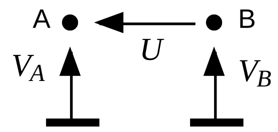
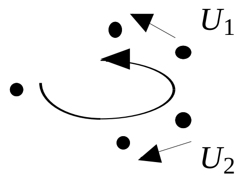
A12. Théorèmes généraux sur les circuits

Courant Continu – CC *(Direct Current – DC)*

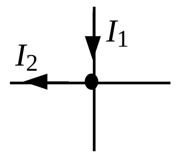
• ***Différence de potentiel (ddp)*** $U = V_A - V_B$



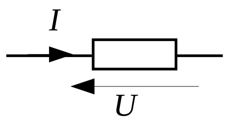
Loi des mailles $\sum U = 0 \Leftrightarrow + U_1 - U_2 \ldots = 0$



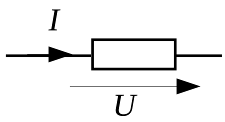
Loi des nœuds $\sum I = 0 \Leftrightarrow + I_1 - I_2 \ldots = 0$



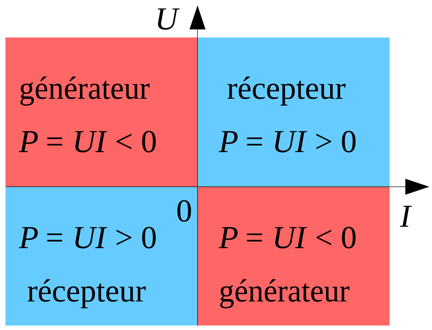
• ***Dipôle récepteur :***



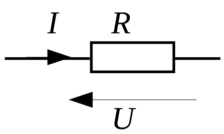
dipôle générateur :



Dipôle ou source réversible (en convention récepteur)



• ***Loi d'Ohm*** (en convention récepteur) $U = R.I$



⚠ : en convention générateur (U et I de même sens), la loi devient : $U = -R\,I$

Résistances en série

$$R = R_1 + R_2$$

$$R = \sum R_i$$

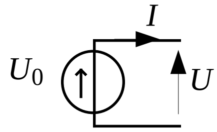
Résistances en parallèle

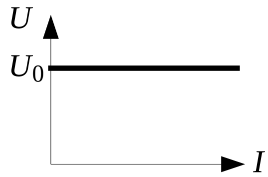
$$G = G_1 + G_2 \Leftrightarrow R = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{(avec } G = 1/R\text{)}$$

$$G = \sum G_i \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$$

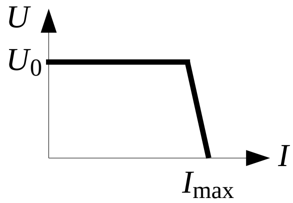
• *Sources de tension*

Source idéale : $\forall\ I : U = U_0$



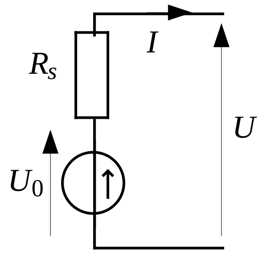


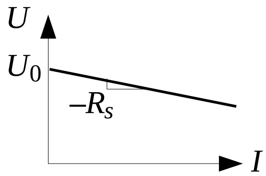
Source de tension avec limitation de courant



Source réelle (modèle de Thévenin) :

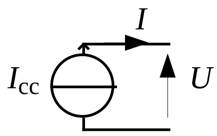
$$U = -R_s.I + U_0$$

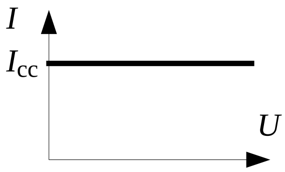




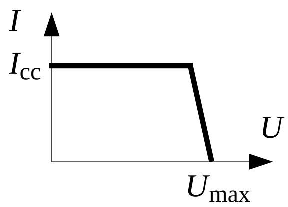
• *Sources de courant*

Source idéale : $\forall\ U : I = I_{cc}$



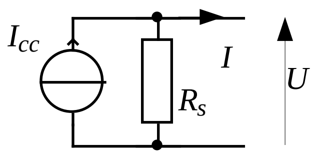


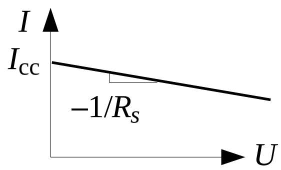
Sources de courant avec limitation de tension



Source réelle (modèle de Norton) :

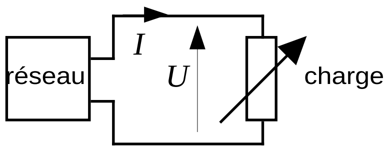
$$I = -\frac{U}{R_s} + I_{cc}$$



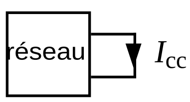


• *Équivalence Thévenin / Norton :* $U_0 = R_s.I_{cc}$

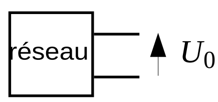
réseau en fonctionnement normal :



sortie en court-circuit :



sortie à vide :



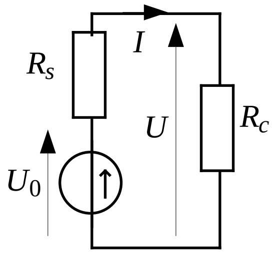
Calcul de R_s : c'est la résistance équivalente au réseau vu entre ses points de sorties lorsque ses sources autonomes de tension et de courant sont passivées.

Sources passivées : une source de tension est remplacée par un court-circuit ; une source de courant est remplacée par un circuit ouvert.

Source autonome : source non commandée.

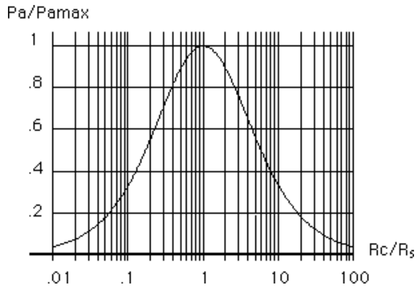
• *Adaptation d'impédance*

Quand la puissance délivrée par le générateur de Thévenin à sa charge est maximale, on dit que cette charge est "adaptée" au générateur . Soit P_a cette puissance :



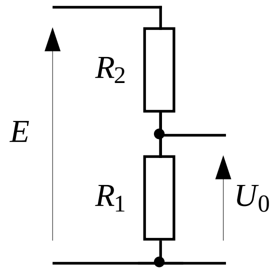
charge quelconque : $P_a = U_0^2 \dfrac{R_c}{\left(R_s + R_c\right)^2}$

charge adaptée : $\begin{cases} R_c = R_s \\ P_{a\,\max} = \dfrac{U_0^2}{4R_s} \end{cases}$



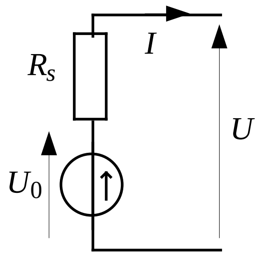
• *Diviseur de tension* (et son modèle équivalent de Thévenin) :

à vide : $U_0 = k.E$ avec $k = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$



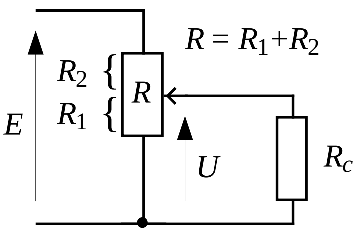
en charge (modèle de Thévenin) :

$$U_0 = kE$$
$$R_s = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2} = k(1-k)R$$
(avec $R = R_1 + R_2$)

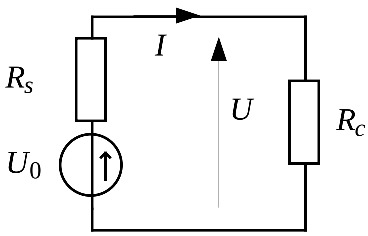


Application : étude d'un potentiomètre R (ou d'un capteur résistif) chargé par une résistance R_c

Lorsque le potentiomètre n'est pas chargé (R_c ∞), celui-ci délivre une tension U_0 = kE proportionnelle à la position de son curseur. Problème : quelle erreur commet-on en mesurant la tension de sortie U du potentiomètre lorsque celui-ci est en charge au lieu d'être à vide ? Pour répondre à cette question, on remplace le potentiomètre par son modèle équivalent de Thévenin :



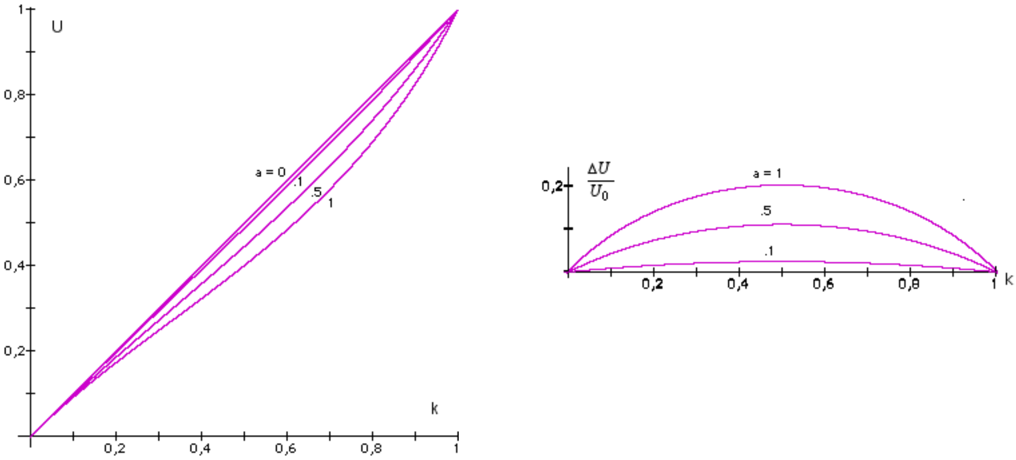
⇔ modèle de Thévenin :



On calcule : $U = U_0 - R_s I = U_0 - R_s \dfrac{U_0}{R_s + R_c}$. D'où l'on tire l'erreur absolue $\Delta U = U_0 - U$ et l'erreur relative $\Delta U/U_0$.

Pour cela, on pose : $a = \dfrac{R}{R_c}$ rapport entre la résistance totale du potentiomètre et sa charge.

On trouve : $U = \dfrac{kE}{1 + k(1-k)a}$ et $\dfrac{\Delta U}{U_0} = 1 - \dfrac{1}{1 + k(1-k)a}$:



Évolution de U et de $\dfrac{\Delta U}{U_0}$ en fonction de la position du curseur, donc de k, pour différentes valeurs de a (avec E = 1 V)

En calculant la dérivée de l'erreur par rapport à k, on trouve que $\dfrac{d\left(\dfrac{\Delta U}{U_0}\right)}{dk} = \dfrac{(1-2k)a}{\left[1 + k(1-k)a\right]^2} = 0$ pour $k = \dfrac{1}{2}$. *L'erreur relative est donc maximale lorsque le curseur est en milieu de course* (k = 0,5).

En ce point, elle vaut : $\left(\dfrac{\Delta U}{U_0}\right)_{\max} = \dfrac{0,25\,a}{1 + 0,25\,a}$.

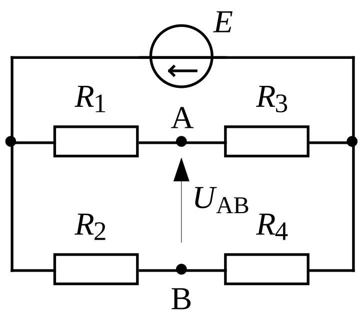
Par exemple, si la charge du potentiomètre vaut dix fois sa valeur, soit R_c = 10 R, donc a = 0,1, on commet une erreur relative maximale ≈ 2,5 %. Inversement, si l'on veut que l'erreur ne dépasse pas 1% quelle que soit la position du curseur, il ne faut pas que l'impédance de charge Rc soit inférieure à une valeur minimale de l'ordre de 25 fois R : $\Delta U/U_0 < 1\% \Leftrightarrow R_c > 25\,R$.

• ***Pont de Wheatstone*** (et son modèle équivalent de Thévenin) :

$$U_0 = (U_{\mathrm{AB}})_{\text{à vide}} = E\,\frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

$$R_s = R_{\mathrm{AB}} = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4}$$

$$U_0 = 0 \quad \text{(pont équilibré) pour} \quad R_2R_3 = R_1R_4$$



• ***Théorème de superposition***

L'intensité du courant dans une branche appartenant à un circuit maillé est égale à la somme algébrique des intensités que ferait passer séparément chaque source autonome seule en circuit, les autres sources autonomes étant passivées.

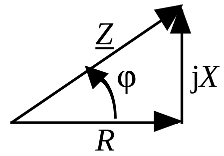
Courant Alternatif – CA *(Alternative Current – AC)*

• ***Loi d'Ohm en alternatif***

$$\underline{U} = \underline{Z}.\underline{I} \Leftrightarrow \begin{cases} U = |\underline{Z}|.I \\ \text{Arg}(\underline{U}) = \text{Arg}(\underline{Z}) + \text{Arg}(\underline{I}) \end{cases}$$

Impédance (soit φ = Arg($\underline{Z}$))

$$\underline{Z} = R + jX \qquad \begin{cases} |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{X}{R} \\ R = |\underline{Z}|.\cos\varphi \\ X = |\underline{Z}|.\sin\varphi \end{cases}$$



$\varphi > 0$: dipôle inductif
$\varphi < 0$: dipôle capacitif

R : résistance ; X : réactance

Admittance

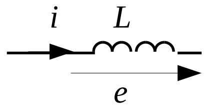
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jS$$

G : conductance ; S : susceptance

• ***Inductance***

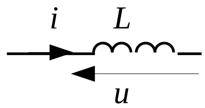
convention générateur
(avec circuit magnétique non saturé)

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$



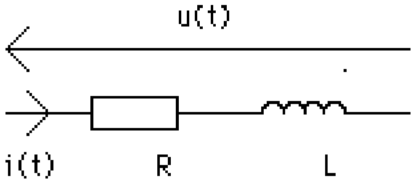
convention récepteur

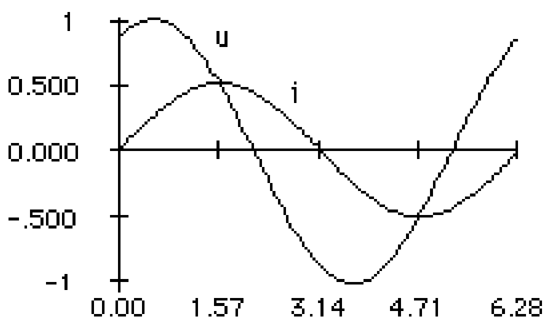
$$u = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \underline{Z} = jL\omega$$

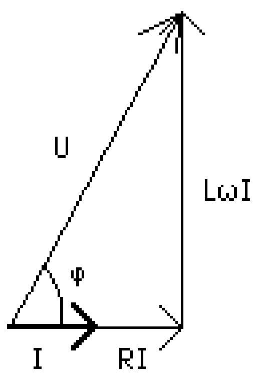


Dipôle inductif série

$$\underline{Z} = R + jL\omega \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \\ \text{Arg}(\underline{Z}) = \arctan\dfrac{L\omega}{R} \quad (\Leftrightarrow \varphi > 0) \end{cases}$$

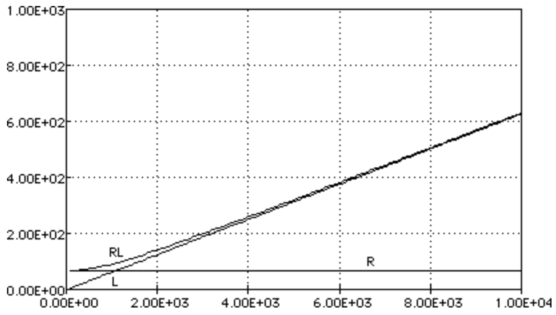


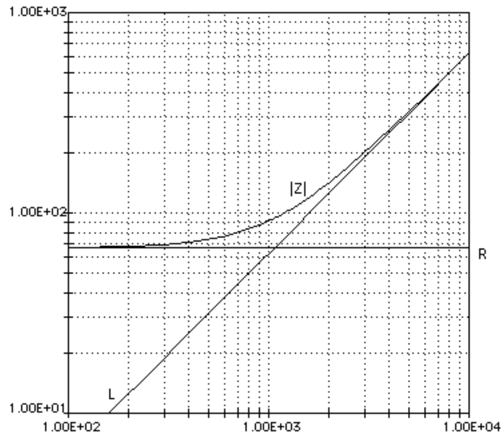




Les paramètres apparents R et L d'une bobine réelle ne sont pas constants et dépendent de la fréquence et de la tension d'alimentation. Dans le cas d'une bobine à noyau, la résistance apparente tient compte non seulement de la résistance du fil mais aussi des pertes Joule (pertes par hystérésis et par courants de Foucault).

exemple : R = 68 Ω ; L = 10 mH

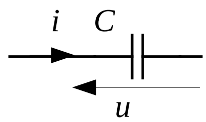




• *Condensateur*

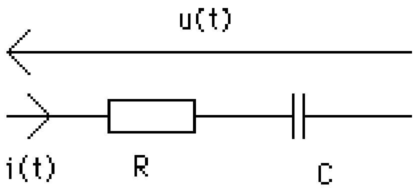
convention récepteur

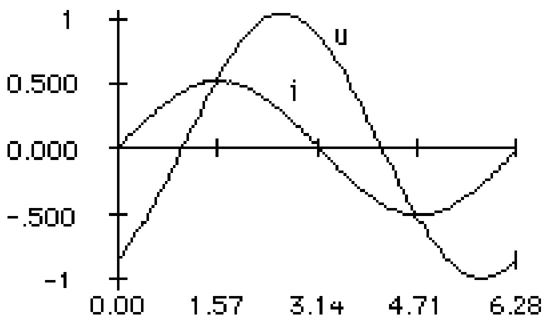
$$i = C\frac{du}{dt} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}$$

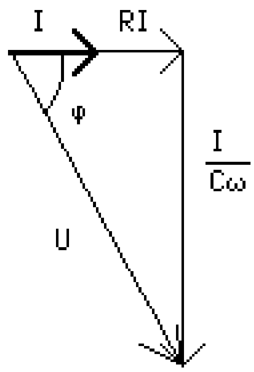


Dipôle capacitif série

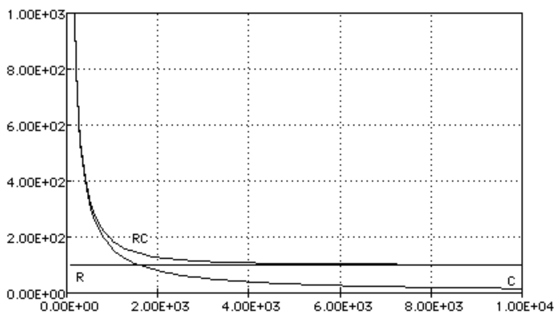
$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}} \\ \mathrm{Arg}(\underline{Z}) = -\arctan\dfrac{1}{RC\omega} \quad (\Leftrightarrow \varphi < 0) \end{cases}$$

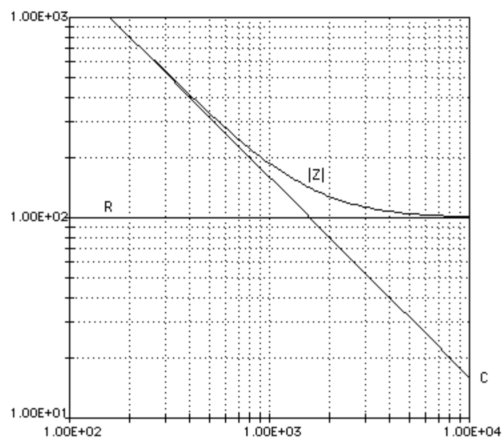






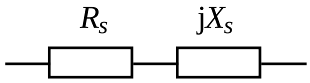
exemple : R = 100 Ω ; C = 1 µF





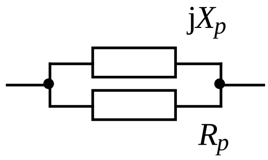
• Équivalence des représentations série et parallèle des dipôles réactifs

$\underline{Z}_s = R_s + \mathrm{j}\, X_s$



$\Leftrightarrow$

$\underline{Z}_s \equiv \underline{Z}_p$



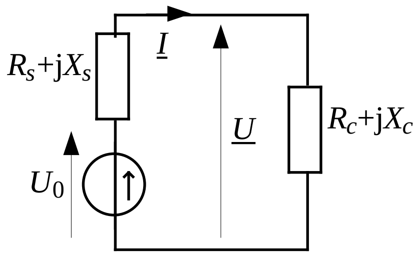
$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{\mathrm{j}X_p}$$

Il vient :
$$\begin{cases} R_p = \dfrac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \\ X_p = \dfrac{R_s^2 + X_s^2}{X_s} \end{cases}$$
et
$$\begin{cases} R_s = R_p \dfrac{X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} \\ X_s = X_p \dfrac{R_p^2}{R_p^2 + X_p^2} \end{cases}$$

***• Adaptation d'impédance, cas d'une charge complexe* :**

P_a : puissance active absorbée par la charge :

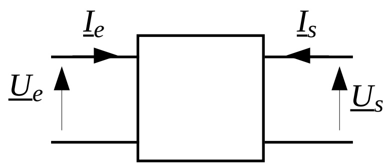
$$R_c = R_s$$
$$X_c = -X_s$$
$$P_{a\max} = \frac{U_0^2}{4R_s}$$



• Quadripôles réactifs

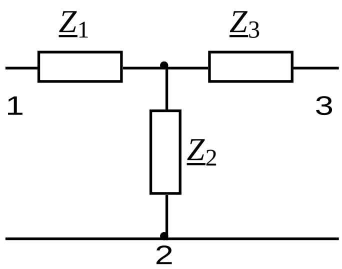
impédance d'entrée $\underline{Z}_e = \dfrac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e}$

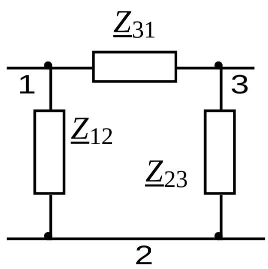
impédance de sortie $\underline{Z}_s = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{I}_s}$



Théorème de Kennelly : quadripôle en T $\leftrightarrow$ quadripôle en Π

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}.\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$





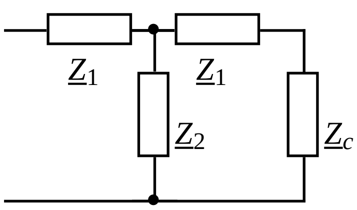
$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_1.\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

(permuter les indices pour les autres impédances)

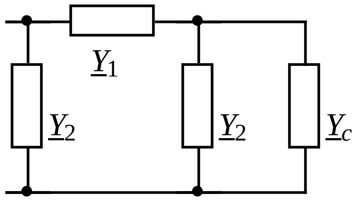
Impédance caractéristique : c'est l'impédance $\underline{Z}_c$ telle que, si l'on connecte une charge égale à $\underline{Z}_c$ à la sortie du quadripôle, son impédance d'entrée est encore égale à $\underline{Z}_c$.

Exemples : cas de quadripôles symétriques :

T

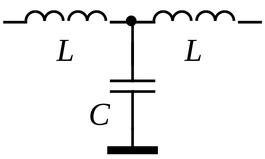


$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_c\right)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_c} = \underline{Z}_c \Rightarrow \underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_1^2 + 2\underline{Z}_1\underline{Z}_2}$$

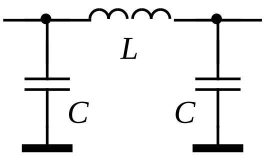
Π 

$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_2 + \frac{\underline{Y}_1\left(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_c\right)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_c} = \underline{Y}_c \Rightarrow \underline{Y}_c = \sqrt{\underline{Y}_2^2 + 2\underline{Y}_1\underline{Y}_2}$$

Réalisations :



$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \mathrm{j}L\omega \\ \underline{Z}_2 &= \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{2L}{C}}\sqrt{1 - \frac{1}{2}LC\omega^2}$$



$$\left.\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} \\ \underline{Y}_2 &= \mathrm{j}C\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{Y}_c = \sqrt{\frac{2C}{L}}\sqrt{1 - \frac{1}{2}LC\omega^2}$$

NB : dans le cas de quadripôles symétriques, on montre que : $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_{e_0} . \underline{Z}_{e_{cc}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\underline{Y}_{e_0} . \underline{Y}_{e_{cc}}}}$

où $\underline{Z}_{e0}$ (resp $\underline{Y}_{e0}$) et $\underline{Z}_{ecc}$ (resp $\underline{Y}_{ecc}$) sont les impédances (resp. admittances) d'entrée lorsque la sortie du quadripôle est en circuit ouvert (*indice "*0") ou en court-circuit (*indice "cc"*).