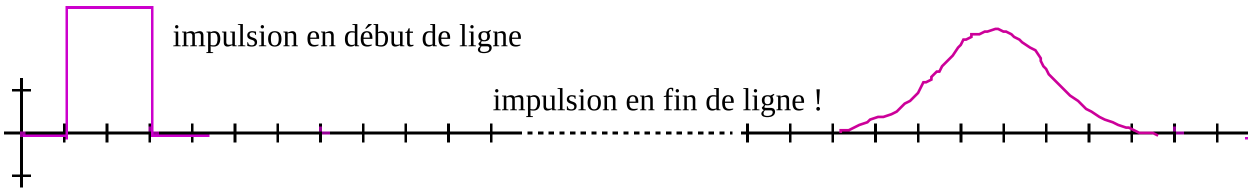
d'où une atténuation $\alpha = -\frac{G}{x}$ exprimée en dB/m : $\alpha_{dB/m} = \alpha_{m^{-1}}.20\log e$

ou en dB/km : $\alpha_{dB/km} = 1000.\alpha_{dB/m}$

Pour une distance fixée, l'atténuation augmente avec la fréquence. Par exemple, pour une paire de fils téléphoniques, les fréquences de l'ordre du Mhz sont 1000 fois plus atténuées que celles de 3 kHz $\Rightarrow$ les modems analogiques actuels utilisent des fréquences inférieures à 3 kHz.

- *Dispersion :*

On montre que, dans le cas général, la présence du facteur β équivaut à introduire une variation de la vitesse des signaux en fonction de leur fréquence $\Rightarrow$ un signal non sinusoïdal associant un ensemble d'harmoniques de différentes fréquences se déforme. Dans le cas d'un signal logique (signal rectangulaire), deux bits consécutifs peuvent finir par se chevaucher et devenir indiscernables .



NB : un troisième défaut, fréquent, concerne les lignes de transmission disposées au voisinage l'une de l'autre. C'est la *diaphonie :* une partie de l'énergie qui se propage sur une ligne est transmise à l'autre par couplage électromagnétique. C'est à cause de ce phénomène que l'on entend parfois deux conversations téléphoniques superposées...

- *Ligne sans pertes*

Elle se caractérise par : $R = 0$; $G = 0$. On en déduit que :

- L'impédance caractéristique est purement réelle : $R_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$
- le coefficient γ se réduit à : $\gamma = j\omega\sqrt{L'C'}$. Donc :
  - le coefficient α est nul : pas d'atténuation
  - le coefficient β vaut : $\beta = \omega\sqrt{L'C'}$.

  On en déduit que la vitesse vaut :

  $$V = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = c^{te}$$

  Une ligne sans pertes est non dispersive.

- *Ligne à faibles pertes*

Elle se caractérise par : R et G petits, ainsi que α. De γ on déduit les valeurs de α et β : :

$$\begin{cases} \gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta \\ \gamma^2 = (R' + jL'\omega)(G' + jC'\omega) = R'G' - L'C'\omega^2 + j(R'C'\omega + G'L'\omega) \end{cases}$$

En négligeant les infiniments petits du second ordre $R'G'$ et α^2, on trouve :

- dispersion : $\beta = \omega\sqrt{L'C'} \Rightarrow V = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{L'C'}} = c^{te}$: *une ligne à faibles pertes est non dispersive*

- atténuation : $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(R'\sqrt{\dfrac{C'}{L'}} + G'\sqrt{\dfrac{L'}{C'}} \right)$

En dérivant cette dernière expression par rapport à L' ou C' (le résultat est le même), on trouve une condition, appelée *condition de Heaviside*, qui minimise α :

R'C' = G'L'

Si cette condition est réalisée, l'impédance caractéristique est encore purement réelle : $R_c = \sqrt{\dfrac{L'}{C'}}$

Toutefois, on a vu plus haut que, pour un câble ordinaire, G' est presque nulle. Pour réaliser cette condition, il faut donc augmenter L' artificiellement par :

- la méthode de Pupin *(pupinisation) :* on ajoute une bobine en série à intervales réguliers sur la ligne
- la méthode de Krarup *(krarupisation) :* on entoure la ligne d'un ruban de permalloy (alliage 70% nickel et fer à μ élevé).

• ***Exemples***

Câble	Utilisation	Ref	gaine	Ø ext (mm)	diélec-trique	Ø (mm)	Zc (Ω)	affaiblissement dB/100m	C' pF/m
Coaxial	Ethernet	RG 58	PVC	4,95	PE	2,95	50	36 (400 MHz) 150 (3GHz)	101
Coaxial	Signaux	RG316	FEP	2,59	PTFE	1,52	50	65 (400 MHz) 230 (3GHz)	95
Coaxial	Signaux	RG 59	PVC	6,15	PE	3,71	75	25 (400 MHz) 97 (3GHz)	67
Coaxial	Signaux	RG 179	FEP	2,54	PTFE	1,6	75	52 (400 MHz) 144 (3GHz)	64
Paires torsadées blindé	Réseaux	FTP 5	PVC	6	PE	0,51	100	6,5 (10 MHz) 22 (100 MHz)	56
Paires torsadées non blindé	Réseaux	UTP 5	PVC	6	PVC	0,51	100	6,5 (10 MHz) 22 (100 MHz)	49

• ***Normes pour les systèmes de télécommunications courants***

norme	pays	type	connecteur	Zc (Ω)
T1	USA	paire torsadée	RJ-48	100
J1	Japon	paire torsadée	RJ-48	110
E1	reste du monde	paire torsadée	RJ-48	120
E1	reste du monde	coaxial	BNC	75

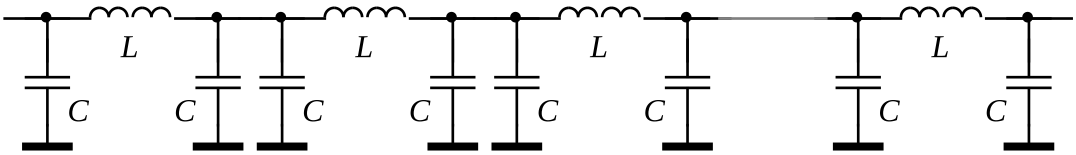
NB : qq valeurs de ε_r :

diélectriques :	ε_r
PVC	5
téflon (PTFE)	2
polyéthylène (PE)	2,5

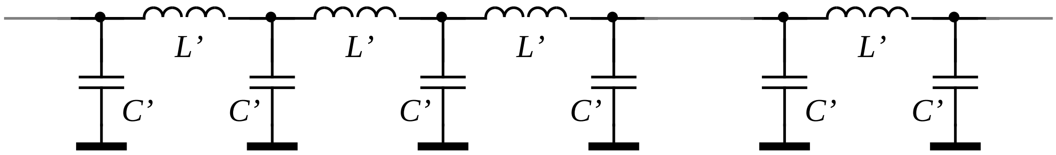
----

* * * * * * * * * * * * * * * * * COMPLEMENTS *

NB : on peut donner d'un élément de longueur Δx un schéma équivalent (en négligeant R et G) à celui d'une ligne à retard (cf §A23) :



Ou encore, avec $L' = L$; $C' = 2C$



Le calcul de $\underline{Z}_c$ (cf § A12) pour un quadripôle symétrique en Π à constantes localisées (L', C'), non résistif, conduit vers les basses fréquences à un résultat similaire à celui d'une ligne à constantes réparties :

$$\underline{Y}_c = \sqrt{\frac{C'}{L'}}\sqrt{1-\frac{1}{4}LC'\omega^2} \xrightarrow[\omega\to 0]{} \sqrt{\frac{C'}{L'}}$$

$$\Rightarrow R_c = \left(\underline{Z}_c\right)_{\omega\to 0} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$