Modulations Angulaires

1 - Définitions :

1-1 Principe des modulations angulaires

Soit la porteuse $p(t) = P_m \cos(w_0 t)$.

$\boxed{\Phi(t) \text{ phase instantanée de p(t)}}$

Deux solutions :

a) on rend f_i (fréquence instantanée) fonction linéaire du message m(t) : c'est la Modulation de Fréquence.

b) on rend Φ_i (phase instantanée) fonction linéaire du message m(t) : c'est la Modulation de Phase.

1-2 Modulation de fréquence

$$f_i(t) = f_0 + K_f m(t) \Rightarrow w_i = w_0 + 2p\, K_f m(t) = \frac{d\Phi_i}{dt}$$

Fréquence de la porteuse

Le signal modulé en fréquence s'écrit donc : $s(t) = S_m \cos\left[w_0 t + 2p\, K_f \int m(t)dt + j_0\right]$

Choix 0 à t=0

donc $\boxed{s(t) = S_m \cos\left(w_0 t + 2p\, K_f \int m(t)dt\right)}$

1-3 Modulation de phase

$$f_i(t) = w_0 t + K_p m(t)$$

Le signal modulé en phase s'écrit donc : $\boxed{s(t) = S_m \cos\left(w_0 t + K_p m(t)\right)}$

2 - Cas m(t) sinusoï dal :

2-1 Modulation de fréquence :

$m(t) = M \cos(\Omega t)$ avec $F = \dfrac{\Omega}{2p}$ terme basse fréquence ($F << f_0$)

$$s(t) = S_m \cos\left(w_0 t + \underline{\frac{2p\, K_f M}{\Omega}} \sin(\Omega t) + j_0\right)$$

m_f : indice de modulation

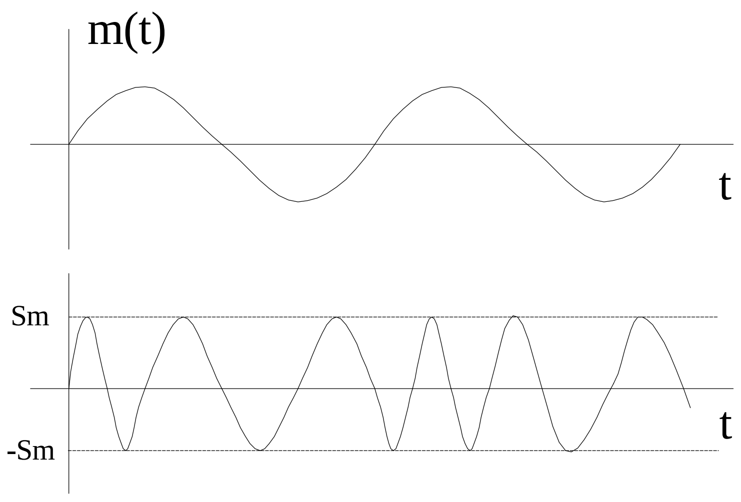
Choix = 0 à l'origine des temps

Donc : $\boxed{s(t) = S_m \cos\left(w_0 t + m_f \sin(\Omega t)\right)}$

Remarques :
Lorsque m(t) varie entre -M et +M, f_i varie entre f_0-K_fM et f_0+K_fM.

Si on nomme Δf=K_fM l'excursion en fréquence, $\boxed{m_f = \frac{\Delta f}{F}}$ (Lorsque F augmente (aigus) alors m_f diminue).

Allure des signaux



2-2 Modulation de phase :

$$m(t) = M\cos(\Omega t) \text{ avec } F = \frac{\Omega}{2p} \text{ terme basse fréquence } (F << f_0)$$

$$s(t) = S_m \cos\left(w_0 t + \underline{K_p M} \cos(\Omega t)\right)$$

m_p : indice de modulation

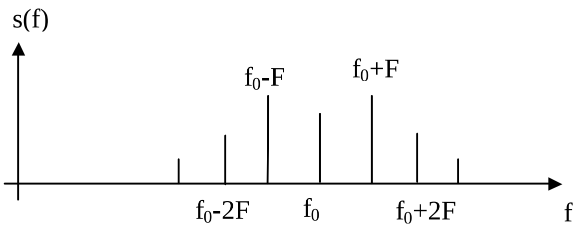
Remarques :
$m_p = \Delta\Phi$ est l'excursion de phase.

$s(t) = S_m \cos\left(w_0 t + m_p \cos(\Omega t)\right)$
Pour m(t) sinusoï dal, on obtient la même forme temporelle de s(t) que pour la modulation de fréquence. La seule différence étant : m_p indépendant de F, alors que m_f dépend de $\frac{1}{F}$.

3 - *Spectre des modulations :*

3-1 Spectre du signal modulé en fréquence. *(cas de m(t) sinusoï dal)*

Le spectre de s(t) est formé de raies de fréquences $f_0 + kF$ où $k \in Z$, de hauteur $S_m \times |j_k(m)|$ où j_k est la ***fonction de BESSEL*** de première espèce d'ordre k et m l'indice de modulation. En toute rigueur, le spectre présente une infinité de raies.



<u>Démonstration :</u>

$s(t) = S_m \cos\left(w_0 t + m_f \sin(\Omega t)\right)$

Développons en série la modulation en se souvenant que :

$\cos(y \sin a) = j_0(y) + 2 j_2(y) \cos 2a + 2 j_4(y) \cos 4a + \ldots$

et que

$\sin(y \sin a) = 2 j_1(y) \sin a + 2 j_3(y) \sin 3a + 2 j_5(y) \sin 5a + \ldots$

Dans lesquelles $j_0, j_1, j_2, \ldots$ ***sont des fonctions de BESSEL.***

donc :

$s(t) = S_m\left[\cos w_0 t \cos(m_f \sin \Omega t) - \sin w_0 t \sin(m_f \sin \Omega t)\right]$

$$\Rightarrow s(t) = S_m \cos w_0 t\left[j_0(m_f) + 2 j_2(m_f)\cos 2\Omega t + 2 j_4(m_f)\cos 4\Omega t + \ldots\right]$$
$$- S_m \sin w_0 t\left[2 j_1(m_f)\sin \Omega t + 2 j_3(m_f)\sin 3\Omega t + 2 j_5(m_f)\sin 5\Omega t + \ldots\right]$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} s(t) = S_m \times \{ & j_0(m_f)\cos w_0 t \\ & + j_1(m_f)\left[\cos(w_0 + \Omega)t - \cos(w_0 - \Omega)t\right] \\ & + j_2(m_f)\left[\cos(w_0 + 2\Omega)t + \cos(w_0 - 2\Omega)t\right] \\ & + j_3(m_f)\left[\cos(w_0 + 3\Omega)t - \cos(w_0 - 3\Omega)t\right] \\ & + \ldots \} \end{aligned}$$

En pratique 98% de l'énergie est concentrée dans les raies délimitées par la règle de ***CARSON*** :

Largeur du spectre : $\boxed{B = 2(m_f + 1)F}$

3-2 Spectre du signal modulé en phase. *(cas de m(t) sinusoï dal)*

Les résultats établis pour le spectre de la modulation de fréquence s'appliquent intégralement à la modulation de phase.

$$s(t) = S_m \cos\left(w_0 t + \underline{K_p M} \cos(\Omega t)\right)$$

m_p : indice de modulation

$$s(t) = S_m \cos\left(w_0 t + m_p \cos(\Omega t)\right)$$

L'excursion de phase $\Delta\Phi$ est généralement $\prec p$ pour qu'il n'y ait pas d'ambiguï té à la démodulation.

L'occupation spectrale est $\boxed{B = 2(m_p + 1)F}$