8

Les vibrations du Soleil

v 7

Oscillations

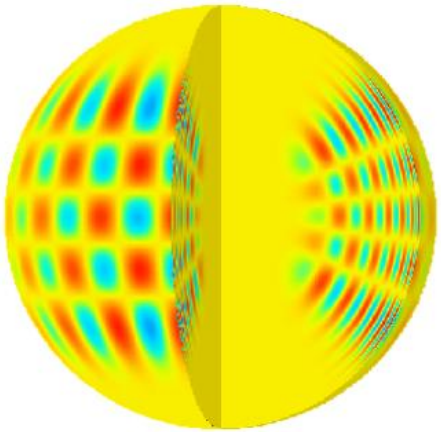
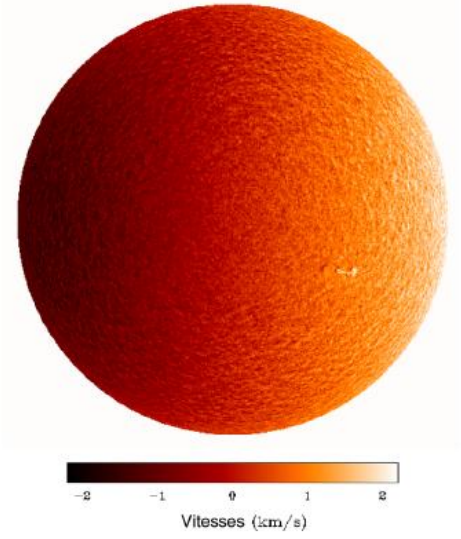


Image simulée numériquement, représentant la résonance d'une onde acoustique à l'intérieur du soleil.

Coupe montrant les ondes se propageant à la surface du soleil : En rouge les régions se déplaçant vers l'intérieur du soleil, en bleu celles s'éloignant de l'intérieur.



Carte des vitesses du gaz à la surface du soleil mesurées par l'expérience MDI à bord de SOHO. Les vitesses positives sont des vitesses d'éloignement. La variation importante visible de gauche à droite est liée à la rotation du soleil sur lui même. L'apparence "granuleuse" de l'image est une combinaison des mouvements de la surface liés aux oscillations et de la supergranulation.
La tache blanche en bas à droite est une région active.

Mouvement oscillatoire

exemples d'oscillations :

pendule de Galilée
corde d'une guitare,
air dans une flûte, dans un tuyau d'orgue
propagation du son dans la matière
vibrations des molécules -> chaleur
oscillations du champ électromagnétique (lumière...)
oscillations atomiques, nucléaires,...

Mouvement harmonique simple .1

prototype: petites oscillations d'un pendule

mouvement autour d'une position d'équilibre

caractérisé par:

l'amplitude des oscillations

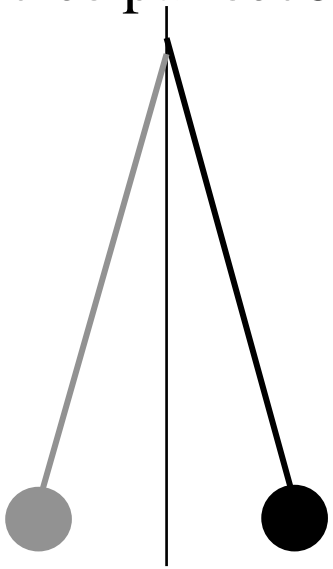
la période T, c. à d. le temps pour compléter un **cycle**

la fréquence ν (ou f) est le nombre de cycles par seconde,

donc $\nu = 1/T$

T en [s]

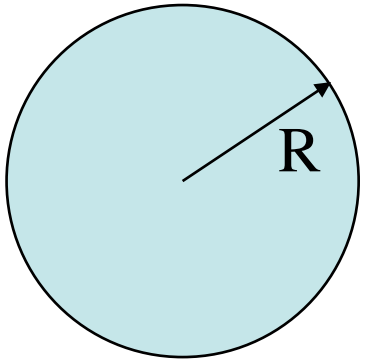
ν en [s^{-1}] ou Hertz (Hz)



Mouvement harmonique simple .2

On s'inspire du mouvement circulaire uniforme:

l'**amplitude** est donnée par le rayon R de la trajectoire
la **fréquence** = $\nu = 1/T = \omega/2\pi$

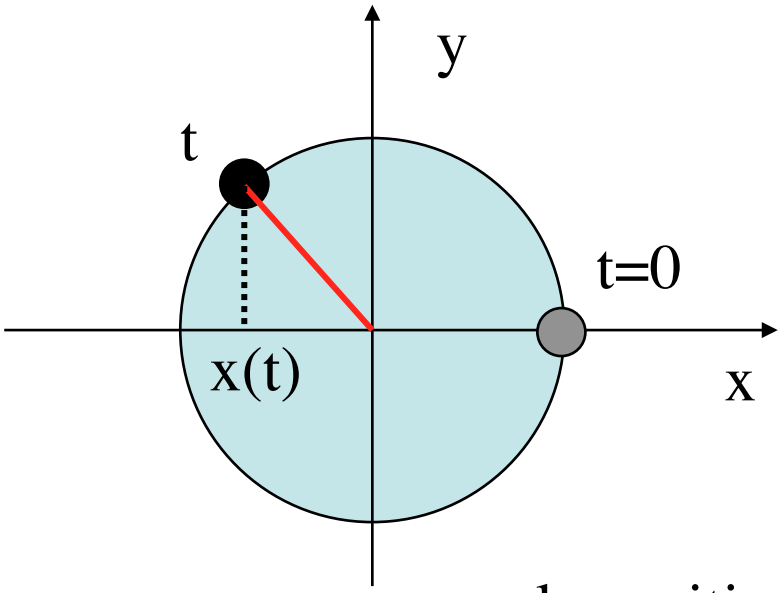


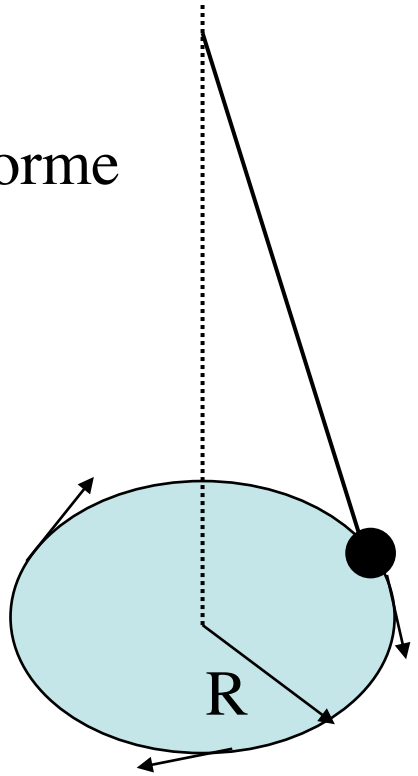
Rappel: circonférence ≡ 2π [rad]

v = (longueur linéaire circonférence)/T = $2\pi R/T$
ω = (longueur angulaire circonférence)/T = $2\pi/T$

Mouvement harmonique simple .3

Il est possible d'imposer au pendule
un mouvement (presque) circulaire et uniforme

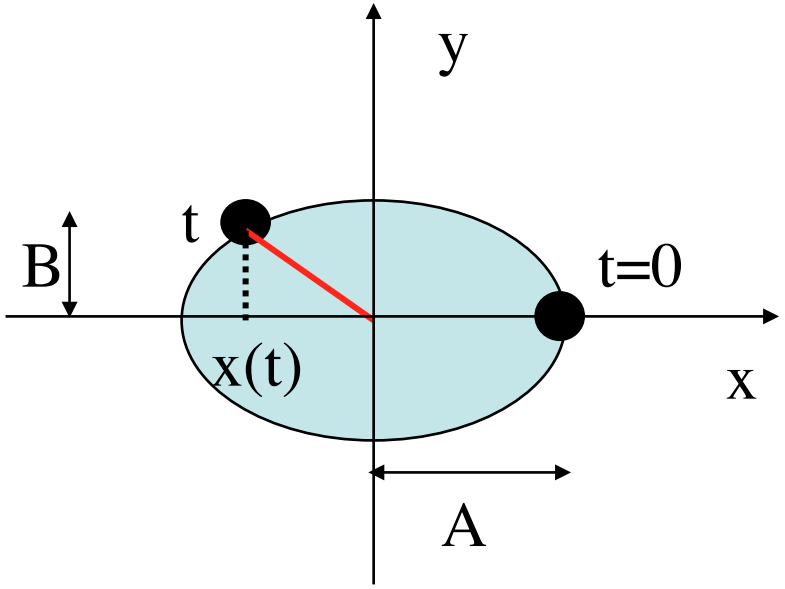


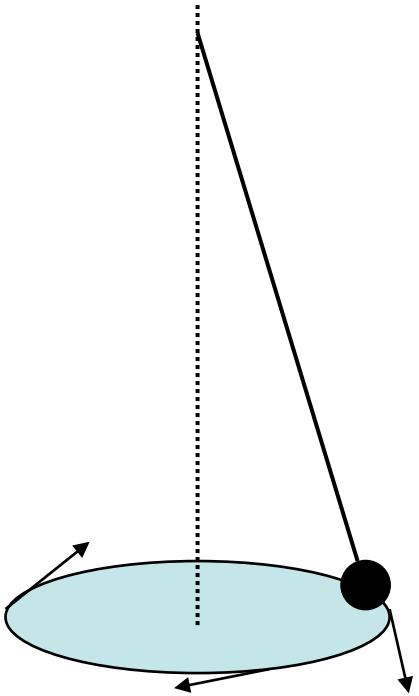


la position au temps t est $\begin{cases} x = R\cos(\omega t) \\ y = R\sin(\omega t) \end{cases}$

Mouvement harmonique simple .4

Il est possible d'imposer au pendule
un mouvement elliptique





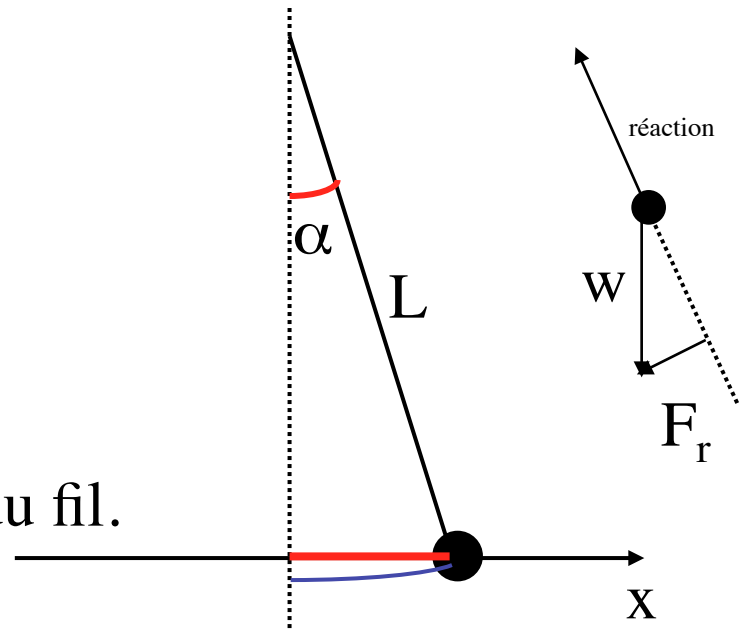
la position au temps t est : $x = A\cos(\omega t)$
$y = B\sin(\omega t)$

Pour B=0 le mouvement est linéaire, circulaire quand A=B

Mouvement harmonique simple .5

Exemple d'étude mathématique:

Cas de petites oscillations :
le abscisse est approximée par
l'arc de circonférence balayé par
le pendule : $x(t) \approx L\,\alpha(t)$



Forces : le poids w = mg et la tension du fil.

La force "de rappel" F_r ramène le pendule
vers le centre, elle est donc négative par rapport à x et α:

$$F_r = - w \sin\alpha \approx - w\,\alpha$$

De plus F_r est presque // à l'axe x:

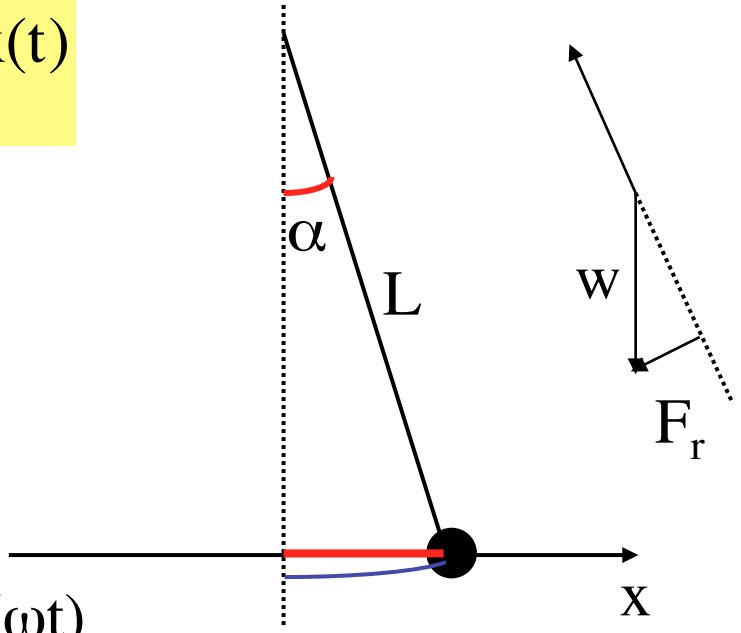
$$F_r(t) \cong ma_x(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \cong -w\alpha(t) \cong -mg\frac{1}{L}x(t)$$

Mouvement harmonique simple .6

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -w\alpha(t) \cong -mg\frac{1}{L}x(t)$$

*) $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \cong -\frac{g}{L}x(t)$$

"équation différentielle"



à résoudre par tentative: $x(t) = A\sin(\omega t)$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t)$$ remplacer dans *): $$-A\omega^2\sin(\omega t) = -\frac{g}{L}A\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = 2\pi\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Mouvement harmonique simple .7

L'équation $\frac{d^2x(t)}{dt^2} \cong -\frac{g}{L}x(t)$ est un exemple d'une classe de mouvements que l'on définit "harmoniques".
De façon plus générale, un mouvement dont l'accélération

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -C\,x(t) \qquad \text{avec } C > 0$$

est décrit par une solution du type $x(t) = A\cos(\omega t+\phi)$

où:

A est l'amplitude du mouvement

$\omega = \sqrt{C} = 2\pi\nu \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{C}$

ϕ est déterminé par la position au temps t = 0 :

$x(0) = A\cos(\phi) \quad \Rightarrow \quad \phi = \text{acos}[\, x(0)/A \,]$

Mouvement harmonique simple .8

Si la position ou "déplacement" par rapport

à la position d'équilibre est $x(t) = A \cos(\omega t)$

avec $\omega = 2\pi\nu$

par dérivation on tire :

vitesse $v(t) = -A\omega \sin(\omega t)$

accélération $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$

On a aussi:

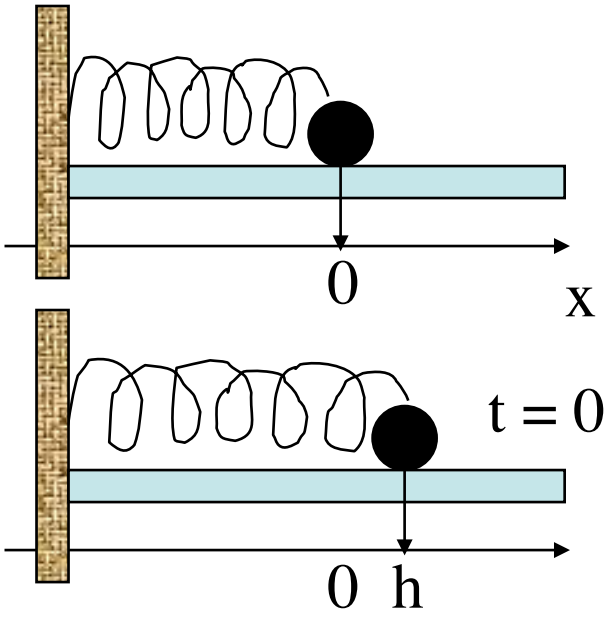
$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

Mouvement harmonique Exemple 1

Ressort de constante k avec une masse m
libre d'osciller en avant et en arrière, sans frottement.
La position de m est repérée sur l'axe x.

Au repos x = 0

On déplace le corps de h (p. ex. de
1 mm vers la droite) et on relâche

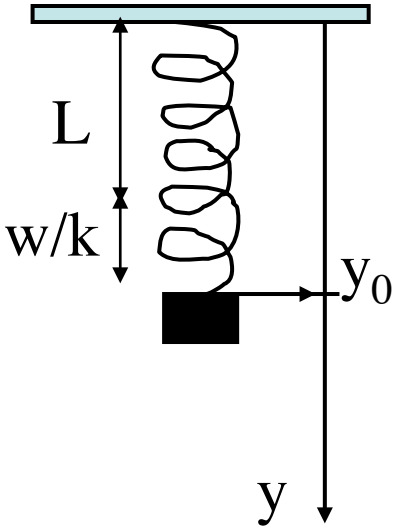


Forces en jeu: $F_{ressort} = - kx$

Newton: $ma(t) = -kx(t)$ $a(t)= -(k/m)x(t)$, donc:

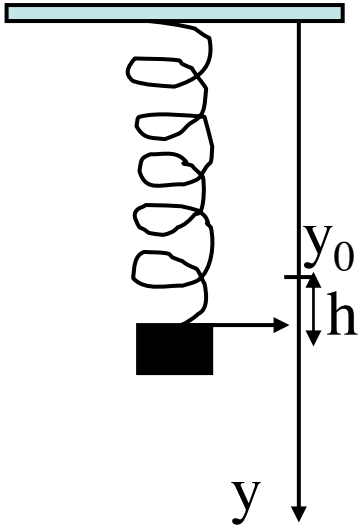
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et l'équation du mouvement $x(t)= h\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

Mouvement harmonique Exemple 2



Un poids w suspendu à un ressort de constante k et longueur L. Sa position est repérée sur l'axe y. Pour équilibrer le poids, la longueur y_0 à l'équilibre est telle que $w = (y_0-L)k$ donc $y_0 = L + w/k$

On déplace le corps de h (p. ex. de 1 mm vers le bas) et on relâche. L'oscillation se fait autour de la position d'équilibre y_0: $y(t) = y_0 + A\cos(\omega t + \phi)$
ou $y(t) - y_0 \equiv \delta y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$



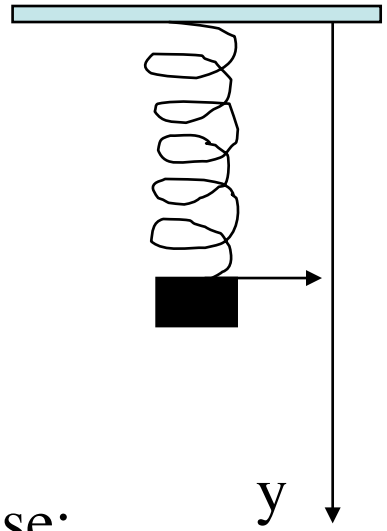
Forces en jeu:

$F_{tot} = w + F_{ressort} = w - k(y-L) = w - k\,(y_0-L) - k(y-y_0) =$
$= 0 - k(y-y_0) = -k\,\delta y$

Newton: $ma(t) = -k\delta y(t)$ $a(t)= -(k/m)\delta y(t)$

Mouvement harmonique Exemple 2.1

De: $a(t) = -(k/m)\delta y(t)$ on tire: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



$\delta y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

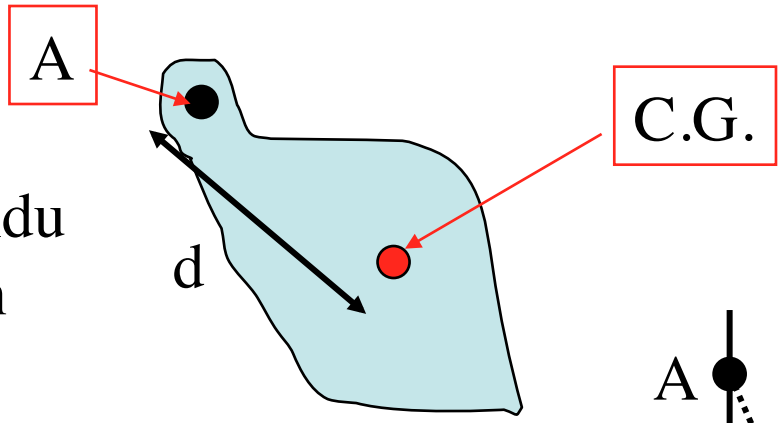
à $t = 0$ on a le déplacement maximal:

$\delta y(0) = h = A\cos(0 + \phi)$

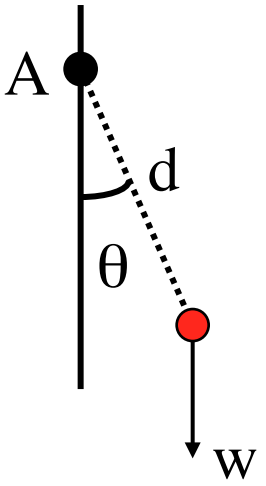
pour que cela représente le maximum, on impose:
$A = h, \quad \phi = 0$

La position au temps t est donc $y(t) = y_0 + h\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

Mouvement harmonique Exemple 3



Le pendule composé:
un objet quelconque, suspendu
et libre d'osciller autour d'un
axe A.
m est la masse de l'objet et
I est son moment d'inertie par rapport à A.



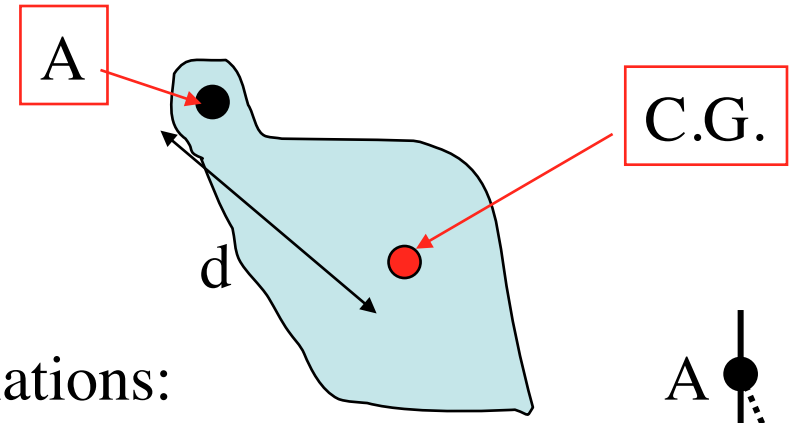
C.G. est le centre de gravité, à distance d de l'axe A.
Le moment des forces vaut $\tau = wd\sin\theta = -mgd\sin\theta$

Avec le signe moins, on indique que, pour θ positif, le moment a tendance à provoquer un mouvement horaire, antihoraire pour $\theta < 0$.

Newton: $\tau = I\alpha$: $\quad -mgd\sin\theta = I\alpha = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

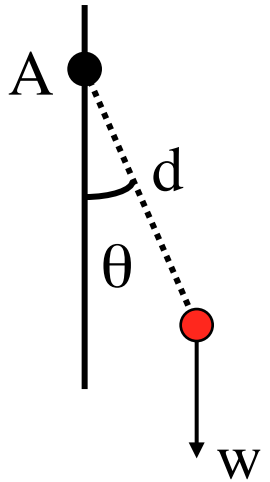
Mouvement harmonique Exemple 3.1

$$-mgd\sin\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



On considère des petites oscillations:
$\theta << 1$ rad, $\sin\theta \approx \theta$ et l'on obtient

$$-mgd\,\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

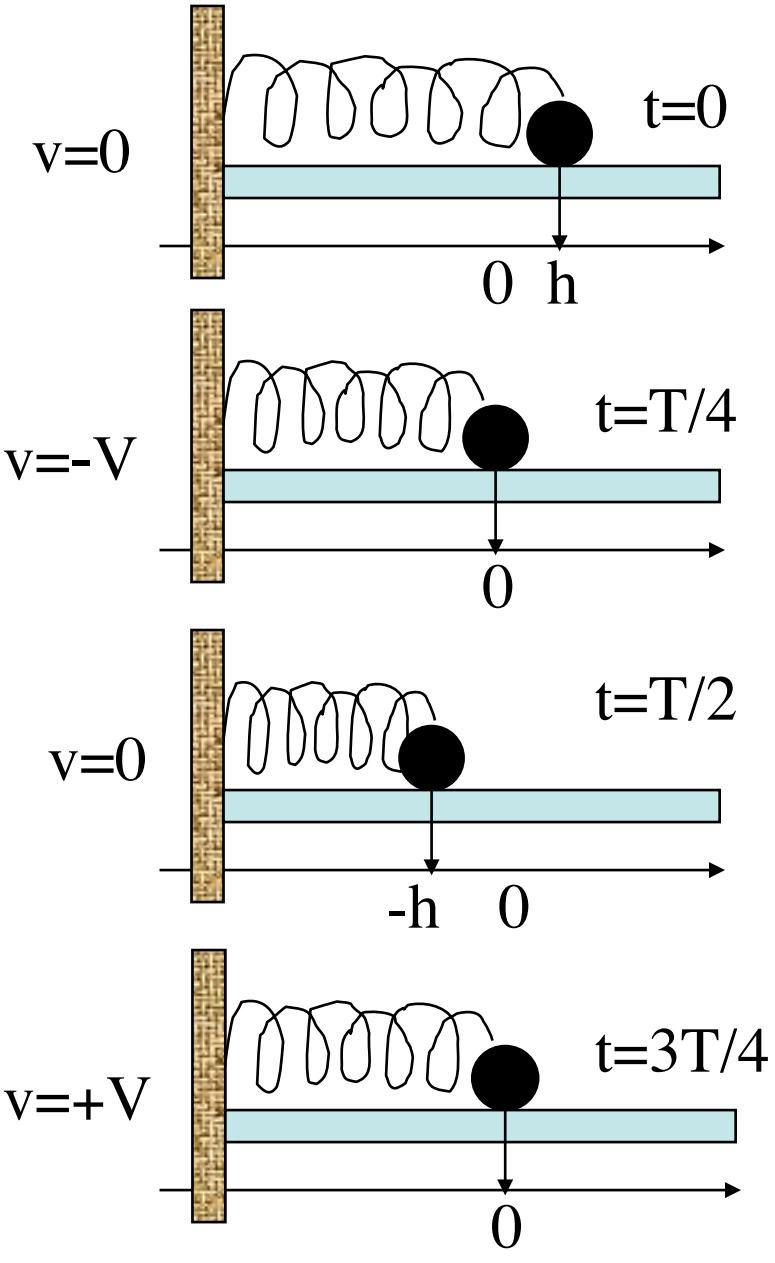


$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta \qquad \text{d'où } \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Dans le cas d'un pendule simple
$I = md^2$ et on retrouve:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{md^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{d}}$$

Energie d'un mouvement harmonique



L'énergie élastique stockée dans le ressort se transforme en énergie cinétique et réciproquement.
L'E totale mécanique est conservée.
L'E cinétique est 0 aux bords et maximale en x= 0.

Le travail pour allonger le ressort de x=0 jusqu'en x=h vaut:

$$W = \int_0^h F dx = \int_0^h kx dx = \frac{x^2}{2} k \Big|_0^h = \frac{1}{2} kh^2$$

Donc l'énergie cinétique en x=0 vaut aussi $K=kh^2/2$. De cela on peut tirer la vitesse max V...

Energie d'un mouvement harmonique .2

En conclusion, l'énergie du système est $E = kh^2/2$

Cela est valable à tout moment, à cause de la conservation de l'énergie:

E = E(potentielle élastique) + E(cinétique) $\equiv E_{él} + K = kh^2/2$

Quand le ressort se trouve en x (x= 0 est la position de repos) on a

$E_{él} = kx^2/2$ $\quad K = mv^2/2$

$\Rightarrow E = kh^2/2 = kx^2/2 + mv^2/2$

On peut tirer v en fonction de x:

$mv^2 = kh^2 - kx^2 = k(h^2 - x^2)$

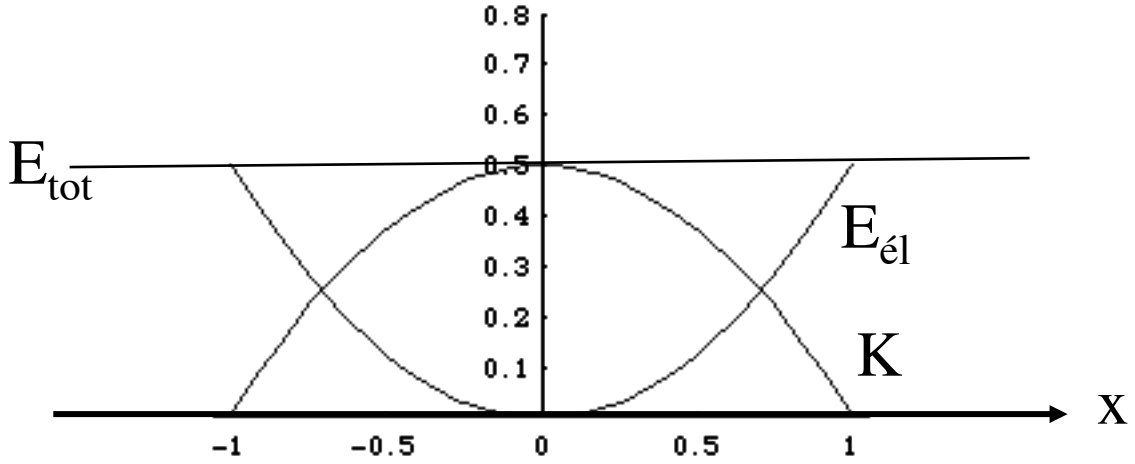
$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(h^2 - x^2\right)}$$

N.B.: dans la situation de la figure précédente,
le signe de v est positif pour $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$ négatif pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$

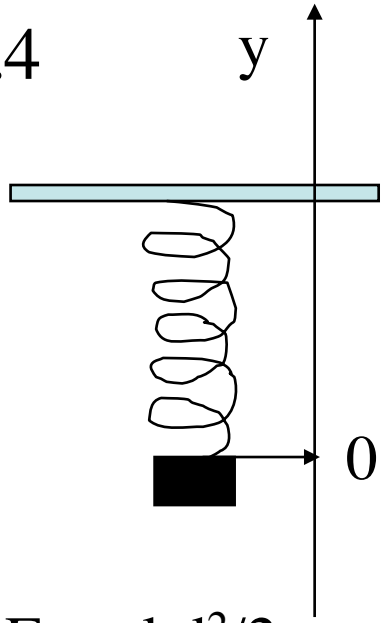
Energie d'un mouvement harmonique .3

$$E = kh^2/2 = kx^2/2 + mv^2/2 = E_{él}(x) + K(x)$$

Dans cet exemple, on montre $E_{él}(x)$ et $K(x)$ dans le cas $k = 1$ et $h = 1$. L'énergie totale vaut $E_{tot} = 1/2$ (unités arbitraires)



Energie d'un mouvement harmonique .4



Cas du ressort suspendu: $E = E_{él} + K + U_{grav}$

A l'équilibre, le ressort est distendu d'une longueur d, t.q.: $mg = d\,k$ $\quad mg - d\,k = 0$

On définit $y = 0$ la position d'équilibre.

Donc en $y = 0$ l'énergie potentielle du ressort vaut $E_{él} = kd^2/2$.

On soulève en $y = h$ le corps $\Rightarrow$ $E(h) = k(d-h)^2/2 + mgh$

$E(h) = kd^2/2 - kdh + kh^2/2 + mgh = kd^2/2 + kh^2/2 + (mg - kd)h$

$= kd^2/2 + kh^2/2$

On laisse tomber. Si ζ est la position la plus basse (où $v = 0$)

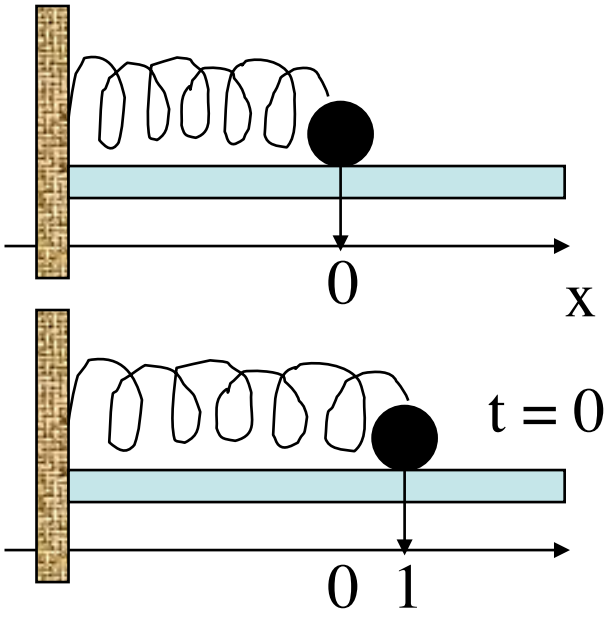
$E(\zeta) = k(d - \zeta)^2/2 + mg\,\zeta = \ldots = kd^2/2 + k\,\zeta^2/2$

Par conservation de l'énergie $E(h) = E(\zeta)$ on obtient

$kh^2/2 = k\,\zeta^2/2$ on en déduit que $\zeta = -h$

Mouvement oscillatoire amorti

Considérons un cas plus réaliste avec des forces de frottement.
P. ex. un pendule avec frottement, avec la force de frottement proportionnelle à la vitesse $F_f = -\gamma v$.
Alors:



Forces en jeu: $F_{ressort} = - kx$

$F_f = -\gamma v = -\gamma(dx/dt)$

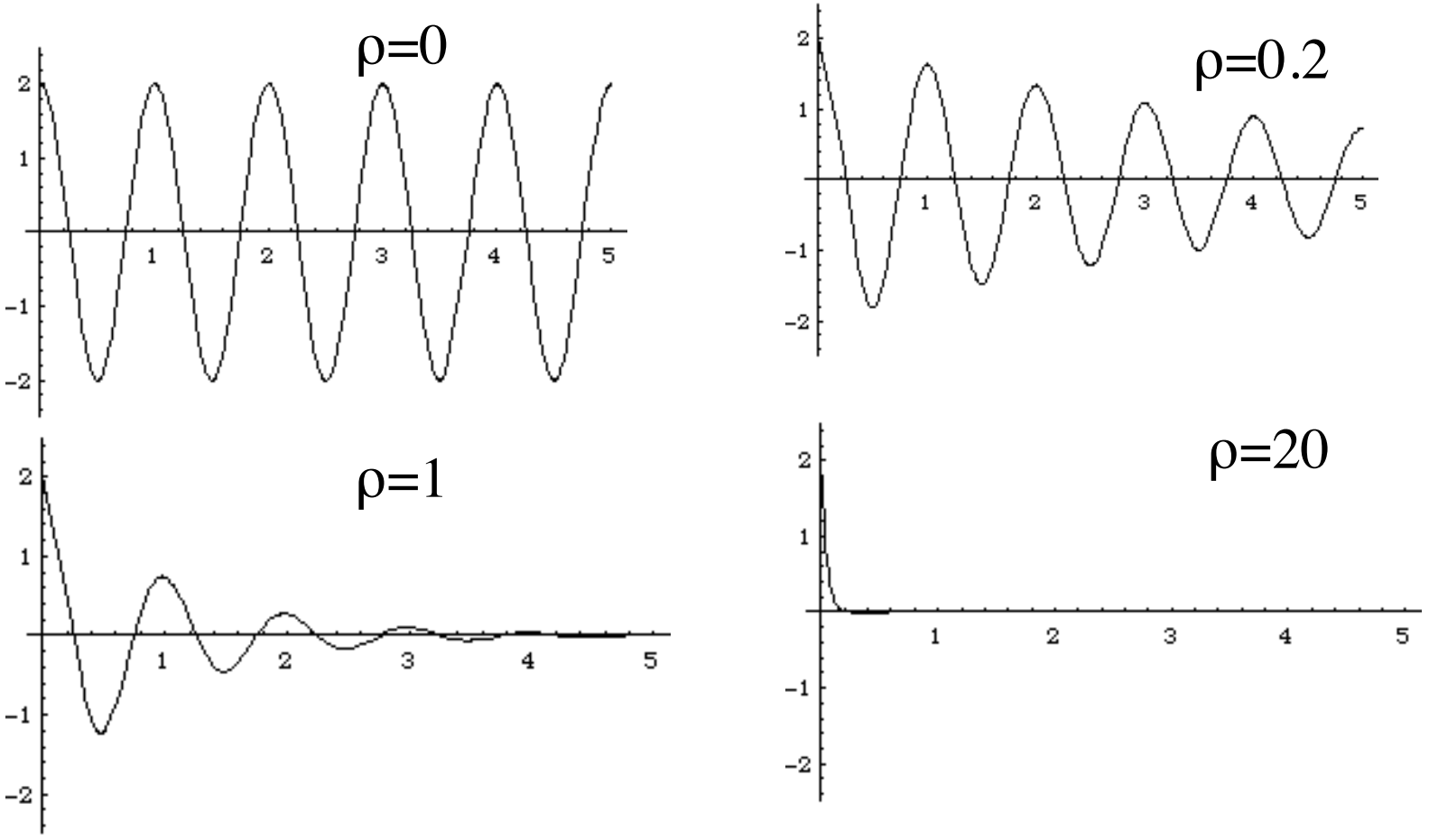
$$ma = F = -kx - \gamma v$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

La solution est:

$$x(t) = he^{-\rho t}\cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}} \qquad \rho = \frac{\gamma}{2m}$$

Mouvement oscillatoire amorti .2

$x(t) = he^{-\rho t}\cos(\omega t)$ avec $h=2$, $\omega=2\pi$