Wiskundig Formularium

Door ir. J.C.A. Wevers

Geachte lezer,

Dit document is een 66 pagina's tellend wiskundig formuleboek gericht op fysici en ingenieurs. Het is bedoeld als naslagwerk voor iedereen die veel formules op moet zoeken.

Dit document is tevens te verkrijgen bij de auteur, Johan Wevers (`johanw@vulcan.xs4all.nl`).

Het is tevens te vinden op het WWW op `http://www.xs4all.nl/~johanw/index.html`.

De C code voor de nulpuntsberekening volgens Newton en de FFT in hoofdstuk 8 komen uit "*Numerical Recipes in C* ", 2nd Edition, ISBN 0-521-43108-5.

Het Wiskundig Formularium werd gemaakt met behulp van teTEX en LATEX versie 2.09.

Indien U de layout waarin vectoren vet weergegeven worden prefereert kunt U het commentaar voor het alternatieve `\vec` commando in deze file weghalen en hercompileren.

Ik houd me altijd aanbevolen voor opmerkingen en suggesties over het Wiskundig Formularium.

Johan Wevers

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Basiswiskunde

1.1 Goniometrische functies

Voor de goniometrische verhoudingen van een punt p op de eenheidscirkel geldt:

$$\cos(\phi) = x_p \ \ , \ \ \sin(\phi) = y_p \ \ , \ \ \tan(\phi) = \frac{y_p}{x_p}$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ en $\cos^{-2}(x) = 1 + \tan^2(x)$.

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \ \ , \ \ \sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}$$

De **somformules** zijn:

$$\begin{aligned}
\sin(p) + \sin(q) &= 2\sin(\tfrac{1}{2}(p+q))\cos(\tfrac{1}{2}(p-q)) \\
\sin(p) - \sin(q) &= 2\cos(\tfrac{1}{2}(p+q))\sin(\tfrac{1}{2}(p-q)) \\
\cos(p) + \cos(q) &= 2\cos(\tfrac{1}{2}(p+q))\cos(\tfrac{1}{2}(p-q)) \\
\cos(p) - \cos(q) &= -2\sin(\tfrac{1}{2}(p+q))\sin(\tfrac{1}{2}(p-q))
\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x) \quad &, \quad 2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x) \\
\sin(\pi - x) = \sin(x) \quad &, \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\
\sin(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos(x) \quad &, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \sin(x)
\end{aligned}$$

Conclusies uit Gelijkheden:

$$\begin{aligned}
\underline{\sin(x) = \sin(a)} \quad &\Rightarrow \quad x = a \pm 2k\pi \text{ of } x = (\pi - a) \pm 2k\pi, \ \ k \in I\!N \\
\underline{\cos(x) = \cos(a)} \quad &\Rightarrow \quad x = a \pm 2k\pi \text{ of } x = -a \pm 2k\pi \\
\underline{\tan(x) = \tan(a)} \quad &\Rightarrow \quad x = a \pm k\pi \text{ én } x \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi
\end{aligned}$$

Tussen de inverse functies gelden de volgende relaties:

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \ \ , \ \ \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

1.2 Hyperbolische functies

De hyperbolische functies zijn gedefinieerd door:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ \ , \ \ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ \ , \ \ \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Hieruit volgt dat $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Verder geldt:

$$\text{arsinh}(x) = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| \ \ , \ \ \text{arcosh}(x) = \text{arsinh}(\sqrt{x^2-1})$$

1.3 Infinitesimaalrekening

De definitie van de afgeleide functie is:

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Rekenregels voor afgeleiden zijn:

$$d(x\pm y)=dx\pm dy\ \ ,\ \ d(xy)=xdy+ydx\ \ ,\ \ d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

Voor de afgeleide van de *inverse functie* $f^{\rm inv}(y)$, gedefinieerd door $f^{\rm inv}(f(x))=x$, geldt in punt $P=(x,f(x))$:

$$\left(\frac{df^{\rm inv}(y)}{dy}\right)_P\cdot\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_P=1$$

Kettingregel: als $f=f(g(x))$, dan geldt

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

Verder geldt voor afgeleiden van producten van functies:

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$$

Voor de *primitieve functie* $F(x)$ geldt: $F'(x)=f(x)$. Een overzicht van afgeleiden en primitieven is:

$y=f(x)$	$dy/dx=f'(x)$	$\int f(x)dx$
ax^n	anx^{n-1}	$a(n+1)^{-1}x^{n+1}$
$1/x$	$-x^{-2}$	$\ln\|x\|$
a	0	ax
a^x	$a^x\ln(a)$	$a^x/\ln(a)$
e^x	e^x	e^x
${}^a\log(x)$	$(x\ln(a))^{-1}$	$(x\ln(x)-x)/\ln(a)$
$\ln(x)$	$1/x$	$x\ln(x)-x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$\cos^{-2}(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$
$\sin^{-1}(x)$	$-\sin^{-2}(x)\cos(x)$	$\ln\|\tan(\frac{1}{2}x)\|$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\sinh(x)$
$\arcsin(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$
$\arccos(x)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\arctan(x)$	$(1+x^2)^{-1}$	$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$(a+x^2)^{-1/2}$	$-x(a+x^2)^{-3/2}$	$\ln\|x+\sqrt{a+x^2}\|$
$(a^2-x^2)^{-1}$	$2x(a^2+x^2)^{-2}$	$\frac{1}{2a}\ln\|(a+x)/(a-x)\|$

De *kromtestraal* ρ van een kromme is gegeven door: $\rho=\dfrac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|}$

Stelling van De 'l Hôpital: als $f(a)=0$ en $g(a)=0$, dan is $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

1.4 Limieten

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1\ ,\ \lim_{k\to 0}(1+k)^{1/k}=\mathrm{e}\ ,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x=\mathrm{e}^n$$

$$\lim_{x\downarrow 0}x^a\ln(x)=0\ ,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^p(x)}{x^a}=0\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+a)}{x}=a\ ,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{a^x}=0\ \text{ als } |a|>1.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(a^{1/x}-1\right)=\ln(a)\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$$

1.5 Complexe getallen en quaternionen

1.5.1 Complexe getallen

Het complexe getal $z=a+bi$ met a en $b\in I\!R$. a is het *reëele deel*, b het *imaginaire deel* van z. $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Per definitie geldt: $i^2=-1$. Elk complex getal is te schrijven als $z=|z|\exp(i\varphi)$, met $\tan(\varphi)=b/a$. De *complex geconjugeerde* van z is gedefinieerd als $\overline{z}=z^*:=a-bi$. Er geldt verder:

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+i(ad+bc)\\ (a+bi)+(c+di) &= a+c+i(b+d)\\ \frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

Men kan de goniometrische functies schrijven als complexe e-machten:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix})\\ \cos(x) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix})\end{aligned}$$

Hieruit volgt $\cos(ix)=\cosh(x)$ en $\sin(ix)=i\sinh(x)$. Verder volgt hieruit dat $\mathrm{e}^{\pm ix}=\cos(x)\pm i\sin(x)$, dus $\mathrm{e}^{iz}\neq 0\forall z$. Ook volgt hieruit de stelling van De Moivre: $(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)$.

Producten en quotiënten van complexe getallen zijn te schrijven als:

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2 &= |z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))\\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))\end{aligned}$$

Er is af te leiden dat geldt:

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|\ ,\ |z_1-z_2|\geq|\,|z_1|-|z_2|\,|$$

En uit $z=r\exp(i\theta)$ volgt: $\ln(z)=\ln(r)+i\theta$, $\ln(z)=\ln(z)\pm 2n\pi i$.

1.5.2 Quaternionen

Quaternionen zijn gedefinieerd als: $z=a+bi+cj+dk$, met $a,b,c,d\in I\!R$. Er geldt: $i^2=j^2=k^2=-1$. De producten van i,j,k onderling zijn gegeven door $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$ en $ki=-ik=j$.

1.6 Meetkunde

1.6.1 Driehoeken

Wanneer in een driehoek α de hoek is tegenover zijde a, β de hoek tegenover zijde b en γ de hoek is tegenover zijde c luidt de sinusregel:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$$

en de cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$. In elke driehoek geldt dat $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Verder geldt:

$$\frac{\tan(\frac{1}{2}(\alpha+\beta))}{\tan(\frac{1}{2}(\alpha-\beta))} = \frac{a+b}{a-b}$$

De oppervlakte van een driehoek is $\frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}ah_a = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ met h_a de hoogtelijn op zijde a en $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

1.6.2 Krommen

Cycloïde: indien een cirkel met straal a rolt over een lijn geldt voor de baan van een punt op de cirkel de parametervergelijking: $x = a(t + \sin(t))$, $y = a(1 + \cos(t))$.

Epicycloïde: indien een kleine cirkel met straal a rolt over een grote cirkel met straal R geldt voor de baan van een punt op de kleine cirkel de parametervergelijking:

$$x = a\sin\left(\frac{R+a}{a}t\right) + (R+a)\sin(t)\ \ ,\ \ y = a\cos\left(\frac{R+a}{a}t\right) + (R+a)\cos(t)$$

Hypocycloïde: indien een kleine cirkel met straal a rolt binnenin een grote cirkel met straal R geldt voor de baan van een punt op de kleine cirkel de parametervergelijking:

$$x = a\sin\left(\frac{R-a}{a}t\right) + (R-a)\sin(t)\ \ ,\ \ y = -a\cos\left(\frac{R-a}{a}t\right) + (R-a)\cos(t)$$

Een hypocycloïde met $a = R$ heet een **cardioïde**. In poolcoördinaten is deze gegeven door de vergelijking: $r(\varphi) = 2a[1 - \cos(\varphi)]$.

1.7 Vectoren

Het *inproduct* is gedefinieerd door: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum\limits_i a_i b_i = |\vec{a}\,|\cdot|\vec{b}\,|\cos(\varphi)$

waarbij φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is. Het *uitproduct* is in $I\!R^3$ gedefinieerd door:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Verder geldt: $|\vec{a}\times\vec{b}\,| = |\vec{a}\,|\cdot|\vec{b}\,|\sin(\varphi)$, en $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}\,) = (\vec{a}\cdot\vec{c}\,)\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b}\,)\vec{c}$.

1.8 Reeksen

1.8.1 Ontwikkelingen

Het Binomium van Newton is: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, waarin $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Door de reeksen $\sum\limits_{k=0}^{n} r^k$ en $r\sum\limits_{k=0}^{n} r^k$ van elkaar af te trekken vindt men

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

dit geeft voor $|r| < 1$ de *geometrische reeks*: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$.

De *rekenkundige reeks* is gegeven door: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(a+nV) = a(N+1) + \tfrac{1}{2}N(N+1)V$.

De ontwikkeling van een functie rondom het punt a is gegeven door de *Taylorreeks*:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R$$

waarin de restterm gegeven is door:

$$R_n(h) = (1-\theta)^n \frac{h^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta h)$$

en voldoet aan:

$$\frac{mh^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(h) \leq \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}$$

Hieruit kan men afleiden dat:

$$(1-x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Er is af te leiden dat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \tfrac{1}{2}\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

1.8.2 Convergentie en divergentie van reeksen

Als $\sum\limits_n |u_n|$ convergeert, convergeert $\sum\limits_n u_n$ ook.

Als $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ divergeert $\sum\limits_n u_n$.

Een alternerende reeks waarvan de termen in absolute waarde monotoon tot 0 naderen is convergent (Leibniz).

Als $\int_p^{\infty} f(x)dx < \infty$ dan convergeert $\sum\limits_n f_n$.

Als $u_n > 0\ \forall n$ dan convergeert $\sum\limits_n u_n$ áls $\sum\limits_n \ln(u_n+1)$ convergeert.

Als $u_n = c_n x^n$ geldt voor de convergentiestraal ρ van $\sum\limits_n u_n$: $\displaystyle\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$.

De reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ is convergent als $p > 1$ en divergent als $p \leq 1$.

Als geldt: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = p$, dan geldt: als $p > 0$ zijn $\sum\limits_n u_n$ en $\sum\limits_n v_n$ beide divergent of beide convergent, als $p = 0$ geldt: als $\sum\limits_n v_n$ convergeert, dán convergeert $\sum\limits_n u_n$ ook.

Wanneer L gedefinieerd wordt door: $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n_n|}$ óf door: $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$, dan is $\sum\limits_n u_n$ divergent als $L > 1$ en convergent als $L < 1$.

1.8.3 Convergentie en divergentie van functies

$f(x)$ is continu in $x = a$ dan en slechts dan als de boven- en onderlimiet gelijk zijn: $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$. Dit wordt wel genoteerd als: $f(a^-) = f(a^+)$.

Indien $f(x)$ continu is in a *en*: $\lim\limits_{x\uparrow a} f'(x) = \lim\limits_{x\downarrow a} f'(x)$, *dan* is $f(x)$ differentieerbaar in $x = a$.

We definiëren: $\|f\|_W := \sup(|f(x)|\;|x \in W)$ en $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Dan geldt: $\{f_n\}$ is uniform convergent als $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, of: $\forall(\varepsilon > 0)\exists(N)\forall(n \geq N)\|f_n - f\| < \varepsilon$.

De toets van Weierstrass: als $\sum \|u_n\|_W$ convergent is, dan is $\sum u_n$ uniform convergent.

We definiëren $S(x) = \sum\limits_{n=N}^{\infty} u_n(x)$ en $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx := F$. Dan is te bewijzen dat:

Stelling	**Voor**	**Eisen op W**	**Dan geldt op W**
C	rijen	f_n continu, $\{f_n\}$ uniform convergent	f is continu
	reeksen	$S(x)$ uniform convergent, u_n continu	S is continu
	integraal	f is continu	F is continu
I	rijen	f_n integreerbaar, $\{f_n\}$ uniform convergent	f_n is integreerbaar, $\int f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n dx$
	reeksen	$S(x)$ is uniform convergent, u_n is integreerbaar	S integreerbaar, $\int S dx = \sum \int u_n dx$
	integraal	f is continu	$\int F dy = \iint f(x,y)dxdy$
D	rijen	$\{f_n\} \in$C^{-1}; $\{f'_n\}$ unif. conv.$\to \phi$	$f' = \phi(x)$
	reeksen	$u_n \in$C^{-1}; $\sum u_n$ conv; $\sum u'_n$ u.c.	$S'(x) = \sum u'_n(x)$
	integraal	$\partial f/\partial y$ continu	$F_y = \int f_y(x,y)dx$

1.9 Producten en quotiënten

Voor $a, b, c, d \in I\!R$ gelden:
De **distributieve eigenschap**: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
De **associatieve eigenschap**: $a(bc) = b(ac) = c(ab)$ en $a(b + c) = ab + ac$
De **commutatieve eigenschap**: $a + b = b + a$, $ab = ba$.

Verder geldt:

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a \pm b} = a^{2n-1} \pm a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 \pm \cdots \pm b^{2n-1} \quad , \quad \frac{a^{2n+1} - b^{2n+1}}{a + b} = \sum_{k=0}^{n} a^{2n-k}b^{2k}$$

$$(a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2) = a^3 \pm b^3\ ,\ \ (a + b)(a - b) = a^2 + b^2\ ,\ \ \frac{a^3 \pm b^3}{a + b} = a^2 \mp ba + b^2$$

1.10 Logaritmen

Definitie: ${}^a\log(x) = b \Leftrightarrow a^b = x$. Voor logaritmen met grondtal e schrijft men $\ln(x)$.

Rekenregels: $\log(x^n) = n\log(x)$, $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$, $\log(a) - \log(b) = \log(a/b)$.

1.11 Polynomen

Vergelijkingen van de vorm

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

hebben n nulpunten die eventueel samenvallen. Ieder polynoom $p(z)$ met graad $n \geq 1$ heeft tenminste één nulpunt in $\mathbb{C}$. Als alle $a_k \in \mathbb{R}$, dan geldt: is $x = p$ met $p \in \mathbb{C}$ een nulpunt, dan is p^* ook een nulpunt. Polynomen tot en met graad 4 zijn algemeen analytisch oplosbaar, voor polynomen met graad ≥ 5 bestaat geen algemeen geldige analytische oplossing.

Voor $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ geldt: de 2e graads vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als algemene oplossing:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ geldt: de 3e graads vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ heeft als algemene analytische oplossing:

$$\begin{aligned} x_1 &= K - \frac{3ac - b^2}{9a^2K} - \frac{b}{3a} \\ x_2 = x_3^* &= -\frac{K}{2} + \frac{3ac - b^2}{18a^2K} - \frac{b}{3a} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(K + \frac{3ac - b^2}{9a^2K}\right) \end{aligned}$$

met $K = \left(\dfrac{9abc - 27da^2 - 2b^3}{54a^3} + \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{4ac^3 - c^2b^2 - 18abcd + 27a^2d^2 + 4db^3}}{18a^2}\right)^{1/3}$

1.12 Priemgetallen

Een *priemgetal* is een getal $\in \mathbb{N}$ dat slechts deelbaar is door zichzelf en door 1. Er zijn ∞ veel priemgetallen. Bewijs: stel dat de verzameling priemgetallen P eindig is, vorm dan het getal $q = 1 + \prod\limits_{p \in P} p$, dan geldt $q = 1(p)$ en q kan dus niet als product van priemgetallen uit P geschreven worden. Dit is een tegenspraak.

Indien $\pi(x)$ het aantal priemgetallen $\leq x$ is, dan geldt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\int\limits_2^x \frac{dt}{\ln(t)}} = 1$$

Voor iedere $N \geq 2$ is er een priemgetal tussen N en $2N$.

De getallen $F_k := 2^k + 1$ met $k \in \mathbb{N}$ heten de *getallen van Fermat*. Hiertussen zitten vele priemgetallen.

De getallen $M_k := 2^k - 1$ heten de *getallen van Mersenne*. Men stuit hierop bij het opsporen van *perfecte getallen*, d.w.z. getallen $n \in \mathbb{N}$ die tevens de som van hun verschillende delers zijn, bv. $6 = 1 + 2 + 3$. Voor $k < 12000$ zijn er 23 priemgetallen van Mersenne: voor $k \in \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213\}$.

Om te bepalen of een gegeven getal n een priemgetal is kan men met zeefmethoden werken, waarvan die van Eratosthenes de eerst bekende is. Een snellere manier voor grote getallen zijn de 4 testen van Fermat, die welliswaar niet bewijzen dat een getal priem is maar wel een hoge waarschijnlijkheid geven:

1. Neem de eerste 4 priemgetallen: $b = \{2, 3, 5, 7\}$,
2. Neem $w(b) = b^{n-1} \bmod n$, voor iedere b,
3. Als $w = 1$ voor elke b is n waarschijnlijk priem. Voor elke andere waarde van w is n zeker geen priemgetal.

Hoofdstuk 2

Kansrekening en statistiek

2.1 Combinatoriek

Het aantal mogelijke *combinaties* van k elementen uit n elementen is gegeven door

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Het aantal *permutaties* van p uit n is gegeven door

$$\frac{n!}{(n-p)!} = p!\binom{n}{p}$$

Het aantal verschillende manieren om n_i elementen in i groepen onder te brengen bij een totaal van N elementen is

$$\frac{N!}{\prod\limits_i n_i!}$$

2.2 Kansrekening

De kans $P(A)$ dat een gebeurtenis A plaatsvindt is gedefinieerd door:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

waarin $n(A)$ het aantal keren is dat A plaatsvindt en $n(U)$ het totale aantal gebeurtenissen is.

De kans $P(\neg A)$ dat A *niet* plaatsvindt is: $P(\neg A) = 1 - P(A)$. De kans $P(A \cup B)$ dat A en B *beide* plaatsvinden is gegeven door: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Als A en B onafhankelijk zijn, geldt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

De kans $P(A|B)$ dat A plaatsvindt, gegeven dat B plaatsvindt, is:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2.3 Statistiek

2.3.1 Algemeen

Het *gemiddelde* $\langle x \rangle$ van een verzameling waarden is: $\langle x \rangle = \sum_i x_i/n$. De *standaarddeviatie* σ_x in de verdeling van x is gegeven door:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle)^2}{n}}$$

Wanneer met steekproeven gewerkt wordt is de variantie s van de toevalsgrootte gegeven door $s^2 = \dfrac{n}{n-1}\sigma^2$.

De *covariantie* σ_{xy} van x en y is gegeven door:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \langle x\rangle)(y_i - \langle y\rangle)}{n-1}$$

De *correlatiecoëfficiënt* r_{xy} van x en y is dan: $r_{xy} = \sigma_{xy}/\sigma_x\sigma_y$.

De standaarddeviatie in een variabele $f(x, y)$ ten gevolge van afwijkingen in de bepaaldheid in x en y is:

$$\sigma^2_{f(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_{xy}$$

2.3.2 Verdelingen

1. **De Binomiaalverdeling** is de verdeling die een trekking met teruglegging beschrijft. De kans op succes is p. De kans P op k successen uit n trekkingen is dan gegeven door:

   $$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

   De standaarddeviatie is gegeven door $\sigma_x = \sqrt{np(1-p)}$ en de verwachtingswaarde is $\varepsilon = np$.

2. **De Hypergeometrische verdeling** is de verdeling die een trekking zonder terugleggen beschrijft waarin de volgorde er niet toe doet. De kans op k successen in een trekking uit A mogelijk positieve en B mogelijk negatieve resultaten is dan gegeven door:

   $$P(x = k) = \frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$$

   De verwachtingswaarde is gegeven door $\varepsilon = nA/(A+B)$.

3. **De Poisson verdeling** ontstaat uit de binomiaalverdeling wanneer $p \to 0$, $n \to \infty$, en tegelijkertijd het product $np = \lambda$ constant is.

   $$P(x) = \frac{\lambda^x \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!}$$

   Deze verdeling is genormeerd op $\sum\limits_{x=0}^{\infty} P(x) = 1$.

4. **De Normaalverdeling** is een benadering van de binomiaalverdeling voor continue variabelen:

   $$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \langle x\rangle}{\sigma}\right)^2\right)$$

5. **De Uniforme verdeling** treedt op als aselect een getal x genomen wordt uit de verzameling $a \leq x \leq b$ en is gegeven door:

   $$\begin{cases} P(x) = \dfrac{1}{b-a} & \text{als} \quad a \leq x \leq b \\[2ex] P(x) = 0 & \text{in alle andere gevallen} \end{cases}$$

   $\langle x\rangle = \frac{1}{2}(b-a)$ en $\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

6. **De Gamma verdeling** is gegeven door:

$$\left\{ \; P(x) = \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} \quad \text{als} \quad 0 \leq y \leq \infty \right.$$

met $\alpha > 0$ en $\beta > 0$. De verdeling heeft de volgende eigenschappen: $\langle x\rangle = \alpha\beta$, $\sigma^2 = \alpha\beta^2$.

7. **De Beta verdeling** is gegeven door:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} \quad \text{als} \quad 0 \leq x \leq 1 \\[3ex] P(x) = 0 \quad \text{elders} \end{array} \right.$$

en heeft de volgende eigenschappen: $\langle x\rangle = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\sigma^2 = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

Voor $P(\chi^2)$ geldt: $\alpha = V/2$ en $\beta = 2$.

8. **De Weibull verdeling** is gegeven door:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x) = \dfrac{\alpha}{\beta}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x^\alpha} \quad \text{als} \quad 0 \leq x \leq \infty \wedge \alpha \wedge \beta > 0 \\[3ex] P(x) = 0 \quad \text{in alle andere gevallen} \end{array} \right.$$

Het gemiddelde is $\langle x\rangle = \beta^{1/\alpha}\Gamma((\alpha+1)\alpha)$

9. Bij een **tweeledige verdeling** geldt:

$$P_1(x_1) = \int P(x_1,x_2)dx_2 \quad , \quad P_2(x_2) = \int P(x_1,x_2)dx_1$$

met

$$\varepsilon(g(x_1,x_2)) = \iint g(x_1,x_2)P(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \sum_{x_1}\sum_{x_2} g\cdot P$$

2.4 Regressie analyse

Wanneer er een verband tussen de grootheden x en y bestaat van de vorm $y = ax + b$, en men een set x_i en bijbehorende y_i gemeten heeft, geldt het volgende verband voor a en b ($\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ en $\vec{e} = (1, 1, ..., 1)$):

$$\vec{y} - a\vec{x} - b\vec{e} \in < \vec{x}, \vec{e} >^\perp$$

Hieruit volgt dat de inproducten 0 zijn:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{y},\vec{x}\,) - a(\vec{x},\vec{x}\,) - b(\vec{e},\vec{x}\,) = 0 \\ (\vec{y},\vec{e}\,) - a(\vec{x},\vec{e}\,) - b(\vec{e},\vec{e}\,) = 0 \end{array} \right.$$

met $(\vec{x},\vec{x}\,) = \sum\limits_i x_i^2$, $(\vec{x},\vec{y}\,) = \sum\limits_i x_iy_i$, $(\vec{x},\vec{e}\,) = \sum\limits_i x_i$ en $(\vec{e},\vec{e}\,) = n$. Hieruit volgen a en b.

Dit geldt ook voor hogere orde polynoom fits: voor een 2e orde fit geldt:

$$\vec{y} - a\vec{x^2} - b\vec{x} - c\vec{e} \in < \vec{x^2}, \vec{x}, \vec{e} >^\perp$$

met $\vec{x^2} = (x_1^2, ..., x_n^2)$.

De *correlatie coëfficiënt* r is een maat voor hoe goed een fit is. Bij lineaire regressie is ze gegeven door:

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x\sum y}{\sqrt{(n\sum x^2 - (\sum x)^2)(n\sum y^2 - (\sum y)^2)}}$$

Hoofdstuk 3

Analyse

3.1 Integraalrekening

3.1.1 Rekenregels

De primitieve functie $F(x)$ van $f(x)$ voldoet aan: $F'(x) = f(x)$. Met $F(x)$ de primitieve van $f(x)$ geldt voor de bepaalde integraal

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Als $u = f(x)$ geldt:

$$\int\limits_a^b g(f(x))df(x) = \int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(u)du$$

Partiëel integreren: met F en G de primitieven van f resp. g geldt:

$$\int f(x) \cdot g(x)dx = f(x)G(x) - \int G(x)\frac{df(x)}{dx}dx$$

Afgeleide onder het integraalteken brengen (zie **sectie 1.8.3** voor de eisen wanneer dit kan):

$$\frac{d}{dy}\left[\int\limits_{x=g(y)}^{x=h(y)} f(x,y)dx\right] = \int\limits_{x=g(y)}^{x=h(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx - f(g(y),y)\frac{dg(y)}{dy} + f(h(y),y)\frac{dh(y)}{dy}$$

3.1.2 Lengten, oppervlakten en volumen

De lengte ℓ van een kromme $y(x)$ is gegeven door:

$$\ell = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2} dx$$

De lengte ℓ van een parameterkromme $F(\vec{x}(t))$ is:

$$\ell = \int F ds = \int F(\vec{x}(t))|\dot{\vec{x}}(t)|dt$$

met

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} \quad , \quad |\vec{t}\,| = 1$$

$$\int (\vec{v}, \vec{t})ds = \int (\vec{v}, \dot{\vec{t}}(t))dt = \int (v_1dx + v_2dy + v_3dz)$$

De oppervlakte A van een omwentelingslichaam is:

$$A = 2\pi \int y\sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2} dx$$

Het volume V van een omwentelingslichaam is:

$$V = \pi \int f^2(x)dx$$

3.1.3 Breuksplitsen

Iedere rationele functie $P(x)/Q(x)$ met P en Q polynomen is te schrijven als een lineaire combinatie van functies van de gedaante $(x-a)^k$ met $k \in \mathbb{Z}$, en van functies van de gedaante

$$\frac{px+q}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

met $b > 0$ en $n \in \mathbb{N}$. Dus:

$$\frac{p(x)}{(x-a)^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-a)^k} \;\;,\;\; \frac{p(x)}{((x-b)^2+c^2)^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k x + B}{((x-b)^2+c^2)^k}$$

Recurrente betrekking: voor $n \neq 0$ geldt:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

3.1.4 Speciale functies

Elliptische functies

Elliptische functies zijn als volgt als reeks te schrijven:

$$\sqrt{1-k^2\sin^2(x)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n-1)} k^{2n}\sin^{2n}(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(x)}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n}\sin^{2n}(x)$$

met $n!! = n(n-2)!!$.

De Gamma functie

De gammafunctie $\Gamma(y)$ is gedefinieerd door:

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{y-1} dx$$

Er geldt: $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y) = y!$. Op deze manier zijn faculteiten voor niet-gehele getallen te definiëren. Verder is af te leiden dat

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!! \quad \text{en} \quad \Gamma^{(n)}(y) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{y-1} \ln^n(x) dx$$

De Beta functie

De betafunctie $\beta(p,q)$ is gedefinieerd door:

$$\beta(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

met p en $q>0$. Tussen de beta- en gammafunctie geldt het volgende verband:

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

De Delta functie

De delta functie $\delta(x)$ is een oneindig dunne piekfunctie met oppervlakte 1. Ze is te definiëren als:

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}P(\varepsilon,x)\ \text{ met }\ P(\varepsilon,x)=\begin{cases}0 & \text{voor } |x|>\varepsilon\\ \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{voor } |x|<\varepsilon\end{cases}$$

Enkele eigenschappen zijn:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1\ ,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x)\delta(x)dx=F(0)$$

3.1.5 Goniometrische integralen

Voor het oplossen van goniometrische integralen is het vaak nuttig te wisselen van variabele. Als men stelt dat $\tan(\frac{1}{2}x):=t$ geldt:

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}\ ,\ \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$$

Iedere integraal van het type $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ is te herleiden tot de types die in **sectie 3.1.3** behandeld zijn. Na herleiding substitueert men in:

$$\begin{array}{lll}\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2+1})dx & : & x=\tan(\varphi)\,,dx=\dfrac{d\varphi}{\cos(\varphi)}\ \text{ of }\ \sqrt{x^2+1}=t+x\\ \displaystyle\int R(x,\sqrt{1-x^2})dx & : & x=\sin(\varphi)\,,dx=\cos(\varphi)d\varphi\ \text{ of }\ \sqrt{1-x^2}=1-tx\\ \displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2-1})dx & : & x=\dfrac{1}{\cos(\varphi)}\,,dx=\dfrac{\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}d\varphi\ \text{ of }\ \sqrt{x^2-1}=x-t\end{array}$$

De volgende bepaalde integralen zijn eenvoudig op te lossen:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n(x)\sin^m(x)dx=\frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\begin{cases}\pi/2 & \text{als } m \text{ en } n \text{ beide even zijn}\\ 1 & \text{in alle andere gevallen}\end{cases}$$

Enkele belangrijke integralen zijn:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{e^{ax}+1}=\frac{\pi^2}{12a^2}\ ,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(e^x+1)^2}=\frac{\pi^2}{3}\ ,\quad \int\limits_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x+1}=\frac{\pi^4}{15}$$

3.2 Functies met meer variabelen

3.2.1 Afgeleiden

De *partiële afgeleide* naar x van een functie $f(x,y)$ is gedefinieerd door:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

De *richtingsafgeleide* in richting α is gedefinieerd door:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=\lim_{r\downarrow 0}\frac{f(x_0+r\cos(\alpha),y_0+r\sin(\alpha))-f(x_0,y_0)}{r}=(\vec{\nabla}f,(\sin\alpha,\cos\alpha))=\frac{\nabla f\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Wanneer men overgaat op andere coördinaten $f(x(u,v),y(u,v))$ geldt:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Als $x(t)$ en $y(t)$ van maar één parameter t afhangen geldt:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

De *totale differentiaal* df van een functie met 3 variabelen is gegeven door:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Dus

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

De *raaklijn* in het punt $\vec{x}_0$ aan het oppervlak $f(x,y)=0$ heeft als vergelijking:
$f_x(\vec{x}_0)(x-x_0)+f_y(\vec{x}_0)(y-y_0)=0$.

Het *raakvlak* in $\vec{x}_0$ is gegeven door: $f_x(\vec{x}_0)(x-x_0)+f_y(\vec{x}_0)(y-y_0)=z-f(\vec{x}_0)$.

3.2.2 Taylorreeksen

Men kan een functie van 2 variabelen als volgt in een Taylorreeks ontwikkelen:

$$f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}\left(h\frac{\partial^p}{\partial x^p}+k\frac{\partial^p}{\partial y^p}\right)f(x_0,y_0)+R(n)$$

met $R(n)$ de restfout en

$$\left(h\frac{\partial^p}{\partial x^p}+k\frac{\partial^p}{\partial y^p}\right)f(a,b)=\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}h^m k^{p-m}\frac{\partial^p f(a,b)}{\partial x^m\partial y^{p-m}}$$

3.2.3 Extrema

Indien f continu is op een compacte rand V heeft f een globaal maximum en een globaal minimum op deze rand. Een rand is compact als hij begrensd en gesloten is.

Kandidaten voor extrema van $f(x,y)$ op een rand $V\in I\!R^2$ zijn:

1. Punten op V waar $f(x,y)$ niet differentieerbaar is,

2. Punten waar $\vec{\nabla} f = \vec{0}$,
3. Indien de rand V gegeven is door $\varphi(x,y)=0$ zijn alle punten waar $\vec{\nabla} f(x,y) + \lambda\vec{\nabla}\varphi(x,y) = 0$ kandidaten voor extrema. Dit is de multiplicatoren methode van Lagrange, λ is een multiplicator.

In $I\!R^3$ geldt dat, indien het te onderzoeken gebied begrensd is door een compacte V, met V gedefinieerd door $\varphi_1(x,y,z)=0$ en $\varphi_2(x,y,z)=0$, voor extrema van $f(x,y,z)$ hetzelfde als op $I\!R^2$ m.b.t. punt (1) en (2). Punt (3) wordt als volgt herschreven: potentiële extra zijn punten waar $\vec{\nabla} f(x,y,z)+\lambda_1\vec{\nabla}\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\vec{\nabla}\varphi_2(x,y,z)=0$.

3.2.4 De ∇-operator

In cartesische coördinaten (x,y,z) geldt:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \\
\mathrm{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \\
\mathrm{div}\,\vec{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\
\mathrm{rot}\,\vec{a} &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

In cylindercoördinaten (r,φ,z) geldt:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \\
\mathrm{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \\
\mathrm{div}\,\vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\
\mathrm{rot}\,\vec{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

In bolcoördinaten (r,θ,φ) geldt:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\mathrm{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\mathrm{div}\,\vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\
\mathrm{rot}\,\vec{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r}\right)\vec{e}_\theta + \\
&\quad \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

Algemene kromlijnige orthonormale coördinaten (u,v,w) kunnen uit cartesische coördinaten verkregen worden door de transformatie $\vec{x}=\vec{x}(u,v,w)$. Dan worden de eenheidsvectoren gegeven door:

$$\vec{e}_u=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}\ ,\ \ \vec{e}_v=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\ ,\ \ \vec{e}_w=\frac{1}{h_3}\frac{\partial\vec{x}}{\partial w}$$

waarin de factoren h_i zorgen voor de normering op lengte 1. De differentiaaloperatoren worden dan gegeven door:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}f &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u}\vec{e}_u+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial v}\vec{e}_v+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial w}\vec{e}_w\\
\mathrm{div}\ \vec{a} &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_2h_3a_u)+\frac{\partial}{\partial v}(h_3h_1a_v)+\frac{\partial}{\partial w}(h_1h_2a_w)\right)\\
\mathrm{rot}\ \vec{a} &= \frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial(h_3a_w)}{\partial v}-\frac{\partial(h_2a_v)}{\partial w}\right)\vec{e}_u+\frac{1}{h_3h_1}\left(\frac{\partial(h_1a_u)}{\partial w}-\frac{\partial(h_3a_w)}{\partial u}\right)\vec{e}_v+\\
&\quad \frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial(h_2a_v)}{\partial u}-\frac{\partial(h_1a_u)}{\partial v}\right)\vec{e}_w\\
\nabla^2f &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]
\end{aligned}$$

Enkele eigenschappen van de ∇-operator zijn:

$\mathrm{div}(\phi\vec{v})=\phi\mathrm{div}\vec{v}+\mathrm{grad}\phi\cdot\vec{v}$	$\mathrm{rot}(\phi\vec{v})=\phi\mathrm{rot}\vec{v}+(\mathrm{grad}\phi)\times\vec{v}$	$\mathrm{rot\ grad}\phi=\vec{0}$
$\mathrm{div}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{v}\cdot(\mathrm{rot}\vec{u})-\vec{u}\cdot(\mathrm{rot}\vec{v})$	$\mathrm{rot\ rot}\vec{v}=\mathrm{grad\ div}\vec{v}-\nabla^2\vec{v}$	$\mathrm{div\ rot}\vec{v}=0$
$\mathrm{div\ grad}\phi=\nabla^2\phi$	$\nabla^2\vec{v}\equiv(\nabla^2v_1,\nabla^2v_2,\nabla^2v_3)$	

Hierin is $\vec{v}$ een willekeurig vectorveld en ϕ een willekeurig scalarveld.

3.2.5 Integraalstellingen

Enkele belangrijke integraalstellingen zijn:

Gauss:	$\oiint(\vec{v}\cdot\vec{n})d^2A=\iiint(\mathrm{div}\vec{v})d^3V$
Stokes voor een scalarveld:	$\oint(\phi\cdot\vec{e}_{\rm t})ds=\iint(\vec{n}\times\mathrm{grad}\phi)d^2A$
Stokes voor een vectorveld:	$\oint(\vec{v}\cdot\vec{e}_{\rm t})ds=\iint(\mathrm{rot}\vec{v}\cdot\vec{n})d^2A$
dit geeft:	$\oiint(\mathrm{rot}\vec{v}\cdot\vec{n})d^2A=0$
Ostrogradsky:	$\oiint(\vec{n}\times\vec{v})d^2A=\iiint(\mathrm{rot}\vec{v})d^3A$
	$\oiint(\phi\vec{n})d^2A=\iiint(\mathrm{grad}\phi)d^3V$

Hierin wordt het oriënteerbare oppervlak $\iint d^2A$ begrensd door de Jordankromme $s(t)$.

3.2.6 Meervoudige integralen

Als A een gesloten kromme is die gegeven wordt door $f(x,y)=0$ wordt het oppervlak A binnen de kromme in $I\!R^2$ gegeven door

$$A=\iint d^2A=\iint dxdy$$

Aanname: het oppervlak A wordt gedefinieerd door de functie $z = f(x, y)$. Het volume V tussen A en het xy vlak wordt dan gegeven door:

$$V = \iint f(x, y)dxdy$$

Het volume binnen een gesloten oppervlak dat gedefinieerd is door $z = f(x, y)$ is gegeven door:

$$V = \iiint d^3V = \iint f(x, y)dxdy = \iiint dxdydz$$

3.2.7 Coördinatentransformaties

De uitdrukkingen d^2A en d^3V transformeren als volgt wanneer men overgaat op coördinaten $\vec{u} = (u, v, w)$ via de transformatie $x(u, v, w)$:

$$V = \iiint f(x, y, z)dxdydz = \iiint f(\vec{x}(\vec{u})) \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{u}}\right| dudvdw$$

In $I\!R^2$ geldt:

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{u}} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

Als het oppervlak A gegeven is door $z = F(x, y) = X(u, v)$ is het volume tussen het xy vlak en F gegeven door:

$$\iint\limits_S f(\vec{x})d^2A = \iint\limits_G f(\vec{x}(\vec{u})) \left|\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}\right| dudv = \iint\limits_G f(x, y, F(x, y))\sqrt{1 + \partial_x F^2 + \partial_y F^2}dxdy$$

3.3 Orthogonaliteit van functies

Het inproduct van twee functies $f(x)$ en $g(x)$ op het interval $[a, b]$ is gegeven door:

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$$

of, als men een gewichtsfunctie $p(x)$ hanteert door:

$$(f, g) = \int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

De *norm* $\|f\|$ volgt dan uit: $\|f\|^2 = (f, f)$. Een set functies f_i is *orthonormaal* als geldt: $(f_i, f_j) = \delta_{ij}$.

Elke functie $f(x)$ is te schrijven als een som van orthogonale functies:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i g_i(x)$$

en $\sum c_i^2 \leq \|f\|^2$. Als de set g_i orthogonaal is volgt:

$$c_i = \frac{f, g_i}{(g_i, g_i)}$$

3.4 Fourier reeksen

Elke functie is te schrijven als een som van onafhankelijke basisfuncties. Indien men voor de orthogonale basis $(\cos(nx), \sin(nx))$ kiest spreekt men van een Fourier reeks.

Een periodieke functie $f(x)$ met periode $2L$ is te schrijven als:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

Voor de coëfficiënten volgt dan vanwege de orthogonaliteit:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f(t)dt \ \ , \ \ a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \ \ , \ \ b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$

Men kan een Fourier reeks ook schrijven als een som van complexe e-machten:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$$

met

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}dx$$

De *Fouriertransformatie* van een functie $f(x)$ levert een getransformeerde functie $\hat{f}(\omega)$ op:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}dx$$

De inverse transformatie is gegeven door:

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega x}d\omega$$

waarin $f(x^+)$ en $f(x^-)$ gedefinieerd zijn door de onder- en bovenlimiet:

$$f(a^-) = \lim_{x\uparrow a} f(x) \ \ , \ \ f(a^+) = \lim_{x\downarrow a} f(x)$$

Voor continue functies geldt dat $\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] = f(x)$.

Hoofdstuk 4

Differentiaalvergelijkingen

4.1 Lineaire differentiaalvergelijkingen

4.1.1 Eerste orde lineaire DV

De algemene oplossing van een lineaire differentiaalvergelijking is gegeven door $y_\mathrm{A} = y_\mathrm{H} + y_\mathrm{P}$, waarin y_H de oplossing van de *homogene vergelijking* is en y_P een *particuliere oplossing*.

Een differentiaalvergelijking van de eerste orde is gegeven door: $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$. De bijbehorende homogene vergelijking is $y'(x) + a(x)y(x) = 0$.

De oplossing van de homogene vergelijking is gegeven door

$$y_\mathrm{H} = k \exp\left(\int a(x)dx \right)$$

Stel dat $a(x) = a =$constant.

Substitutie van $\exp(\lambda x)$ in de homogene vergelijking leidt tot de *karakteristieke vergelijking* $\lambda + a = 0 \Rightarrow \lambda = -a$.

Stel dat $b(x) = \alpha \exp(\mu x)$. Dan zijn er twee gevallen:

1. $\lambda \neq \mu$: een particuliere oplossing is: $y_\mathrm{P} = \exp(\mu x)$
2. $\lambda = \mu$: een particuliere oplossing is: $y_\mathrm{P} = x \exp(\mu x)$

Bij oplossing door *variatie van constante* stelt men: $y_\mathrm{P}(x) = y_\mathrm{H}(x) f(x)$, en lost hieruit $f(x)$ op.

4.1.2 Tweede orde lineaire DV

Een differentiaalvergelijking van de tweede orde met constante coëfficiënten is gegeven door: $y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$. Indien $c(x) = c =$constant bestaat er een particuliere oplossing $y_\mathrm{P} = c/b$.

Substitutie van $y = \exp(\lambda x)$ leidt tot de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Er zijn nu 2 mogelijkheden:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$: dan is $y_\mathrm{H} = \alpha \exp(\lambda_1 x) + \beta \exp(\lambda_2 x)$.
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: dan is $y_\mathrm{H} = (\alpha + \beta x) \exp(\lambda x)$.

Als $c(x) = p(x) \exp(\mu x)$ met $p(x)$ een polynoom is zijn er 3 mogelijkheden:

1. $\lambda_1, \lambda_2 \neq \mu$: $y_\mathrm{P} = q(x) \exp(\mu x)$.
2. $\lambda_1 = \mu, \lambda_2 \neq \mu$: $y_\mathrm{P} = xq(x) \exp(\mu x)$.
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$: $y_\mathrm{P} = x^2 q(x) \exp(\mu x)$.

waarin $q(x)$ een polynoom van dezelfde graad is als $p(x)$.

Als gegeven is: $y''(x) + \omega^2 y(x) = \omega f(x)$ en $y(0) = y'(0) = 0$ volgt: $y(x) = \int\limits_0^x f(x) \sin(\omega(x-t))dt$.

4.1.3 De Wronskiaan

We gaan uit van de LDV $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ en de twee beginvoorwaarden $y(x_0) = K_0$ en $y'(x_0) = K_1$. Als $p(x)$ en $q(x)$ continu zijn op het open interval I is er een unieke oplossing $y(x)$ op dit interval.

De algemene oplossing is dan te schrijven als $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ en y_1 en y_2 zijn lineair onafhankelijk. Dit zijn tevens *alle* oplossingen van de LDV.

De *Wronskiaan* is gedefinieerd als:

$$W(y_1, y_2) = \left| \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{array} \right| = y_1y_2' - y_2y_1'$$

y_1 en y_2 zijn lineair afhankelijk dan en slechts dan als op interval I $\exists x_0 \in I$ zodanig dat geldt:
$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$.

4.1.4 Machtreekssubstitutie

Wanneer in de LDV met constante coëfficiënten $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$ de reeks $y = \sum a_nx^n$ ingevuld wordt geeft dit:

$$\sum_n \left[n(n-1)a_nx^{n-2} + pna_nx^{n-1} + qa_nx^n\right] = 0$$

Gelijkstellen van gelijke machten van x levert:

$$(n + 2)(n + 1)a_{n+2} + p(n + 1)a_{n+1} + qa_n = 0$$

Dit geeft een algemeen verband tussen de coëfficiënten. Speciale gevallen zijn $n = 0, 1, 2$.

4.2 Enkele speciale gevallen

4.2.1 De methode van Frobenius

Gegeven de LDV

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{b(x)}{x}\frac{dy(x)}{dx} + \frac{c(x)}{x^2}y(x) = 0$$

met $b(x)$ en $c(x)$ analytisch op $x = 0$. Deze heeft ten minste één oplossing van de vorm:

$$y_i(x) = x^{r_i}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad \text{met} \;\; i = 1, 2$$

met r reëel of complex en zodanig gekozen dat $a_0 \neq 0$. Waneer we $b(x)$ en $c(x)$ dan als volgt expanderen: $b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...$ en $c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ...$ volgt voor r:

$$r^2 + (b_0 - 1)r + c_0 = 0$$

Er kunnen zich nu 3 gevallen voordoen:

1. $r_1 = r_2$: dan is $y(x) = y_1(x)\ln|x| + y_2(x)$.
2. $r_1 - r_2 \in I\!N$: dan is $y(x) = ky_1(x)\ln|x| + y_2(x)$.
3. $r_1 - r_2 \neq Z\!\!Z$: dan is $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

4.2.2 Euler

Gegeven de LDV

$$x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2}+ax\frac{dy(x)}{dx}+by(x)=0$$

Substitutie van $y(x)=x^r$ geeft een vergelijking voor r: $r^2+(a-1)r+b=0$. Hieruit volgen twee oplossingen r_1 en r_2. Er zijn nu 2 mogelijkheden:

1. $r_1\neq r_2$: dan is $y(x)=C_1x^{r1}+C_2x^{r_2}$.
2. $r_1=r_2=r$: dan is $y(x)=(C_1\ln(x)+C_2)x^r$.

4.2.3 De DV van Legendre

Gegeven de LDV

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+n(n-1)y(x)=0$$

De oplossingen van deze vergelijking worden gegeven door $y(x)=aP_n(x)+by_2(x)$ waarin de *Legendre polynomen* $P(x)$ gedefinieerd worden door:

$$P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{(1-x^2)^n}{2^nn!}\right)$$

Hiervoor geldt: $\|P_n\|^2=2/(2n+1)$.

4.2.4 De geassocieerde Legendre vergelijking

Deze vergelijking volgt uit het θ afhankelijke deel van de golfvergelijking $\nabla^2\Psi=0$ door te substitueren: $\xi=\cos(\theta)$. Dan volgt:

$$(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{dP(\xi)}{d\xi}\right)+[C(1-\xi^2)-m^2]P(\xi)=0$$

Er bestaan alleen reguliere oplossingen als $C=l(l+1)$. Deze hebben de vorm:

$$P_l^{|m|}(\xi)=(1-\xi^2)^{m/2}\frac{d^{|m|}P^0(\xi)}{d\xi^{|m|}}=\frac{(1-\xi^2)^{|m|/2}}{2^ll!}\frac{d^{|m|+l}}{d\xi^{|m|+l}}(\xi^2-1)^l$$

Voor $|m|>l$ is $P_l^{|m|}(\xi)=0$. Enkele eigenschappen van $P_l^0(\xi)$ zijn:

$$\int\limits_{-1}^{1}P_l^0(\xi)P_{l'}^0(\xi)d\xi=\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}\quad,\quad\sum_{l=0}^{\infty}P_l^0(\xi)t^l=\frac{1}{\sqrt{1-2\xi t+t^2}}$$

Dit polynoom is te schrijven als:

$$P_l^0(\xi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\cos(\theta))^ld\theta$$

4.2.5 Oplossingen van de Besselvergelijking

Gegeven de LDV

$$x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2}+x\frac{dy(x)}{dx}+(x^2-\nu^2)y(x)=0$$

ook wel de *Besselvergelijking* genoemd, en de Besselfuncties van de eerste soort

$$J_\nu(x)=x^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^mx^{2m}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}$$

voor $\nu := n \in I\!\!N$ wordt dit:

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!}$$

Als $\nu \neq Z\!\!\!Z$ is de oplossing gegeven door $y(x) = aJ_\nu(x) + bJ_{-\nu}(x)$. Maar omdat voor $n \in Z\!\!\!Z$ geldt: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, geldt dit niet voor gehele getallen. De algemene oplossing van de Besselvergelijking is $y(x) = aJ_\nu(x) + bY_\nu(x)$ waarin Y_ν *Besselfuncties van de tweede soort* zijn:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad \text{en} \quad Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x)$$

De vergelijking $x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + \nu^2)y(x) = 0$ heeft als oplossingen gemodificeerde Besselfuncties van de eerste soort $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$, en oplossingen $K_\nu = \pi[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]/[2\sin(\nu\pi)]$.

Soms is het handig de oplossingen van de Besselvergelijking te schrijven in termen van de Hankelfuncties

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \ , \ H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

4.2.6 Eigenschappen van Besselfuncties

Besselfuncties zijn orthogonaal wanneer $p(x) = x$ als normeringsfunctie gebruikt wordt.

$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. De Neumann functies $N_m(x)$ zijn gedefinieerd als:

$$N_m(x) = \frac{1}{2\pi} J_m(x)\ln(x) + \frac{1}{x^m} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{2n}$$

Er geldt: $\lim\limits_{x \to 0} J_m(x) = x^m$, $\lim\limits_{x \to 0} N_m(x) = x^{-m}$ voor $m \neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0} N_0(x) = \ln(x)$.

$$\lim_{r \to \infty} H(r) = \frac{\mathrm{e}^{\pm ikr} \mathrm{e}^{i\omega t}}{\sqrt{r}} \ , \ \lim_{x \to \infty} J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - x_n) \ , \ \lim_{x \to \infty} J_{-n}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - x_n)$$

met $x_n = \frac{1}{2}\pi(n + \frac{1}{2})$.

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \ , \ J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) = -2\frac{dJ_n(x)}{dx}$$

Verder gelden de integraalbetrekkingen

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(x\sin(\theta) - m\theta)]d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta) - m\theta)d\theta$$

4.2.7 Laguerre

Gegeven de LDV

$$x\frac{d^2y(x)}{dx^2} + (1 - x)\frac{dy(x)}{dx} + ny(x) = 0$$

Oplossingen hiervan zijn de Laguerre polynomen $L_n(x)$:

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n \mathrm{e}^{-x}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n}{m} x^m$$

4.2.8 De geassocieerde Laguerre vergelijking

Gegeven de LDV

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\left(\frac{m+1}{x}-1\right)\frac{dy(x)}{dx}+\left(\frac{n+\frac{1}{2}(m+1)}{x}\right)y(x)=0$$

Oplossingen hiervan zijn de geassocieerde Laguerre polynomen $L_n^m(x)$:

$$L_n^m(x)=\frac{(-1)^m n!}{(n-m)!}\mathrm{e}^{-x}x^{-m}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)$$

4.2.9 Hermite

De differentiaalvergelijkingen van Hermite zijn:

$$\frac{d^2\mathrm{H}_n(x)}{dx^2}-2x\frac{d\mathrm{H}_n(x)}{dx}+2n\mathrm{H}_n(x)=0 \text{ en } \frac{d^2\mathrm{He}_n(x)}{dx^2}-x\frac{d\mathrm{He}_n(x)}{dx}+n\mathrm{He}_n(x)=0$$

De oplossingen hiervan zijn de Hermite polynomen, die worden gegeven door:

$$\mathrm{H}_n(x)=(-1)^n\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{d^n(\exp(-\frac{1}{2}x^2))}{dx^n}=2^{n/2}\mathrm{He}_n(x\sqrt{2})$$

$$\mathrm{He}_n(x)=(-1)^n(\exp\left(x^2\right)\frac{d^n(\exp(-x^2))}{dx^n}=2^{-n/2}\mathrm{H}_n(x/\sqrt{2})$$

4.2.10 Chebyshev

De LDV

$$(1-x^2)\frac{d^2U_n(x)}{dx^2}-3x\frac{dU_n(x)}{dx}+n(n+2)U_n(x)=0$$

heeft oplossingen

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos(x)]}{\sqrt{1-x^2}}$$

De LDV

$$(1-x^2)\frac{d^2T_n(x)}{dx^2}-x\frac{dT_n(x)}{dx}+n^2T_n(x)=0$$

heeft oplossingen $T_n(x)=\cos(n\arccos(x))$.

4.2.11 Weber

De LDV $W_n''(x)+(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2)W_n(x)=0$ heeft oplossingen: $W_n(x)=\mathrm{He}_n(x)\exp(-\frac{1}{4}x^2)$.

4.3 Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

Enkele niet-lineaire differentiaalvergelijkingen en een oplossing zijn:

$$\begin{array}{ll}
y'=a\sqrt{y^2+b^2} & y=b\sinh(a(x-x_0)) \\
y'=a\sqrt{y^2-b^2} & y=b\cosh(a(x-x_0)) \\
y'=a\sqrt{b^2-y^2} & y=b\cos(a(x-x_0)) \\
y'=a(y^2+b^2) & y=b\tan(a(x-x_0)) \\
y'=a(y^2-b^2) & y=b\coth(a(x-x_0)) \\
y'=a(b^2-y^2) & y=b\tanh(a(x-x_0)) \\
y'=ay\left(\dfrac{b-y}{b}\right) & y=\dfrac{b}{1+Cb\exp(-ax)}
\end{array}$$

4.4 Sturm-Liouville vergelijkingen

Sturm-Liouville vergelijkingen zijn 2e orde LDV's van de vorm:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right)+q(x)y(x)=\lambda m(x)y(x)$$

De randvoorwaarden worden zodanig gekozen dat de operator

$$L=-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q(x)$$

Hermitisch is. Van de normeringsfunctie $m(x)$ wordt geëist dat

$$\int\limits_a^b m(x)y_i(x)y_j(x)dx=\delta_{ij}$$

Als $y_1(x)$ en $y_2(x)$ twee lineair onafhankelijke oplossingen zijn kan men de Wronskiaan in de volgende vorm schrijven:

$$W(y_1,y_2)=\left|\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{array}\right|=\frac{C}{p(x)}$$

met C een constante. Door overgang naar een andere afhankelijke variabele $u(x)$ die gegeven is door: $u(x)=y(x)\sqrt{p(x)}$ gaat de LDV over in de *normaalvorm*:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}+I(x)u(x)=0 \quad \text{met} \quad I(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{p''(x)}{p(x)}-\frac{q(x)-\lambda m(x)}{p(x)}$$

Als $I(x)>0$ is $y''/y<0$ en heeft de oplossing een oscillatoir gedrag, als $I(x)<0$ is $y''/y>0$ en heeft de oplossing een exponentieel gedrag.

4.5 Lineaire partiële differentiaalvergelijkingen

4.5.1 Algemeen

De *normale afgeleide* is gedefinieerd door:

$$\frac{\partial u}{\partial n}=(\vec{\nabla}u,\vec{n})$$

Een veel gebruikte oplossingsmethode voor PDV's is *scheiding van variabelen*: men neemt aan dat de oplossing $u(x,t)$ geschreven kan worden als $u(x,t)=X(x)T(t)$. Uit substitutie volgen dan gewone DV's voor $X(x)$ en $T(t)$.

4.5.2 Bijzondere gevallen

De golfvergelijking

De *golfvergelijking* in 1 dimensie is gegeven door

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

Als beginvoorwaarde geldt $u(x,0)=\varphi(x)$ en $\partial u(x,0)/\partial t=\Psi(x)$. Dan is de algemene oplossing gegeven door:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\Psi(\xi)d\xi$$

De diffusievergelijking

De *diffusievergelijking* is:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u$$

De oplossingen hiervan zijn uit te drukken met de propagatoren $P(x, x', t)$. Deze hebben de eigenschap dat $P(x, x', 0) = \delta(x - x')$. In 1 dimensie geldt:

$$P(x, x', t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(\frac{-(x - x')^2}{4Dt}\right)$$

In 3 dimensies geldt:

$$P(x, x', t) = \frac{1}{8(\pi D t)^{3/2}} \exp\left(\frac{-(\vec{x} - \vec{x}\,')^2}{4Dt}\right)$$

Met beginvoorwaarde $u(x, 0) = f(x)$ is de oplossing:

$$u(x, t) = \int\limits_{\mathcal{G}} f(x') P(x, x', t) dx'$$

De oplossing van de vergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x, t)$$

is gegeven door

$$u(x, t) = \int dt' \int dx' g(x', t') P(x, x', t - t')$$

De vergelijking van Helmholtz

De vergelijking van Helmholtz verkrijgt men door substitutie van $u(\vec{x}, t) = v(\vec{x}) \exp(i\omega t)$ in de golfvergelijking. Dit geeft voor v:

$$\nabla^2 v(\vec{x}, \omega) + k^2 v(\vec{x}, \omega) = 0$$

Dit geeft als oplossingen voor v:

1. In cartesische coördinaten: substitutie van $v = A \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}\,)$ geeft:

   $$v(\vec{x}\,) = \int \cdots \int A(k) \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} dk$$

   met de integralen over $\vec{k}\,^2 = k^2$.

2. In poolcoördinaten:

   $$v(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m J_m(kr) + B_m N_m(kr)) \mathrm{e}^{im\varphi}$$

3. In bolcoördinaten:

   $$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} [A_{lm} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) + B_{lm} J_{-l-\frac{1}{2}}(kr)] \frac{Y(\theta, \varphi)}{\sqrt{r}}$$

4.5.3 Potentiaaltheorie en de stelling van Green

Onderwerp van de potentiaaltheorie vormen de *Poisson vergelijking* $\nabla^2 u = -f(\vec{x}\,)$ met f een gegeven functie, en de *Laplace vergelijking* $\nabla^2 u = 0$. De oplossingen hiervan zijn vaak te interpreteren als een potentiaal. De oplossingen van de Laplace vergelijking worden *harmonische functies* genoemd.

Wanneer een vectorveld $\vec{v}$ gegeven is door $\vec{v} = \mathrm{grad}\varphi$ volgt:

$$\int\limits_a^b (\vec{v},\vec{t}\,)ds = \varphi(\vec{b}\,) - \varphi(\vec{a}\,)$$

In dit geval bestaan er functies φ en $\vec{w}$ zodanig dat $\vec{v} = \mathrm{grad}\varphi + \mathrm{rot}\vec{w}$.

De *veldlijnen* van het veld $\vec{v}(\vec{x})$ volgen uit:

$$\dot{\vec{x}}\,(t) = \lambda\vec{v}(\vec{x}\,)$$

De *eerste identiteit van Green* is:

$$\iiint\limits_{\mathcal{G}} [u\nabla^2 v + (\nabla u, \nabla v)]d^3V = \oiint\limits_{\mathcal{S}} u\frac{\partial v}{\partial n}d^2A$$

De *tweede identiteit van Green* is:

$$\iiint\limits_{\mathcal{G}} [u\nabla^2 v - v\nabla^2 u]d^3V = \oiint\limits_{\mathcal{S}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d^2A$$

Een harmonische functie die 0 is op de rand van een gebied is 0 binnen dat gebied. Een harmonische functie waarvan de normaalafgeleide 0 is op de rand van een gebied is constant binnen dat gebied.

Het *Dirichlet probleem* is:

$$\nabla^2 u(\vec{x}\,) = -f(\vec{x}\,)\ ,\ \ \vec{x} \in R\ ,\ \ u(\vec{x}\,) = g(\vec{x}\,)\ \text{ voor alle }\ \vec{x} \in S.$$

De oplossing hiervan is eenduidig.

Het *Neumann probleem* is:

$$\nabla^2 u(\vec{x}\,) = -f(\vec{x}\,)\ ,\ \ \vec{x} \in R\ ,\ \ \frac{\partial u(\vec{x}\,)}{\partial n} = h(\vec{x}\,)\ \text{ voor alle }\ \vec{x} \in S.$$

De oplossing van het Neumann probleem is eenduidig op een constante na. De oplossing bestaat als:

$$-\iiint\limits_R f(\vec{x}\,)d^3V = \oiint\limits_S h(\vec{x}\,)d^2A$$

Een *fundamentele oplossing* van de Laplace vergelijking voldoet aan:

$$\nabla^2 u(\vec{x}\,) = -\delta(\vec{x}\,)$$

De oplossing in 2 dimensies hiervan is in poolcoördinaten:

$$u(r) = \frac{\ln(r)}{2\pi}$$

De oplossing in 3 dimensies is in bolcoördinaten:

$$u(r) = \frac{1}{4\pi r}$$

De vergelijking $\nabla^2 v = -\delta(\vec{x} - \vec{\xi}\,)$ heeft als oplossing

$$v(\vec{x}\,) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{\xi}\,|}$$

Na substitutie hiervan in de 2e identiteit van Green en toepassing van de zeefeigenschap van de δ functie volgt de 3e identiteit van Green:

$$u(\vec{\xi}\,) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_R \frac{\nabla^2 u}{r} d^3V + \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_S \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d^2A$$

De *Greense functie* $G(\vec{x}, \vec{\xi}\,)$ is gedefinieerd door: $\nabla^2 G = -\delta(\vec{x} - \vec{\xi}\,)$, en op rand S is $G(\vec{x}, \vec{\xi}\,) = 0$. Dan is G te schrijven als:

$$G(\vec{x}, \vec{\xi}\,) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{\xi}\,|} + g(\vec{x}, \vec{\xi}\,)$$

Dan is $g(\vec{x}, \vec{\xi}\,)$ een oplossing van het Dirichlet probleem. De oplossing van de Poisson vergelijking $\nabla^2 u = -f(\vec{x}\,)$ als op rand S geldt: $u(\vec{x}\,) = g(\vec{x}\,)$, is dan:

$$u(\vec{\xi}\,) = \iiint\limits_R G(\vec{x}, \vec{\xi}\,) f(\vec{x}\,) d^3V - \oiint\limits_S g(\vec{x}\,)\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{\xi}\,)}{\partial n} d^2A$$

Hoofdstuk 5

Lineaire algebra en analyse

5.1 Vectorruimten

$\mathcal{G}$ is een groep voor de operatie $\otimes$ als:

1. $\forall a, b \in \mathcal{G} \Rightarrow a \otimes b \in \mathcal{G}$: een groep is *gesloten*.
2. $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$: een groep is *associatief*.
3. $\exists e \in \mathcal{G}$ zodanig dat $a \otimes e = e \otimes a = a$: er bestaat een *eenheidselement*.
4. $\forall a \in \mathcal{G} \exists \overline{a} \in \mathcal{G}$ zodanig dat $a \otimes \overline{a} = e$: elk element heeft een *inverse*.

Als
5. $a \otimes b = b \otimes a$

is de groep Abels of commutatief. Vectorruimten vormen een Abelse groep voor de optelling en vermenigvuldiging: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$, $(\lambda + \mu)(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{a} + \mu\vec{b}$.

W is een *lineaire deelruimte* als $\forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ geldt: $\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 \in W$.

W is een *invariante deelruimte* van V voor de afbeelding A als $\forall \vec{w} \in W$ geldt: $A\vec{w} \in W$.

5.2 Basis

Voor een orthogonale basis geldt: $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = c\delta_{ij}$. Voor een orthonormale basis geldt: $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$.

De set vectoren $\{\vec{a}_n\}$ is onafhankelijk als:

$$\sum_i \lambda_i \vec{a}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall_i \lambda_i = 0$$

De set $\{\vec{a}_n\}$ is een basis als ze 1. onafhankelijk zijn, en 2. $V =< \vec{a}_1, \vec{a_2}, ... >= \sum \lambda_i \vec{a}_i$.

5.3 Matrices

5.3.1 Basisbewerkingen

Voor de matrixvermenigvuldiging van matrices $A = a_{ij}$ en $B = b_{kl}$ geldt: met ^{r} de rijindex en ^{k} de kolomindex:

$$A^{r_1 k_1} \cdot B^{r_2 k_2} = C^{r_1 k_2} \quad , \quad (AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

met ^{r} het aantal rijen en ^{k} het aantal kolommen.

De *getransponeerde* van A is gedefinieerd door: $a_{ij}^T = a_{ji}$. Hiervoor geldt dat $(AB)^T = B^T A^T$, en $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Voor de *inverse matrix* geldt: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. De inverse matrix A^{-1} heeft de eigenschap dat $A \cdot A^{-1} = I\!I$ en kan gevonden worden door vegen: $(A_{ij} | I\!I) \sim (I\!I | A_{ij}^{-1})$.

De inverse van een 2×2 matrix is:

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array}\right)$$

De *determinant functie* $D = \det(A)$ is gedefinieerd door:

$$\det(A) = D(\vec{a}_{*1}, \vec{a}_{*2}, ..., \vec{a}_{*n})$$

Voor de determinant $\det(A)$ van een matrix A geldt: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. Een 2×2 matrix heeft als determinant:

$$\det\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) = ad - cb$$

De afgeleide van een matrix is een matrix met de afgeleiden van de coëfficiënten:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{da_{ij}}{dt} \quad \text{en} \quad \frac{dAB}{dt} = B\frac{dA}{dt} + A\frac{dB}{dt}$$

De afgeleide van de determinant is gegeven door:

$$\frac{d\det(A)}{dt} = D(\frac{d\vec{a}_1}{dt}, ..., \vec{a}_n) + D(\vec{a}_1, \frac{d\vec{a}_2}{dt}, ..., \vec{a}_n) + ... + D(\vec{a}_1, ..., \frac{d\vec{a}_n}{dt})$$

Wanneer men de rijen van een matrix als vectoren beschouwd is de *rijenrang* van deze matrix het aantal onafhankelijke vectoren in deze set. Idem voor de *kolommenrang*. Voor elke matrix is de rijenrang gelijk aan de kolommenrang.

Laat $\tilde{A} : \tilde{V} \to \tilde{V}$ de complexe uitbreiding zijn van de reële lineaire afbeelding $A : V \to V$ in een eindig dimensionale V. Dan hebben A en $\tilde{A}$ dezelfde karakteristieke vergelijking.

Als $A_{ij} \in I\!R$ en als $\vec{v}_1 + i\vec{v}_2$ een eigenvector van A is bij eigenwaarde $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, dan geldt:

1. $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 - \lambda_2\vec{v}_2$ en $A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_1 + \lambda_1\vec{v}_2$.
2. $\vec{v}^{\,*} = \vec{v}_1 - i\vec{v}_2$ een eigenwaarde bij $\lambda^* = \lambda_1 - i\lambda_2$.
3. Het lineaire opspansel $< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$ is een invariante deelruimte van A.

Als $\vec{k}_n$ de kolommen van A zijn is de beeldruimte van A gegeven door:

$$R(A) =< A\vec{e}_1, ..., A\vec{e}_n >=< \vec{k}_1, ..., \vec{k}_n >$$

Als de kolommen $\vec{k}_n$ van een $n \times m$ matrix A onafhankelijk zijn, dan is de nulruimte $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\,\}$.

5.3.2 Matrixvergelijkingen

We gaan uit van de vergelijking

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

met $\vec{b} \neq \vec{0}$. Als $\det(A) = 0$ is de enige oplossing hiervan $\vec{0}$. Als $\det(A) \neq 0$ is er precies één oplossing $\neq \vec{0}$.

De vergelijking

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

heeft precies één oplossing $\neq \vec{0}$ als $\det(A) = 0$, en als $\det(A) \neq 0$ is de oplossing $\vec{0}$.

De regel van Cramer voor de oplossingen van stelsels vergelijkingen luidt: als de vergelijking te schrijven is als

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \equiv \vec{a}_1 x_1 + ... + \vec{a}_n x_n = \vec{b}$$

dan is x_j gegeven door:

$$x_j = \frac{D(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, ..., \vec{a}_n)}{\det(A)}$$

5.4 Lineaire afbeeldingen

Een afbeelding A is lineair als geldt: $A(\lambda\vec{x}+\beta\vec{y}\,)=\lambda A\vec{x}+\beta A\vec{y}$.

Enkele lineaire afbeeldingen zijn:

Soort afbeelding	**Formule**
Projectie op de lijn $<\vec{a}>$	$P(\vec{x}\,)=(\vec{a},\vec{x}\,)\vec{a}/(\vec{a},\vec{a}\,)$
Projectie op het vlak $(\vec{a},\vec{x}\,)=0$	$Q(\vec{x}\,)=\vec{x}-P(\vec{x}\,)$
Spiegeling in de lijn $<\vec{a}>$	$S(\vec{x}\,)=2P(\vec{x}\,)-\vec{x}$
Spiegeling in het vlak $(\vec{a},\vec{x}\,)=0$	$T(\vec{x}\,)=2Q(\vec{x}\,)-\vec{x}=\vec{x}-2P(\vec{x}\,)$

Voor een projectie geldt: $\vec{x}-P_W(\vec{x}\,)\perp P_W(\vec{x}\,)$ en $P_W(\vec{x}\,)\in W$.

Als voor een afbeelding A geldt: $(A\vec{x},\vec{y}\,)=(\vec{x},A\vec{y}\,)=(A\vec{x},A\vec{y}\,)$ dan is A een projectie.

Zij $A:W\rightarrow W$ een lineaire afbeelding; we definiëren:

- Als S een deelverzameling van V is: $A(S):=\{A\vec{x}\in W|\vec{x}\in S\}$
- Als T een deelverzameling van W is: $A^{\leftarrow}(T):=\{\vec{x}\in V|A(\vec{x}\,)\in T\}$

Dan is $A(S)$ een lineaire deelruimte van W en de *inverse afbeelding* $A^{\leftarrow}(T)$ een lineaire deelruimte van V. Hieruit volgt dat $A(V)$ de *beeldruimte* van A is, notatie: $\mathcal{R}(A)$. $A^{\leftarrow}(\vec{0}\,)=E_0$ is een lineaire deelruimte in V, de *nulruimte* van A, notatie: $\mathcal{N}(A)$. Er geldt dat:

$$\dim(\mathcal{N}(A))+\dim(\mathcal{R}(A))=\dim(V)$$

5.5 Vlak en lijn

De vergelijking van een lijn door de punten $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is:

$$\vec{x}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a}\,)=\vec{a}+\lambda\vec{r}$$

De vergelijking van een vlak is:

$$\vec{x}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a}\,)+\mu(\vec{c}-\vec{a}\,)=\vec{a}+\lambda\vec{r}_1+\mu\vec{r}_2$$

Indien dit een vlak in $I\!R^3$ is, is de *normaal* op dit vlak gegeven door:

$$\vec{n}_V=\frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_2}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|}$$

Men kan een lijn ook voorstellen door de punten die voldoen aan de vergelijking lijn ℓ: $(\vec{a},\vec{x})+b=0$ en vlak V: $(\vec{a},\vec{x})+k=0$. De normaal op V is dan: $\vec{a}/|\vec{a}|$.

De afstand d tussen 2 punten $\vec{p}$ en $\vec{q}$ is gegeven door $d(\vec{p},\vec{q}\,)=\|\vec{p}-\vec{q}\,\|$.

In $I\!R^2$ geldt: De afstand van een punt $\vec{p}$ tot de lijn $(\vec{a},\vec{x}\,)+b=0$ is:

$$d(\vec{p},\ell)=\frac{|(\vec{a},\vec{p}\,)+b|}{|\vec{a}|}$$

Analoog in $I\!R^3$: De afstand van een punt $\vec{p}$ tot het vlak $(\vec{a},\vec{x}\,)+k=0$ is:

$$d(\vec{p},V)=\frac{|(\vec{a},\vec{p}\,)+k|}{|\vec{a}|}$$

Dit is te veralgemeniseren voor $I\!R^n$ en $\mathbb{C}^n$ (stelling van Hesse).

5.6 Coördinatentransformaties

De lineaire afbeelding A van $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ is gegeven door ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$):

$$\vec{y} = A^{m \times n}\vec{x}$$

waarin een kolom van A het beeld is van een basisvector in het origineel.

De matrix A_α^β voert een vector die gegeven is t.o.v. basis α over in een vector t.o.v. basis β. Ze is gegeven door:

$$A_\alpha^\beta = (\beta(A\vec{a}_1), ..., \beta(A\vec{a}_n))$$

waarin $\beta(\vec{x}\,)$ de representatie van de vector $\vec{x}$ t.o.v. basis β is.

De *overgangsmatrix* S_α^β voert vectoren van stelsel α naar coördinatenstelsel β over:

$$S_\alpha^\beta := I\!I_\alpha^\beta = (\beta(\vec{a}_1), ..., \beta(\vec{a}_n))$$

Er geldt: $S_\alpha^\beta \cdot S_\beta^\alpha = I\!I$

De matrix van een afbeelding A is dan gegeven door:

$$A_\alpha^\beta = \left(A_\alpha^\beta \vec{e}_1, ..., A_\alpha^\beta \vec{e}_n\right)$$

Voor de transformatie van matrixoperatoren naar een ander coördinatenstelsel geldt: $A_\alpha^\delta = S_\lambda^\delta A_\beta^\lambda S_\alpha^\beta$, $A_\alpha^\alpha = S_\beta^\alpha A_\beta^\beta S_\alpha^\beta$ en $(AB)_\alpha^\lambda = A_\beta^\lambda B_\alpha^\beta$.

Verder is $A_\alpha^\beta = S_\alpha^\beta A_\alpha^\alpha$, $A_\beta^\alpha = A_\alpha^\alpha S_\beta^\alpha$. Een vector wordt getransformeerd via $X_\alpha = S_\alpha^\beta X_\beta$.

5.7 Eigenwaarden

De *eigenwaarde vergelijking*

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

met *eigenwaarden* λ is op te lossen met $(A - \lambda I\!I) = \vec{0} \Rightarrow \det(A - \lambda I\!I) = 0$. Uit deze karakteristieke vergelijking volgen de eigenwaarden. Er geldt dat $\det(A) = \prod\limits_i \lambda_i$ en $\mathrm{Tr}(A) = \sum\limits_i a_{ii} = \sum\limits_i \lambda_i$.

De eigenwaarden λ_i zijn basisonafhankelijk. Indien S de overgangsmatrix is naar een basis van eigenvectoren: $S = (E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_n})$, is de matrix van A in deze basis gegeven door:

$$\Lambda = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

Als 0 een eigenwaarde is van A dan is $E_0(A) = \mathcal{N}(A)$.

Als λ een eigenwaarde is van A geldt: $A^n\vec{x} = \lambda^n\vec{x}$.

5.8 Soorten afbeeldingen

Isometrische afbeeldingen

Een afbeelding is een *isometrie* als geldt: $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$. Hieruit volgt dat de eigenwaarden van een isometrie gegeven zijn door $\lambda = \exp(i\varphi) \Rightarrow |\lambda| = 1$. Tevens geldt dan: $(A\vec{x}, A\vec{y}\,) = (\vec{x}, \vec{y}\,)$.

Als W een invariante deelruimte van de isometrie A is met $\dim(A) < \infty$ dan is ook $W^\perp$ een invariante deelruimte.

Orthogonale afbeeldingen

Een afbeelding A is *orthogonaal* als A een isometrie is *en* de inverse $A^{\leftarrow}$ bestaat. Voor een orthogonale afbeelding O geldt $O^TO = I\!I$, dus geldt: $O^T = O^{-1}$. Als A en B orthogonaal zijn, dan is AB en A^{-1} ook orthogonaal.

Laat $A : V \to V$ orthogonaal zijn met dim$(V) < \infty$. Dan is A:

Direct orthogonaal als $\det(A) = +1$. A stelt een rotatie voor. In $I\!R^2$ wordt een rotatie om hoek φ gegeven door:

$$R = \left(\begin{array}{cc} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{array}\right)$$

De rotatiehoek φ is dus bepaald door Tr$(A) = 2\cos(\varphi)$ met $0 \leq \varphi \leq \pi$. Laat λ_1 en λ_2 de wortels van de karakteristieke vergelijking zijn, dan geldt tevens: $\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) = \cos(\varphi)$, en $\lambda_1 = \exp(i\varphi)$, $\lambda_2 = \exp(-i\varphi)$.

In $I\!R^3$ geldt: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3^* = \exp(i\varphi)$. Een rotatie om E_{λ_1} is gegeven door de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{array}\right)$$

Gespiegeld orthogonaal als $\det(A) = -1$. Vectoren uit E_{-1} worden door A gespiegeld t.o.v. de invariante deelruimte $E_{-1}^{\perp}$. In $I\!R^2$ wordt een spiegeling in $< (\cos(\frac{1}{2}\varphi), \sin(\frac{1}{2}\varphi)) >$ gegeven door:

$$S = \left(\begin{array}{cc} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{array}\right)$$

In $I\!R^3$ zijn gespiegeld orthogonale afbeeldingen draaispiegelingen: dit is een rotatie om as $< \vec{a}_1 >$ om hoek φ en spiegelvlak $< \vec{a}_1 >^{\perp}$. De matrix van deze afbeelding is gegeven door:

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{array}\right)$$

In $I\!R^3$ geldt voor alle orthogonale afbeeldingen O dat $O(\vec{x}\,) \times O(\vec{y}\,) = O(\vec{x} \times \vec{y}\,)$.

$I\!R^n$ $(n < \infty)$ kan men voor een orthogonale afbeelding ontbinden in onderling loodrechte invariante deelruimten met dimensie 1 of 2.

Unitaire afbeeldingen

Laat V een complexe inproductruimte zijn, dan is een lineaire afbeelding U *unitair* als U een isometrie is *en* de inverse afbeelding $A^{\leftarrow}$ bestaat. Een $n \times n$ matrix heet unitair als $U^HU = I\!I$. Er geldt dat $|\det(U)| = 1$. Elke isometrie in een eindig dimensionale complexe vectorruimte is unitair.

Stelling: voor een $n \times n$ matrix A zijn de volgende uitspraken equivalent:

1. A is unitair,
2. De kolommen van A vormen een orthonormaal stelsel,
3. De rijen van A vormen een orthonormaal stelsel.

Symmetrische afbeeldingen

Een afbeelding A op $I\!R^n$ is *symmetrisch* als $(A\vec{x}, \vec{y}\,) = (\vec{x}, A\vec{y}\,)$. Een matrix $A \in I\!M^{n\times n}$ is symmetrisch als $A = A^T$. Een lineaire operator is slechts symmetrisch als zijn matrix t.o.v. een willekeurige orthogonale basis symmetrisch is. Voor een symmetrische afbeelding zijn alle eigenwaarden $\in I\!R$. De eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden zijn onderling loodrecht. Als A symmetrisch is, dan is $A^T = A = A^H$ op een orthogonale basis.

Voor iedere matrix $B \in I\!M^{m\times n}$ is B^TB symmetrisch.

Hermitische afbeeldingen

Een afbeelding $H : V \to V$ met $V = \mathbb{C}^n$ is *Hermitisch* als $(H\vec{x}, \vec{y}\,) = (\vec{x}, H\vec{y}\,)$. De *Hermitisch geconjugeerde* afbeelding A^H van A is: $[a_{ij}]^H = [a^*_{ji}]$. Dit wordt ook wel genoteerd als volgt: $A^H = A^\dagger$. Het inproduct van twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ is nu als volgt te schrijven: $(\vec{x}, \vec{y}\,) = \vec{x}^H\vec{y}$.

Als de afbeeldingen A en B Hermitisch zijn is hun product AB Hermitisch als: $[A, B] = AB - BA = 0$. $[A, B]$ heet de *commutator* van A en B.

De eigenwaarden van een Hermitische afbeelding zijn $\in \mathbb{R}$.

Aan een Hermitische operator L is een matrixrepresentatie te koppelen. Ten opzichte van een basis $\vec{e}_i$ is deze gegeven door $L_{mn} = (\vec{e}_m, L\vec{e}_n)$.

Normale afbeeldingen

In een complexe vectorruimte V bestaat er bij iedere lineaire afbeelding A precies één lineaire afbeelding B zodanig dat $(A\vec{x}, \vec{y}\,) = (\vec{x}, B\vec{y}\,)$. Deze B heet de *geadjungeerde afbeelding* van A. Notatie: $B = A^*$. Er geldt: $(CD)^* = D^*C^*$. Als A een unitaire afbeelding is, dan is $A^* = A^{-1}$, als A Hermitisch is dan is $A^* = A$.

Definitie: in een complexe vectorruimte V is de lineaire afbeelding A *normaal* als $A^*A = AA^*$. Dit is slechts het geval als voor de matrix van S t.o.v. een orthonormale basis geldt: $A^\dagger A = AA^\dagger$.

Als A normaal is, dan geldt:

1. Voor alle vectoren $\vec{x} \in V$ en een normale afbeelding A geldt:

$$(A\vec{x}, A\vec{y}\,) = (A^*A\vec{x}, \vec{y}\,) = (AA^*\vec{x}, \vec{y}\,) = (A^*\vec{x}, A^*\vec{y}\,)$$

2. $\vec{x}$ is een eigenvector van A dan en slechts dan als $\vec{x}$ een eigenvector van A^* is.
3. Eigenvectoren van A die bij verschillende eigenwaarden horen staan onderling loodrecht.
4. Als E_λ een eigenruimte is van A dan is het orthoplement $E_\lambda^\perp$ een invariante deelruimte van A.

Stel β_i zijn de verschillende wortels van de karakteristieke vergelijking van A met multipliciteiten n_i. Dan is de dimensie van elke eigenruimte V_i gelijk aan n_i. Deze eigenruimten staan onderling loodrecht en iedere vector $\vec{x} \in V$ kan op precies één manier geschreven worden als

$$\vec{x} = \sum_i \vec{x}_i \quad \text{met} \quad \vec{x}_i \in V_i$$

Men kan ook schrijven: $\vec{x}_i = P_i\vec{x}$ met P_i een projectie op V_i. Dit leidt tot de *spectraalstelling*: laat A een normale afbeelding in een complexe vectorruimte V zijn met $\dim(V) = n$. Dan geldt:

1. Er bestaan projectieafbeeldingen P_i, $1 \leq i \leq p$, met de eigenschappen:
   - $P_i \cdot P_j = 0$ voor $i \neq j$,
   - $P_1 + ... + P_p = \mathbb{I}$,
   - $\dim P_1(V) + ... + \dim P_p(V) = n$

   en complexe getallen $\alpha_1, ..., \alpha_p$ zodanig dat $A = \alpha_1 P_1 + ... + \alpha_p P_p$.
2. Als A unitair is dan geldt $|\alpha_i| = 1\ \forall i$.
3. Als A Hermitisch is dan is $\alpha_i \in \mathbb{R}\ \forall i$.

Volledige stelsels commuterende Hermitische afbeeldingen

Beschouw m Hermitische lineaire afbeeldingen A_i in een n dimensionale complexe inproductruimte V. Stel deze commuteren onderling.

Lemma: als E_λ de eigenruimte bij eigenwaarde λ is van A_1, dan is E_λ een invariante deelruimte van alle afbeeldingen A_i. D.w.z. als $\vec{x} \in E_\lambda$, dan $A_i\vec{x} \in E_\lambda$.

Stelling. Beschouw m commuterende Hermitische matrices A_i. Dan bestaat er een unitaire matrix U zodanig dat alle matrices $U^\dagger A_i U$ diagonaal zijn. De kolommen van U zijn de gemeenschappelijke eigenvectoren van alle matrices A_j.

Als van een Hermitische lineaire afbeelding in een n dimensionale complexe vectorruimte alle n eigenwaarden van elkaar verschillen dan ligt een genormeerde eigenvector op een fasefactor $\exp(i\alpha)$ na vast.

Definitie: een commuterend stelsel Hermitische afbeeldingen heet *volledig* als bij elk tweetal gemeenschappelijke eigenvectoren $\vec{v}_i, \vec{v}_j$ er tenminste een afbeelding A_k is zo dat $\vec{v}_i$ en $\vec{v}_j$ eigenvectoren met verschillende eigenwaarden van A_k zijn.

Meestal wordt een commuterend stelsel zo klein mogelijk genomen. In de quantummechanica spreekt men ook van commuterende observabelen. Het aantal dat nodig is is gelijk aan het aantal quantumgetallen die nodig zijn om een toestand te karakteriseren.

5.9 Homogene coördinaten

Wanneer men zowel rotaties als translaties in één matrixafbeelding wil verwerken worden homogene coördinaten gebruikt. Hierbij wordt een extra coördinaat ingevoerd om de niet-lineariteiten te beschrijven. Homogene coördinaten worden uit cartesische verkregen door:

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)_{\rm cart} = \left(\begin{array}{c} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{array}\right)_{\rm hom} = \left(\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \\ w \end{array}\right)_{\rm hom}$$

dus $x = X/w$, $y = Y/w$ en $z = Z/w$. Afbeeldingen in homogene coördinaten worden beschreven door de volgende matrices:

1. Translatie over de vector (X_0, Y_0, Z_0, w_0):

$$T = \left(\begin{array}{cccc} w_0 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & w_0 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & w_0 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & w_0 \end{array}\right)$$

2. Rotaties om de x, y, z assen over hoeken resp. α, β, γ:

$$R_x(\alpha) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_y(\beta) = \left(\begin{array}{cccc} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_z(\gamma) = \left(\begin{array}{cccc} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Een perspectivistische projectie op beeldvlak $z = c$ met het projectiecentrum in de oorsprong. Deze afbeelding is niet omkeerbaar.

$$P(z=c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c & 0 \end{pmatrix}$$

5.10 Inproductruimten

Op complexe vectorruimten wordt een complex inproduct als volgt gedefinieerd:

1. $(\vec{a}, \vec{b}\,) = \overline{(\vec{b}, \vec{a}\,)}$,
2. $(\vec{a}, \beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2) = \beta_1(\vec{a}, \vec{b}_1) + \beta_2(\vec{a}, \vec{b}_2)$ voor alle $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2 \in V$ en $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$.
3. $(\vec{a}, \vec{a}\,) \geq 0$ voor alle $\vec{a} \in V$, $(\vec{a}, \vec{a}\,) = 0$ dan en slechts dan als $\vec{a} = \vec{0}$.

Wegens (1) is $(\vec{a}, \vec{a}\,) \in \mathbb{R}$. De *inproductruimte* $\mathbb{C}^n$ is de complexe vectorruimte waarop een complex inproduct gedefinieerd is door:

$$(\vec{a}, \vec{b}\,) = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$$

Voor functieruimten geldt:

$$(f, g) = \int_a^b f^*(t)g(t)dt$$

Voor iedere $\vec{a}$ is de lengte $\|\vec{a}\,\|$ gedefinieerd door: $\|\vec{a}\,\| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a}\,)}$. Er geldt: $\|\vec{a}\,\| - \|\vec{b}\,\| \leq \|\vec{a} + \vec{b}\,\| \leq \|\vec{a}\,\| + \|\vec{b}\,\|$, en met φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt: $(\vec{a}, \vec{b}\,) = \|\vec{a}\,\| \cdot \|\vec{b}\,\| \cos(\varphi)$.

Laat $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ een stelsel vectoren zijn in een inproductruimte V. Dan is de *Grammatrix G* van dit stelsel: $G_{ij} = (\vec{a}_i, \vec{a}_j)$. Het stelsel vectoren is onafhankelijk dan en slechts dan als $\det(G) = 0$.

Een stelsel is *orthonormaal* als $(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \delta_{ij}$. Als $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...$ een orthonormale rij is in een oneindig dimensionale vectorruimte geldt de ongelijkheid van Bessel:

$$\|\vec{x}\,\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |(\vec{e}_i, \vec{x}\,)|^2$$

Het gelijkteken geldt dan en slechts dan als $\lim\limits_{n\to\infty} \|\vec{x}_n - \vec{x}\,\| = 0$.

De inproductruimte ℓ^2 is gedefinieerd in $\mathbb{C}^\infty$ door:

$$\ell^2 = \left\{ \vec{a} = (a_1, a_2, ...) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

Als een ruimte ℓ^2 is en tevens voldoet aan: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$, dan is het een *Hilbertruimte*.

5.11 De Laplace transformatie

De klasse LT bestaat uit functies die voldoen aan:

1. Op ieder interval $[0, A]$, $A > 0$ zijn niet meer dan eindig veel discontinuïteiten en in iedere discontinuïteit bestaan de boven- en onder limiet,
2. $\exists t_0 \in [0, \infty >$ en een $a, M \in \mathbb{R}$ z.d.d. voor $t \geq t_0$ geldt: $|f(t)| \exp(-at) < M$.

Dan bestaat voor f de Laplace getransformeerde.

De Laplace transformatie is een generalisatie van de Fouriertransformatie. Indien $s \in \mathbb{C}$ en $t \geq 0$ is de Laplace getransformeerde $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ van een functie $f(t)$ gegeven door:

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}dt$$

De Laplace getransformeerde van een afgeleide functie is gegeven door:

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = -f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - ... - s^{n-1}f(0) + s^nF(s)$$

De operator $\mathcal{L}$ heeft de volgende eigenschappen:

1. Gelijkvormigheid: Als $a > 0$ dan
$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$
2. Demping: $\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-at}f(t)\right) = F(s+a)$
3. Verschuiving: Zij $a > 0$ en g gedefinieerd door $g(t) = f(t-a)$ als $t > a$ en $g(t) = 0$ voor $t \leq a$ dan geldt: $\mathcal{L}(g(t)) = \mathrm{e}^{-sa}\mathcal{L}(f(t))$.

Als $s \in I\!R$ geldt dat $\Re(\lambda f) = \mathcal{L}(\Re(f))$ en $\Im(\lambda f) = \mathcal{L}(\Im(f))$.

Voor enkele veel voorkomende functies geldt:

$f(t) =$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) =$
$\frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{at}$	$(s-a)^{-n-1}$
$\mathrm{e}^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\mathrm{e}^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	$\exp(-as)$

5.12 De convolutie

De convolutie integraal is gedefinieerd door:

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(u)g(t-u)du$$

De convolutie heeft de volgende eigenschappen:

1. $f * g \in$LT
2. $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$
3. Distributie: $f * (g + h) = f * g + f * h$
4. Commutatie: $f * g = g * f$
5. Homogeniteit: $f * (\lambda g) = \lambda f * g$

Als $\mathcal{L}(f) = F_1 \cdot F_2$, dan is $f(t) = f_1 * f_2$.

5.13 Stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen

We gaan uit van de vergelijking $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Stel $\vec{x} = \vec{v}\exp(\lambda t)$, dan volgt: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. In het 2×2 geval geldt:

1. $\lambda_1 = \lambda_2$: dan is $\vec{x}(t) = \sum \vec{v}_i \exp(\lambda_i t)$.
2. $\lambda_1 \neq \lambda_2$: dan is $\vec{x}(t) = (\vec{u}t + \vec{v})\exp(\lambda t)$.

Stel dat $\lambda = \alpha + i\beta$ een eigenwaarde is bij eigenvector $\vec{v}$, dan is λ^* ook een eigenwaarde bij eigenvector $\vec{v}^{\,*}$. Ontbind $\vec{v} = \vec{u} + i\vec{w}$, dan zijn de reële oplossingen

$$c_1[\vec{u}\cos(\beta t) - \vec{w}\sin(\beta t)]\mathrm{e}^{\alpha t} + c_2[\vec{v}\cos(\beta t) + \vec{u}\sin(\beta t)]\mathrm{e}^{\alpha t}$$

Voor de vergelijking $\ddot{\vec{x}} = A\vec{x}$ zijn twee oplossingsstrategieën:

1. Stel $\vec{x} = \vec{v}\exp(\lambda t) \Rightarrow \det(A - \lambda^2 I\!I) = 0$.
2. Voer in: $\dot{x} = u$ en $\dot{y} = v$, dat geeft $\ddot{x} = \dot{u}$ en $\ddot{y} = \dot{v}$. Zo wordt een n-dimensionaal stelsel van tweede orde omgezet in een $2n$-dimensionaal stelsel van de eerste orde.

5.14 Kwadrieken

5.14.1 Kwadrieken in $I\!R^2$

De algemene vergelijking voor een kwadriek is: $\vec{x}^T A\vec{x} + 2\vec{x}^T P + S = 0$. Hierin is A een symmetrische matrix. Als $\Lambda = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ geldt: $\vec{u}^T\Lambda\vec{u} + 2\vec{u}^T P + S = 0$, zodat alle kruistermen 0 zijn. Om dezelfde oriëntatie te behouden als het stelsel (x, y, z) heeft moet men $\vec{u} = (u, v, w)$ zodanig kiezen dat det$(S) = +1$.

Uitgaande van de vergelijking

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

geldt dat $|A| = ac - b^2$. Een ellips heeft $|A| > 0$, een parabool $|A| = 0$ en een hyperbool $|A| < 0$. In poolcoördinaten is dit te schrijven als:

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos(\theta)}$$

Een ellips heeft $e < 1$, een parabool $e = 1$ en een hyperbool $e > 1$.

5.14.2 Tweedegraads oppervlakken in $I\!R^3$

Rang 3:

$$p\frac{x^2}{a^2} + q\frac{y^2}{b^2} + r\frac{z^2}{c^2} = d$$

- Ellipsoïde: $p = q = r = d = 1$, a, b, c zijn de lengtes van de halve assen.
- Eenbladige hyperboloïde: $p = q = d = 1$, $r = -1$.
- Tweebladige hyperboloïde: $r = d = 1$, $p = q = -1$.
- Kegel: $p = q = 1$, $r = -1$, $d = 0$.

Rang 2:

$$p\frac{x^2}{a^2} + q\frac{y^2}{b^2} + r\frac{z}{c^2} = d$$

- Elliptische paraboloïde: $p = q = 1$, $r = -1$, $d = 0$.
- Hyperbolische paraboloïde: $p = r = -1$, $q = 1$, $d = 0$.
- Elliptische cylinder: $p = q = -1$, $r = d = 0$.

- Hyperbolische cylinder: $p = d = 1$, $q = -1$, $r = 0$.
- Vlakkenpaar: $p = 1$, $q = -1$, $d = 0$.

Rang 1:

$$py^2 + qx = d$$

- Parabolische cylinder: $p, q > 0$.
- Evenwijdig vlakkenpaar: $d > 0$, $q = 0$, $p \neq 0$.
- Dubbelvlak: $p \neq 0$, $q = d = 0$.

Hoofdstuk 6

Complexe functietheorie

6.1 Functies van complexe variabelen

Complexe functietheorie beschouwt complexe functies van een complexe variabele. Enkele definities:

f is *analytisch* op $\mathcal{G}$ als f continu en differentieerbaar is op $\mathcal{G}$.

Een *Jordankromme* is een kromme die gesloten en enkelvoudig is.

Als K een boog is in $\mathbb{C}$ met parametervoorstelling $z = \phi(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, dan is de lengte L van K gelijk aan:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int\limits_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt = \int\limits_a^b |\phi'(t)| dt$$

De afgeleide van f in het punt $z = a$ is:

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Als $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ is de afgeleide:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Gelijkstellen van beide uitkomsten levert de vergelijkingen van Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Deze vergelijkingen impliceren dat dan $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$. f is analytisch als u en v voldoen aan deze vergelijkingen.

6.2 Integratie

6.2.1 Hoofdstelling

Zij K een boog beschreven door $z = \phi(t)$ op $a \leq t \leq b$ en $f(z)$ is continu op K. Dan is de integraal van f over K:

$$\int\limits_K f(z)dz = \int\limits_a^b f(\phi(t))\dot{\phi}(t)dt \stackrel{f \text{ continu}}{=} F(b) - F(a)$$

Lemma: zij K de cirkel met middelpunt a en straal r, in positieve richting doorlopen. Dan geldt voor gehele m:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_K \frac{dz}{(z-a)^m} = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad m \neq 1 \\ 1 & \text{als} \quad m = 1 \end{cases}$$

Stelling: als L de lengte van kromme K is, en zij $|f(z)| \leq M$ voor $z \in K$, dan geldt als de integraal bestaat

$$\left|\int\limits_K f(z)dz\right| \leq ML$$

Stelling: zij f continu op een gebied G en p een vast punt van G. Laat $F(z) = \int_p^z f(\xi)d\xi$ voor alle $z \in G$ alleen afhangen van z en niet van de integratieweg. Dan is $F(z)$ analytisch in G met $F'(z) = f(z)$.

Dit leidt tot de twee equivalente formuleringen van de *hoofdstelling der complexe integratie*: zij de functie f analytisch in een gebied G. Laat K en K' twee krommen zijn met dezelfde begin- en eindpunten, die door continue vervorming binnen G in elkaar zijn over te voeren. Laat B een Jordankromme zijn. Dan geldt

$$\int\limits_K f(z)dz = \int\limits_{K'} f(z)dz \Leftrightarrow \oint\limits_B f(z)dz = 0$$

Door de hoofdstelling toe te passen op e^{iz}/z kan men afleiden dat

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

6.2.2 Residu

Een punt $a \in \mathbb{C}$ is een *regulier punt* van een functie $f(z)$ als f analytisch is in a. Anders is a een *singulier punt* van $f(z)$. Het *residu* van f in a wordt gedefinieerd door

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_K f(z)dz$$

waarin K een Jordankromme is die a in positieve richting omsluit. In reguliere punten is het residu 0, in singuliere punten kan het zowel 0 als $\neq 0$ zijn. De residustelling van Cauchy luidt: zij f analytisch binnen en op een Jordankromme K met uitzondering van een eindig aantal singuliere punten a_i binnen K. Dan geldt als K in positieve richting doorlopen wordt:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_K f(z)dz = \sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

Lemma: zij de functie f analytisch in a, dan geldt:

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{f(z)}{z-a} = f(a)$$

Dit leidt tot de integraalstelling van Cauchy: als f analytisch is op de in positieve richting doorlopen Jordankromme K, dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_K \frac{f(z)}{z-a}dz = \left\{\begin{array}{l} f(a) \text{ als } a \text{ binnen } K \\ 0 \text{ als } a \text{ buiten } K \end{array}\right.$$

Stelling: zij K een kromme (hoeft niet gesloten te zijn) en zij $\phi(\xi)$ continu op K. Dan is de functie

$$f(z) = \int\limits_K \frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

analytisch met n-de afgeleide

$$f^{(n)}(z) = n!\int\limits_K \frac{\phi(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{(n+1)}}$$

Stelling: zij K een kromme en G een gebied. Zij $\phi(\xi, z)$ gedefinieerd voor $\xi \in K$, $z \in G$, met de volgende eigenschappen:

1. $\phi(\xi, z)$ is begrensd, d.w.z. $|\phi(\xi, z)| \leq M$ voor $\xi \in K$, $z \in G$,
2. Voor vaste $\xi \in K$ is $\phi(\xi, z)$ een analytische functie van z in G,

3. Voor vaste $z \in G$ zijn $\phi(\xi, z)$ en $\partial\phi(\xi, z)/\partial z$ continue functies van ξ op K.

Dan is de functie

$$f(z) = \int_K \phi(\xi, z) d\xi$$

analytisch met afgeleide

$$f'(z) = \int_K \frac{\partial\phi(\xi, z)}{\partial z} d\xi$$

Ongelijkheid van Cauchy: zij de functie $f(z)$ analytisch binnen en op de cirkel $C : |z-a| = R$, en zij $|f(z)| \leq M$ voor $z \in C$. Dan geldt

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{Mn!}{R^n}$$

6.3 Analytische functies gedefinieerd door reeksen

De reeks $\sum f_n(z)$ heet puntsgewijs convergent op een gebied G met som $F(z)$ als

$$\forall_{\varepsilon>0} \forall_{z\in G} \exists_{N_0 \in \mathbb{R}} \forall_{n>n_0} \left[\left| f(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z) \right| < \varepsilon \right]$$

De reeks heet *uniform convergent* als

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_0 \in \mathbb{R}} \forall_{n>n_0} \exists_{z\in G} \left[\left| f(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z) \right| < \varepsilon \right]$$

Uniforme convergentie impliceert puntsgewijze convergentie, omgekeerd hoeft dat niet zo te zijn.

Stelling: laat de machtreeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de convergentiestraal R hebben. R is de afstand tot de eerste niet-opheffbare singulariteit.

- Als $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ bestaat, dan is $R = 1/L$.
- Als $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = L$ bestaat, dan is $R = 1/L$.

Als geen van beide limieten bestaat is R te bepalen met de formule van Cauchy-Hadamard:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$$

6.4 Laurent reeksen

Stelling van Taylor: zij f analytisch in een gebied G en laat punt $a \in G$ afstand r tot de rand van G hebben. Dan is $f(z)$ te ontwikkelen in de Taylorreeks rond a:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{met} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

geldig voor $|z-a| < r$. De convergentiestraal van de Taylorreeks is $\geq r$. Indien f een k-voudig nulpunt heeft in a is $c_1, ..., c_{k-1} = 0$, $c_k \neq 0$.

Stelling van Laurent: zij f analytisch in het ringgebied $G : r < |z-a| < R$. Dan is $f(z)$ te ontwikkelen in een Laurentreeks met middelpunt a:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{met} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(w)dw}{(w-a)^{n+1}} \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

geldig voor $r < |z-a| < R$ en K een willekeurige Jordankromme in G die het punt a in positieve richting omsluit.

Het *hoofddeel* van een Laurentreeks is: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$. Hiermee zijn singuliere punten te classificeren. Er zijn 3 gevallen:

1. Het hoofddeel ontbreekt. Dan is a een ophefbare singulariteit. Definieer $f(a) = c_0$ en de reeksontwikkeling geldt ook voor $|z-a| < R$ en f is analytisch in a.
2. Het hoofddeel bevat eindig veel termen. Dan bestaat er een $k \in I\!N$ z.d.d. $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z) = c_{-k} \neq 0$. De functie $g(z) = (z-a)^k f(z)$ heeft dan een ophefbare singulariteit in a. Men zegt dat f een k-voudige pool heeft in $z = a$.
3. Het hoofddeel bevat oneindig veel termen. Dan is a een essentieel singulier punt van f, bv. $\exp(1/z)$ voor $z = 0$.

Als f en g analytisch zijn, $f(a) \neq 0$, $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$ dan heeft $f(z)/g(z)$ een enkelvoudige pool in $z = a$ met

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

6.5 De stelling van Jordan

Residuen worden vaak gebruikt bij het berekenen van bepaalde integralen. Met de notaties $C_\rho^+ = \{z||z| = \rho, \Im(z) \geq 0\}$ en $C_\rho^- = \{z||z| = \rho, \Im(z) \leq 0\}$ en $M^+(\rho, f) = \max\limits_{z\in C_\rho^+} |f(z)|$, $M^-(\rho, f) = \max\limits_{z\in C_\rho^-} |f(z)|$. We nemen aan dat $f(z)$ analytisch is voor $\Im(z) > 0$ met eventuele uitzondering van een eindig aantal singuliere punten die niet op de reële as liggen, $\lim\limits_{\rho\to\infty} \rho M^+(\rho, f) = 0$ en de integraal bestaat, dan is

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \text{Res} f(z) \quad \text{in} \quad \Im(z) > 0$$

Vervang M^+ door M^- in bovenstaande eisen en er volgt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum \text{Res} f(z) \quad \text{in} \quad \Im(z) < 0$$

Het *Lemma van Jordan*: zij f continu voor $|z| \geq R$, $\Im(z) \geq 0$ en $\lim\limits_{\rho\to\infty} M^+(\rho, f) = 0$. Dan geldt voor $\alpha > 0$

$$\lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{C_\rho^+} f(z) \mathrm{e}^{i\alpha z} dz = 0$$

Zij f continu voor $|z| \geq R$, $\Im(z) \leq 0$ en $\lim\limits_{\rho\to\infty} M^-(\rho, f) = 0$. Dan geldt voor $\alpha < 0$

$$\lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{C_\rho^-} f(z) \mathrm{e}^{i\alpha z} dz = 0$$

Laat $z = a$ een enkelvoudige pool zijn van $f(z)$ en zij C_δ de halve cirkel $|z-a| = \delta, 0 \leq \arg(z-a) \leq \pi$, doorlopen van $a + \delta$ naar $a - \delta$. Dan is

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\delta} f(z)dz = \tfrac{1}{2} \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

Hoofdstuk 7

Tensorrekening

7.1 Vectoren en covectoren

We noteren een eindig dimensionale vectorruimte met $\mathcal{V}, \mathcal{W}$. De vectorruimte van lineaire afbeeldingen van $\mathcal{V}$ naar $\mathcal{W}$ wordt aangegeven met $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Beschouw $\mathcal{L}(\mathcal{V}, I\!R) := \mathcal{V}^*$. We noemen $\mathcal{V}^*$ de *duale ruimte* van $\mathcal{V}$. We kunnen nu *vectoren* in $\mathcal{V}$ met basis $\vec{c}$ en *covectoren* in $\mathcal{V}^*$ met basis $\hat{\vec{c}}$ definiëeren. Eigenschappen van beide zijn:

1. Vectoren: $\vec{x} = x^i \vec{c}_i$ met de basisvectoren $\vec{c}_i$:
$$\vec{c}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$
Overgang van stelsel i naar i' wordt gegeven door:
$$\vec{c}_{i'} = A^i_{i'} \vec{c}_i = \partial_i \in \mathcal{V} \ \ , \ \ x^{i'} = A^{i'}_i x^i$$

2. Covectoren: $\hat{\vec{x}} = x_i \hat{\vec{c}}^{\,i}$ met de basisvectoren $\hat{\vec{c}}^{\,i}$
$$\hat{\vec{c}}^{\,i} = dx^i$$
Overgang van stelsel i naar i' wordt gegeven door:
$$\hat{\vec{c}}^{\,i'} = A^{i'}_i \hat{\vec{c}}^{\,i} \in \mathcal{V}^* \ \ , \ \ \vec{x}_{i'} = A^i_{i'} \vec{x}_i$$

Hierbij is de *Einsteinconventie* gebruikt:
$$a^i b_i := \sum_i a^i b_i$$
De coördinatentransformatie wordt gegeven door:
$$A^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \ \ , \ \ A^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$$
Hieruit volgt dat $A^i_k \cdot A^k_l = \delta^i_l$ en $A^i_{i'} = (A^{i'}_i)^{-1}$.

De coördinatentransformaties zijn in differentiaalnotatie gegeven door:
$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i}$$
In het algemene geval geldt voor de transformatie van een tensor T:
$$T^{q_1 \dots q_n}_{s_1 \dots s_m} = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{u}} \right|^\ell \frac{\partial u^{q_1}}{\partial x^{p_1}} \cdots \frac{\partial u^{q_n}}{\partial x^{p_n}} \cdot \frac{\partial x^{r_1}}{\partial u^{s_1}} \cdots \frac{\partial x^{r_m}}{\partial u^{s_m}} T^{p_1 \dots p_n}_{r_1 \dots r_m}$$
bij een *absolute tensor* is $\ell = 0$.

7.2 Tensoralgebra

Er geldt:

$$a_{ij}(x_i + y_i) \equiv a_{ij}x_i + a_{ij}y_i, \quad \text{maar: } a_{ij}(x_i + y_j) \not\equiv a_{ij}x_i + a_{ij}y_j$$

en

$$(a_{ij} + a_{ji})x_i x_j \equiv 2a_{ij}x_i x_j, \quad \text{maar: } (a_{ij} + a_{ji})x_i y_j \not\equiv 2a_{ij}x_i y_j$$

en $(a_{ij} - a_{ji})x_i x_j \equiv 0$.

De som en verschil van 2 tensoren is een tensor van gelijke rang: $A^p_q \pm B^p_q$. Bij het uitwendig tensorproduct is de rang van het resultaat de som van de rangen van beide tensoren: $A^{pr}_q \cdot B^m_s = C^{prm}_{qs}$. Bij de *contractie* worden 2 indices gelijk gesteld en erover gesommeerd. Stel we nemen $r = s$ bij tensor A^{mpr}_{qs}, dit geeft: $\sum\limits_r A^{mpr}_{qr} = B^{mp}_q$. Het *inproduct* van twee tensoren is gedefinieerd als het uitproduct waarna een contractie over een index volgt.

7.3 Inwendig product

Definitie: de bilineaire afbeelding $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \to I\!R$, $B(\vec{x}, \hat{\vec{y}}\,) = \hat{\vec{y}}(\vec{x}\,)$ wordt aangegeven met $< \vec{x}, \hat{\vec{y}} >$. Voor deze *paringsoperator* $< \cdot, \cdot >= \delta$ geldt:

$$\hat{\vec{y}}(\vec{x}) =< \vec{x}, \hat{\vec{y}} >= y_i x^i \quad , \quad < \hat{\vec{c}}^{\,i}, \vec{c}_j >= \delta^i_j$$

Zij $G : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ een lineaire bijectie. Definiëer de bilineaire vormen

$$\begin{array}{rl} g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to I\!R & \quad g(\vec{x}, \vec{y}\,) =< \vec{x}, G\vec{y} > \\ h : \mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \to I\!R & \quad h(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}\,) =< G^{-1}\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}} > \end{array}$$

Beide zijn niet-gedegenereerd. Er geldt: $h(G\vec{x}, G\vec{y}\,) =< \vec{x}, G\vec{y} >= g(\vec{x}, \vec{y}\,)$. Als we $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}^*$ identificeren m.b.v. G dan geeft g (of h) een inwendig product op $\mathcal{V}$.

Het inproduct $(,)_\Lambda$ op $\Lambda^k(\mathcal{V})$ wordt gedefinieerd door:

$$(\Phi, \Psi)_\Lambda = \frac{1}{k!}(\Phi, \Psi)_{T^0_k(\mathcal{V})}$$

Het inproduct van 2 vectoren is dan gegeven door:

$$(\vec{x}, \vec{y}\,) = x^i y^i < \vec{c}_i, G\vec{c}_j >= g_{ij} x^i x^j$$

De matrix g_{ij} van G is gegeven door

$$g_{ij}\hat{\vec{c}}^{\,j} = G\vec{c}_i$$

De matrix g^{ij} van G^{-1} is gegeven door:

$$g^{kl}\vec{c}_l = G^{-1}\hat{\vec{c}}^{\,k}$$

Voor deze *metrische tensor* g_{ij} geldt: $g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i$. Deze tensor kan indices omhoog of omlaag halen:

$$x_j = g_{ij}x^i \quad , \quad x^i = g^{ij}x_j$$

en $du^i = \hat{\vec{c}}^{\,i} = g^{ij}\vec{c}_j$.

7.4 Tensorproduct

Definitie: laat $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ twee eindig dimensionale vectorruimten zijn met dimensies m resp. n. Zij $\mathcal{U}^* \times \mathcal{V}^*$ het cartesisch product van $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$. Een functie $t : \mathcal{U}^* \times \mathcal{V}^* \rightarrow I\!R$; $(\hat{\vec{u}}; \hat{\vec{v}}) \mapsto t(\hat{\vec{u}}; \hat{\vec{v}}) = t^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \in I\!R$ heet een tensor als t lineair is in $\hat{\vec{u}}$ en $\hat{\vec{v}}$. De tensoren t vormen een vectorruimte genoteerd met $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. De elementen $T \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ heten contravariante 2-tensoren: $T = T^{ij} \vec{c}_i \otimes \vec{c}_j = T^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$. De elementen $T \in \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*$ heten covariante 2-tensoren: $T = T_{ij} \hat{\vec{c}}^{\,i} \otimes \hat{\vec{c}}^{\,j} = T_{ij} dx^i \otimes dx^j$. De elementen $T \in \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}$ heten gemengde 2 tensoren: $T = T_i^{\cdot j} \hat{\vec{c}}^{\,i} \otimes \vec{c}_j = T_i^{\cdot j} dx^i \otimes \partial_j$, en analoog voor $T \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^*$.

De getallen, gegeven door

$$t^{\alpha\beta} = t(\hat{\vec{c}}^{\,\alpha}, \hat{\vec{c}}^{\,\beta})$$

met $1 \leq \alpha \leq m$ en $1 \leq \beta \leq n$ vormen de componenten of kentallen van t.

Neem $\vec{x} \in \mathcal{U}$ en $\vec{y} \in \mathcal{V}$. Dan is de functie $\vec{x} \otimes \vec{y}$, gedefinieerd door

$$(\vec{x} \otimes \vec{y})(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) = < \vec{x}, \hat{\vec{u}} >_U < \vec{y}, \hat{\vec{v}} >_V$$

een tensor. De kentallen volgen uit: $(\vec{u} \otimes \vec{v})_{ij} = u_i v^j$. Het tensorproduct van 2 tensoren is gegeven door:

$$\begin{array}{lll}
\binom{2}{0} \text{ vorm:} & & (\vec{v} \otimes \vec{w})(\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{q}}) = v^i p_i w^k q_k = T^{ik} p_i q_k \\
\binom{0}{2} \text{ vorm:} & & (\hat{\vec{p}} \otimes \hat{\vec{q}})(\vec{v}, \vec{w}) = p_i v^i q_k w^k = T_{ik} v^i w^k \\
\binom{1}{1} \text{ vorm:} & & (\vec{v} \otimes \hat{\vec{p}})(\hat{\vec{q}}, \vec{w}) = v^i q_i p_k w^k = T^i_k q_i w^k
\end{array}$$

7.5 Symmetrische - en antisymmetrische tensoren

Een tensor $t \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ heet symmetrisch resp. antisymmetrisch als $\forall \hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}} \in \mathcal{V}^*$ geldt: $t(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) = t(\hat{\vec{y}}, \hat{\vec{x}})$ resp. $t(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) = -t(\hat{\vec{y}}, \hat{\vec{x}})$.

Een tensor $t \in \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*$ heet symmetrisch resp. antisymmetrisch als $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ geldt: $t(\vec{x}, \vec{y}) = t(\vec{y}, \vec{x})$ resp. $t(\vec{x}, \vec{y}) = -t(\vec{y}, \vec{x})$. In $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ worden de lineaire afbeeldingen $\mathcal{S}$ en $\mathcal{A}$ gedefinieerd door:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{S}t(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) & = & \frac{1}{2}(t(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) + t(\hat{\vec{y}}, \hat{\vec{x}})) \\
\mathcal{A}t(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) & = & \frac{1}{2}(t(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) - t(\hat{\vec{y}}, \hat{\vec{x}}))
\end{array}$$

In $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*$ analoog. Als t symmetrisch resp. antisymmetrisch is, dan is $\mathcal{S}t = t$ resp. $\mathcal{A}t = t$.

De tensoren $\vec{e}_i \vee \vec{e}_j = \vec{e}_i \vec{e}_j = 2\mathcal{S}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$, met $1 \leq i \leq j \leq n$ vormen een basis in $\mathcal{S}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V})$ met dimensie $\frac{1}{2}n(n+1)$.

De tensoren $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = 2\mathcal{A}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$, met $1 \leq i \leq j \leq n$ vormen een basis in $\mathcal{A}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V})$ met dimensie $\frac{1}{2}n(n-1)$.

De volledig antisymmetrische tensor ε is gegeven door: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

De permutatie-operatoren e_{pqr} zijn gedefinieerd door: $e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$, $e_{213} = e_{132} = e_{321} = -1$, voor alle andere combinaties is $e_{pqr} = 0$. Er is een samenhang met de ε tensor: $\varepsilon_{pqr} = g^{-1/2} e_{pqr}$ en $\varepsilon^{pqr} = g^{1/2} e^{pqr}$.

7.6 Uitwendig product

Zij $\alpha \in \Lambda^k(\mathcal{V})$ en $\beta \in \Lambda^l(\mathcal{V})$. Dan wordt $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(\mathcal{V})$ gedefinieerd door:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta)$$

Als α en $\beta \in \Lambda^1(\mathcal{V}) = \mathcal{V}^*$, dan geldt: $\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$

Het uitproduct is te schrijven als: $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k$, $\vec{a} \times \vec{b} = G^{-1} \cdot *(G\vec{a} \wedge G\vec{b})$.

Neem $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in I\!R^4$. Dan is $(dt \wedge dz)(\vec{a}, \vec{b}) = a_0 b_4 - b_0 a_4$ de georiënteerde oppervlakte van de projectie op het tz-vlak van het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Verder is

$$(dt \wedge dy \wedge dz)(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

de georiënteerde 3-dimensionale inhoud van de projectie op het tyz-vlak van het parallellepipedum opgespannen door $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.

$(dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz)(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ is de 4-dimensionale inhoud van het hyperparallellepipedum opgespannen door $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{d}$.

7.7 De Hodge afbeelding

Omdat $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ voor $1 \leq k \leq n$ hebben $\Lambda^k(\mathcal{V})$ en $\Lambda^{n-k}(\mathcal{V})$ dezelfde dimensie. $\mathrm{Dim}(\Lambda^n(\mathcal{V})) = 1$. De keuze van een basis betekent de keuze van een georiënteerde inhoudsmaat, een volume μ, in $\mathcal{V}$. We kunnen μ zodanig ijken dat voor een orthonormale basis $\vec{e}_i$ geldt: $\mu(\vec{e}_i) = 1$. Deze basis heet dan per definitie positief georiënteerd als $\mu = \hat{\vec{e}}^{\,1} \wedge \hat{\vec{e}}^{\,2} \wedge ... \wedge \hat{\vec{e}}^{\,n} = 1$.

Vanwege de gelijke dimensies kan men zich afvragen of er een bijectie tussen beide ruimten bestaat. Als $\mathcal{V}$ geen extra structuur heeft is dit niet het geval, echter, als $\mathcal{V}$ voorzien is van een inproduct en daarbij behorende volumevorm μ, dan bestaat zo'n afbeelding wel en wordt de *Hodge-ster-afbeelding* genoemd en genoteerd met $*$. Er geldt dat

$$\forall_{w \in \Lambda^k(\mathcal{V})} \exists_{*w \in \Lambda^{k-n}(\mathcal{V})} \forall_{\theta \in \Lambda^k(\mathcal{V})} \;\; \theta \wedge *w = (\theta, w)_\lambda \mu$$

Voor een orthonormale basis in $I\!R^3$ geldt: het volume: $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$, $*dx \wedge dy \wedge dz = 1$, $*dx = dy \wedge dz$, $*dz = dx \wedge dy$, $*dy = -dx \wedge dz$, $*(dx \wedge dy) = dz$, $*(dy \wedge dz) = dx$, $*(dx \wedge dz) = -dy$.

Voor een Minkowski basis in $I\!R^4$ geldt: $\mu = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$, $G = dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz$, en $*dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = 1$ en $*1 = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$. Verder $*dt = dx \wedge dy \wedge dz$ en $*dx = dt \wedge dy \wedge dz$.

7.8 Differentiaaloperaties

7.8.1 De richtingsafgeleide

De *richtingsafgeleide* in het punt $\vec{a}$ is gegeven door:

$$\mathcal{L}_{\vec{a}} f = <\vec{a}, df> = a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

7.8.2 De Lie-afgeleide

De *Lie-afgeleide* is gegeven door:

$$(\mathcal{L}_{\vec{v}} \vec{w})^j = w^i \partial_i v^j - v^i \partial_i w^j$$

7.8.3 Christoffelsymbolen

Aan ieder kromlijnig coördinatenstelsel u^i voegen we een stelsel van n^3 functies Γ^i_{jk} van $\vec{u}$ toe gedefinieerd door

$$\frac{\partial^2\vec{x}}{\partial u^i\partial u^k}=\Gamma^i_{jk}\frac{\partial\vec{x}}{\partial u^i}$$

Dit zijn *Christoffelsymbolen van de tweede soort*. Christoffelsymbolen zijn geen tensoren. De Christoffelsymbolen van de tweede soort zijn gegeven door:

$$\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}:=\Gamma^i_{jk}=\left\langle\frac{\partial^2\vec{x}}{\partial u^k\partial u^j},dx^i\right\rangle$$

Er geldt dat $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$. Hun transformatie naar een ander coördinatenstelsel is gegeven door:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}=A^i_{i'}A^j_{j'}A^k_{k'}\Gamma^i_{jk}+A^{i'}_i(\partial_{j'}A^i_{k'})$$

Als de geaccentueerde coördinaten cartesisch zijn is de eerste term hierin gelijk aan 0.

Er is een relatie tussen Christoffelsymbolen en de metriek:

$$\Gamma^i_{jk}=\tfrac{1}{2}g^{ir}(\partial_j g_{kr}+\partial_k g_{rj}-\partial_r g_{jk})$$

en $\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}=\partial_\beta(\ln(\sqrt{|g|}))$.

Omlaaghalen van een index geeft de *Christoffelsymbolen van de eerste soort*: $\Gamma^i_{jk}=g^{il}\Gamma_{jkl}$.

7.8.4 De covariante afgeleide

De *covariante afgeleide* ∇_j van een vector, covector en van tensoren van rang 2 is gegeven door:

$$\begin{aligned}
\nabla_j a^i &= \partial_j a^i+\Gamma^i_{jk}a^k\\
\nabla_j a_i &= \partial_j a_i-\Gamma^k_{ij}a_k\\
\nabla_\gamma a^\alpha_\beta &= \partial_\gamma a^\alpha_\beta-\Gamma^\varepsilon_{\gamma\beta}a^\alpha_\varepsilon+\Gamma^\alpha_{\gamma\varepsilon}a^\varepsilon_\beta\\
\nabla_\gamma a_{\alpha\beta} &= \partial_\gamma a_{\alpha\beta}-\Gamma^\varepsilon_{\gamma\alpha}a_{\varepsilon\beta}-\Gamma^\varepsilon_{\gamma\beta}a_{\alpha\varepsilon}\\
\nabla_\gamma a^{\alpha\beta} &= \partial_\gamma a^{\alpha\beta}+\Gamma^\alpha_{\gamma\varepsilon}a^{\varepsilon\beta}+\Gamma^\beta_{\gamma\varepsilon}a^{\alpha\varepsilon}
\end{aligned}$$

De stelling van Ricci luidt dat

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta}=\nabla_\gamma g^{\alpha\beta}=0$$

7.9 Differentiaaloperatoren

De Gradiënt

is gegeven door:

$$\mathrm{grad}(f)=G^{-1}df=g^{ki}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

De divergentie

is gegeven door:

$$\mathrm{div}(a^i)=\nabla_i a^i=\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_k(\sqrt{g}\,a^k)$$

De rotatie

is gegeven door:

$$\mathrm{rot}(a)=G^{-1}\cdot*\cdot d\cdot G\vec{a}=-\varepsilon^{pqr}\nabla_q a_p=\nabla_q a_p-\nabla_p a_q$$

De Laplaciaan

is gegeven door:

$$\Delta(f)=\mathrm{div}\,\mathrm{grad}(f)=*d*df=\nabla_i g^{ij}\partial_j f=g^{ij}\nabla_i\nabla_j f=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$$

7.10 Differentiaalmeetkunde

7.10.1 Ruimtekrommen

We beperken ons tot $I\!R^3$ met een vaste orthonormale basis. Een punt wordt voorgesteld door $\vec{x}=(x^1,x^2,x^3)$. Een ruimtekromme is een verzameling punten die voldoen aan $\vec{x}=\vec{x}(t)$. De booglengte van een ruimtekromme is gegeven door:

$$s(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2}d\tau$$

De afgeleide van s naar t is de lengte van de vector $d\vec{x}/dt$:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{d\vec{x}}{dt},\frac{d\vec{x}}{dt}\right)$$

Het *osculatievlak* in een punt P van een ruimtekromme is de limietstand van het vlak door de raaklijn in punt P en een punt Q wanneer Q langs de ruimtekromme nadert tot P. Het osculatievlak is evenwijdig aan $\dot{\vec{x}}(s)$. De voorstelling van het osculatievlak is, als $\ddot{\vec{x}}\neq 0$:

$$\vec{y}=\vec{x}+\lambda\dot{\vec{x}}+\mu\ddot{\vec{x}}\quad\text{dus}\quad\det(\vec{y}-\vec{x},\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})=0$$

In een buigpunt geldt, als $\dddot{\vec{x}}\neq 0$:

$$\vec{y}=\vec{x}+\lambda\dot{\vec{x}}+\mu\dddot{\vec{x}}$$

De *raaklijn* heeft eenheidsvector $\vec{\ell}=\dot{\vec{x}}$, de *hoofdnormaal* eenheidsvector $\vec{n}=\ddot{\vec{x}}$ en de *binormaal* $\vec{b}=\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}$. De hoofdnormaal ligt dus in het osculatievlak, de binormaal staat daar loodrecht op.

Zij P een punt en Q een naburig punt van een ruimtekromme $\vec{x}(s)$. Zij $\Delta\varphi$ de hoek tussen de raaklijnen in P en Q en zij $\Delta\psi$ de hoek tussen de osculatievlakken (binormalen) in P en Q. Dan zijn de *kromming* ρ en de *torsie* τ in P gedefinieerd door:

$$\rho^2=\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=\lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)^2\quad,\quad\tau^2=\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2$$

en $\rho>0$. Voor vlakke krommen is ρ de traditionele kromming en is $\tau=0$. Er geldt:

$$\rho^2=(\vec{\ell},\vec{\ell})=(\ddot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})\quad\text{en}\quad\tau^2=(\dot{\vec{b}},\dot{\vec{b}})$$

De formules van Frenet drukken de afgeleiden uit als lineaire combinaties van deze vectoren:

$$\dot{\vec{\ell}}=\rho\vec{n}\ ,\ \dot{\vec{n}}=-\rho\vec{\ell}+\tau\vec{b}\ ,\ \dot{\vec{b}}=-\tau\vec{n}$$

Hieruit volgt dat $\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},\dddot{\vec{x}})=\rho^2\tau$.

Enkele krommen en hun eigenschappen zijn:

Schroeflijn	$\tau/\rho=$constant
Cirkelschroeflijn	$\tau=$constant, $\rho=$constant
Vlakke krommen	$\tau=0$
Cirkels	$\rho=$constant, $\tau=0$
Rechten	$\rho=\tau=0$

7.10.2 Oppervlakken in $I\!R^3$

Een oppervlak in $I\!R^3$ is de verzameling eindpunten der vectoren $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$, dus $x^h = x^h(u^\alpha)$. Op het oppervlak liggen 2 stelsels krommen, nl. met u =constant en met v =constant.

Het raakvlak in een punt P aan het oppervlak heeft als basis:

$$\vec{c}_1 = \partial_1\vec{x} \quad \text{en} \quad \vec{c}_2 = \partial_2\vec{x}$$

7.10.3 De eerste fundamentaaltensor

Zij P een punt van het oppervlak $\vec{x} = \vec{x}(u^\alpha)$. Van twee krommen door P, aan te geven door $u^\alpha = u^\alpha(t)$, $u^\alpha = v^\alpha(\tau)$, zijn de raakvectoren in P

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{du^\alpha}{dt}\partial_\alpha\vec{x} \quad , \quad \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{dv^\beta}{d\tau}\partial_\beta\vec{x}$$

De *eerste fundamentaaltensor* van het oppervlak in P is het inproduct van deze raakvectoren:

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{d\vec{x}}{d\tau}\right) = (\vec{c}_\alpha, \vec{c}_\beta)\frac{du^\alpha}{dt}\frac{dv^\beta}{d\tau}$$

De covariante componenten t.o.v. de basis $\vec{c}_\alpha = \partial_\alpha\vec{x}$ zijn:

$$g_{\alpha\beta} = (\vec{c}_\alpha, \vec{c}_\beta)$$

Voor de hoek ϕ tussen de parameterkrommen in P: $u = t, v$ =constant en u =constant, $v = \tau$ geldt:

$$\cos(\phi) = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$$

Voor de booglengte s vanuit P langs de kromme $u^\alpha(t)$ geldt:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$$

Deze uitdrukking heet het *lijnelement*.

7.10.4 De tweede fundamentaaltensor

De 4 afgeleiden van de raakvectoren $\partial_\alpha\partial_\beta\vec{x} = \partial_\alpha\vec{c}_\beta$ zijn elk lineair afhankelijk van de vectoren $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ en $\vec{N}$ met $\vec{N}$ loodrecht op $\vec{c}_1$ en $\vec{c}_2$. Dit wordt geschreven als:

$$\partial_\alpha\vec{c}_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\vec{c}_\gamma + h_{\alpha\beta}\vec{N}$$

Hieruit volgt:

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = (\vec{c}^{\,\gamma}, \partial_\alpha\vec{c}_\beta) \quad , \quad h_{\alpha\beta} = (\vec{N}, \partial_\alpha\vec{c}_\beta) = \frac{1}{\sqrt{\det|g|}}\det(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \partial_\alpha\vec{c}_\beta)$$

7.10.5 Geodetische kromming

Op het oppervlak $\vec{x}(u^\alpha)$ wordt een kromme gegeven door: $u^\alpha = u^\alpha(s)$, dan $\vec{x} = \vec{x}(u^\alpha(s))$ met s de booglengte van de kromme. De lengte van $\ddot{\vec{x}}$ is de kromming ρ van de kromme in P. De projectie van $\ddot{\vec{x}}$ op het raakvlak is een vector met componenten

$$p^\gamma = \ddot{u}^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta$$

waarvan de lengte de *geodetische kromming* heet van de kromme in p en blijft hetzelfde als het oppervlak met behoud van het lijnelement wordt verbogen. De projectie van $\ddot{\vec{x}}$ op $\vec{N}$ heeft als lengte

$$p = h_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta$$

die de *normale kromming* van de kromme in P heet. De *stelling van Meusnier* luidt dat verschillende krommen op het oppervlak met dezelfde raakvector in P gelijke normale kromming hebben.

Een *geodetische lijn* van een oppervlak is een kromme op het oppervlak waarvoor in elk punt de hoofdnormaal van de kromme samenvalt met de normaal op het oppervlak. Voor een geodetische lijn moet in elk punt $p^\gamma = 0$ dus

$$\frac{d^2u^\gamma}{ds^2} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = 0$$

De covariante afgeleide ∇/dt in P van een vectorveld van een oppervlak langs een kromme is de projectie op het raakvlak in P van de gewone afgeleide in P.

Voor twee vectorvelden $\vec{v}(t)$ en $\vec{w}(t)$ langs dezelfde kromme van het oppervlak volgt de regel van Leibniz:

$$\frac{d(\vec{v},\vec{w}\,)}{dt} = \left(\vec{v},\frac{\nabla\vec{w}}{dt}\right) + \left(\vec{w},\frac{\nabla\vec{v}}{dt}\right)$$

Langs een kromme geldt:

$$\frac{\nabla}{dt}(v^\alpha\vec{c}_\alpha) = \left(\frac{dv^\gamma}{dt} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{dt}v^\beta\right)\vec{c}_\gamma$$

7.11 Riemannse meetkunde

De *Riemann tensor* R is gedefinieerd door:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta}T^\nu = \nabla_\alpha\nabla_\beta T^\mu - \nabla_\beta\nabla_\alpha T^\mu$$

Dit is een $\binom{1}{3}$ tensor met $n^2(n^2-1)/12$ onafhankelijke componenten die niet identiek gelijk aan 0 zijn. Deze tensor is een maat voor de kromming van de beschouwde ruimte. Als ze 0 is is de ruimte een vlak manifold. Ze heeft de volgende symmetrie-eigenschappen:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$$

Er geldt:

$$[\nabla_\alpha,\nabla_\beta]T^\mu_\nu = R^\mu_{\sigma\alpha\beta}T^\sigma_\nu + R^\sigma_{\nu\alpha\beta}T^\mu_\sigma$$

De Riemann tensor hangt samen met de Christoffelsymbolen via

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}$$

In een ruimte en coördinatenstelsel waar de Christoffelsymbolen 0 zijn gaat dit over in

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \tfrac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_\beta\partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\beta\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\sigma\partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\sigma\partial_\mu g_{\beta\nu})$$

De *Bianchi identiteiten* zijn: $\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0$.

De *Ricci tensor* verkrijgt men door contractie: $R_{\alpha\beta} \equiv R^\mu_{\alpha\mu\beta}$ en is symmetrisch in haar indices: $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$. De *Einstein tensor* G is gedefinieerd door: $G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}$. Hiervoor geldt: $\nabla_\beta G^{\alpha\beta} = 0$. De Ricci scalar is $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$.

Hoofdstuk 8

Numerieke wiskunde

8.1 Fouten

Als een op te lossen probleem een aantal parameters bevat die niet exact bekend zijn zal de oplossing een fout bevatten. De samenhang tussen fouten in gegevens en oplossing is uit te drukken in het *conditiegetal* c. Als het probleem gegeven is door $x = \phi(a)$ geldt in eerste orde voor een fout δa in a:

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{a\phi'(a)}{\phi(a)} \cdot \frac{\delta a}{a}$$

Het getal $c(a) = |a\phi'(a)|/|\phi(a)|$. Als het probleem goed geconditioneerd is dan is $c \ll 1$.

8.2 Floating point rekenen

De floating point representatie hangt af van 4 natuurlijke getallen:

1. Het *grondtal* of basis van het getalstelsel β,
2. De mantisselengte t,
3. De lengte van de exponent q,
4. Het teken s,

De representatie van machinegetallen is dan: $\boxed{\mathrm{rd}(x) = s \cdot m \cdot \beta^e}$ waarin mantisse m een getal is met t β-tallige cijfers dat voldoet aan $1/\beta \leq |m| < 1$, en e een getal is met q β-tallige cijfers met $|e| \leq \beta^q - 1$. Hieraan wordt toegevoegd het getal 0 met bv. $m = e = 0$. Het grootste machinegetal is

$$a_{\max} = (1 - \beta^{-t})\beta^{\beta^q - 1}$$

en het kleinste positieve machinegetal is

$$a_{\min} = \beta^{-\beta^q}$$

De afstand tussen twee opeenvolgende machinegetallen in het interval $[\beta^{p-1}, \beta^p]$ is β^{p-t}. Als x reëel is en het dichtstbijzijnde machinegetal is $\mathrm{rd}(x)$, dan geldt:

$$\begin{aligned} \mathrm{rd}(x) &= x(1+\varepsilon) \qquad \text{met} \qquad |\varepsilon| \leq \tfrac{1}{2}\beta^{1-t} \\ x &= \mathrm{rd}(x)(1+\varepsilon') \qquad \text{met} \qquad |\varepsilon'| \leq \tfrac{1}{2}\beta^{1-t} \end{aligned}$$

Het getal $\eta := \frac{1}{2}\beta^{1-t}$ heet de machine-nauwkeurigheid waarvoor geldt:

$$\varepsilon, \varepsilon' \leq \eta \left| \frac{x - \mathrm{rd}(x)}{x} \right| \leq \eta$$

Een veelgebruikt 32 bits float formaat is: 1 bit voor s, 8 voor de exponent en 23 voor de mantisse. Het grondtal hierin is 2.

8.3 Stelsels vergelijkingen

We willen de matrixvergelijking $A\vec{x}=\vec{b}$ oplossen voor een niet-singuliere A, hetgeen equivalent is aan het vinden van de inverse matrix A^{-1}. Oplossing van een $n\times n$ matrix via de regel van Cramer vereist te veel vermenigvuldigingen $f(n)$ met $n!\leq f(n)\leq(e-1)n!$, dus zijn andere methoden wenselijk.

8.3.1 Driehoeksstelsels

Beschouw de vergelijking $U\vec{x}=\vec{c}$ waarin U een rechtsboven matrix is, d.w.z. $U_{ij}=0$ voor alle $j<i$, en alle $U_{ii}\neq 0$. Dan is:

$$\begin{array}{rcl}x_n&=&c_n/U_{nn}\\ x_{n-1}&=&(c_{n-1}-U_{n-1,n}x_n)/U_{n-1,n-1}\\ \vdots&&\vdots\\ x_1&=&(c_1-\displaystyle\sum_{j=2}^n U_{1j}x_j)/U_{11}\end{array}$$

In code:

```
for (k = n; k > 0; k--)
{
  S = c[k];
  for (j = k + 1; j < n; j++)
  {
    S -= U[k][j] * x[j];
  }
  x[k] = S / U[k][k];
}
```

Dit algoritme vereist $\frac{1}{2}n(n+1)$ floating point berekeningen.

8.3.2 De eliminatiemethode van Gauss

Beschouw een algemeen stelsel $A\vec{x}=\vec{b}$. Dit is via de eliminatiemethode van Gauss tot een driehoeksvorm te brengen door de eerste vergelijking vermenigvuldigd met A_{i1}/A_{11} van alle anderen af te trekken; nu is de eerste kolom, op A_{11} na, allemaal 0. Daarna wordt de 2e vergelijking zodanig van de anderen afgetrokken dat alle elementen onder A_{22} 0 zijn, etc. In code:

```
for (k = 1; k <= n; k++)
{
  for (j = k; j <= n; j++) U[k][j] = A[k][j];
  c[k] = b[k];

  for (i = k + 1; i <= n; i++)
  {
    L = A[i][k] / U[k][k];
    for (j = k + 1; j <= n; j++)
    {
      A[i][j] -= L * U[k][j];
    }
    b[i] -= L * c[k];
  }
}
```

Dit algoritme vereist $\frac{1}{3}n(n^2-1)$ floating point vermenigvuldigingen en delingen voor bewerking van de coëfficiëntenmatrix en $\frac{1}{2}n(n-1)$ vermenigvuldigingen voor de bewerking van de rechterleden, waarna ook het driehoeksstelsel moet worden opgelost met $\frac{1}{2}n(n+1)$ berekeningen.

8.3.3 Pivot strategie

Als de hoekelementen $A_{11}, A_{22}^{(1)}, ...$ niet alle $\neq 0$ zijn zullen er vergelijkingen verwisseld moeten worden om Gauss eliminatie te laten werken ($A^{(n)}$ is het element na de n-de iteratieslag). Een methode is: als $A_{kk}^{(k-1)} = 0$, dan zoek een element $A_{pk}^{(k-1)}$ met $p > k$ dat $\neq 0$ is en verwissel de p-de en k-de vergelijking. Deze strategie mislukt alleen indien het stelsel singulier is en dus geen oplossing heeft.

8.4 Nulpunten van functies

8.4.1 Successieve substitutie

Het doel is het oplossen van de vergelijking $F(x) = 0$, dus het vinden van het nulpunt α, met $F(\alpha) = 0$.

Veel oplossingsmethoden komen neer op het volgende:

1. Schrijf de vergelijking om in de vorm $x = f(x)$ z.d.d. een oplossing hiervan ook een oplossing van $F(x) = 0$ is. Bovendien mag $f(x)$ in de buurt van α niet te sterk van x afhangen.

2. Neem een beginschatting x_0 voor α, en bepaal de rij x_n met $x_n = f(x_{n-1})$ en hoop dat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Een voorbeeld: kies

$$f(x) = \beta - \varepsilon\frac{h(x)}{g(x)} = x - \frac{F(x)}{G(x)}$$

dan is te verwachten dat de rij x_n met

$$\begin{aligned} x_0 &= \beta \\ x_n &= x_{n-1} - \varepsilon\frac{h(x_{n-1})}{g(x_{n-1})} \end{aligned}$$

naar α convergeert.

8.4.2 De lokale convergentiestelling

Zij α een oplossing van $x = f(x)$ en zij $x_n = f(x_{n-1})$ bij gegeven x_0. Zij $f'(x)$ continu in een omgeving van α. Zij $f'(\alpha) = A$ met $|A| < 1$. Dan is er een $\delta > 0$ z.d.d. voor iedere x_0 met $|x_0 - \alpha| \leq \delta$ geldt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n_n = \alpha$,

2. Als voor zekere k geldt: $x_k = \alpha$, dan geldt voor iedere $n \geq k$ dat $x_n = \alpha$. Als $x_n \neq \alpha$ voor alle n dan geldt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha - x_n}{\alpha - x_{n-1}} = A \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = A \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{A}{1-A}$$

De grootheid A wordt de *asymptotische convergentiefactor* genoemd, de grootheid $B = -{}^{10}\log|A|$ de *asymptotische convergentiesnelheid*.

8.4.3 Extrapolatie volgens Aitken

We stellen

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

A convergeert naar $f'(a)$. Dan zal de rij

$$\alpha_n = x_n + \frac{A_n}{1 - A_n}(x_n - x_{n-1})$$

convergeren naar α.

8.4.4 De iteratiemethode van Newton

Het omvormen van $F(x) = 0$ in $x = f(x)$ kan op meerdere manieren. Een essentiële voorwaarde daarbij is dat in een omgeving van een wortel α geldt dat $|f'(x)| < 1$, en hoe kleiner $f'(x)$ is, hoe sneller de reeks convergeert. Een algemene manier om $f(x)$ te construeren is

$$f(x) = x - \Phi(x)F(x)$$

met $\Phi(x) \neq 0$ in een omgeving van α. Als men kiest:

$$\Phi(x) = \frac{1}{F'(x)}$$

dan geeft dit de methode van Newton. De iteratieformule wordt dan:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}$$

Enkele eigenschappen:

- Dit resultaat is ook m.b.v. Taylorreeksen af te leiden.
- De globale convergentie is vaak moeilijk te onderzoeken.
- Als x_n ver van α af ligt kan de convergentie soms erg traag zijn.
- De aanname $F'(\alpha) \neq 0$ betekent dat α een enkelvoudig nulpunt is.

Voor $F(x) = x^k - a$ wordt de reeks:

$$x_n = \frac{1}{k}\left((k-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{k-1}}\right)$$

Dit is een bekende methode om wortels te berekenen.

De volgende code vindt het nulpunt van een functie via de methode van Newton. Het nulpunt ligt binnen het interval `[x1, x2]`. De waarde wordt aangepast totdat de nauwkeurigheid beter is dan $\pm$`eps`. De functie `funcd` is een routine die zowel de functie en de eerste afgeleide in punt `x` teruggeeft en pointers daarnaartoe invult.

```
float SolveNewton(void (*funcd)(float, float*, float*), float x1, float x2, float eps)
{
  int   j, max_iter = 25;
  float df, dx, f, nulpunt;

  nulpunt = 0.5 * (x1 + x2);
  for (j = 1; j <= max_iter; j++)
  {
```

```
    (*funcd)(nulpunt, &f, &df);
    dx  = f/df;
    nulpunt = -dx;
    if ( (x1 - nulpunt)*(nulpunt - x2) < 0.0 )
    {
      perror("Jumped out of brackets in SolveNewton.");
      exit(1);
    }
    if ( fabs(dx) < eps ) return nulpunt; /* Convergence */
  }
  perror("Maximum number of iterations exceeded in SolveNewton.");
  exit(1);
  return 0.0;
}
```

8.4.5 De secant methode

Dit is, i.t.t. de vorige methoden, een tweetraps methode. Als men twee benaderingen x_n en x_{n-1} voor een nulpunt heeft dan kan men als volgende benadering nemen het snijpunt

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})}$$

Er is sprake van interpolatie als $F(x_n)$ en $F(x_{n-1})$ een verschillend teken hebben, anders van extrapolatie.

8.5 Polynoom interpolatie

Een basis voor polynomen van graad n is gegeven door de *interpolatiepolynomen van Lagrange*:

$$L_j(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq j}}^{n} \frac{x - x_l}{x_j - x_l}$$

Er geldt dat:

1. Iedere $L_j(x)$ heeft graad n,
2. $L_j(x_i) = \delta_{ij}$ voor $i, j = 0, 1, ..., n$,
3. Ieder polynoom $p(x)$ is op eenduidige wijze te schrijven als

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j L_j(x) \quad \text{met} \quad c_j = p(x_j)$$

Dit is geen geschikte wijze om de waarde van een polynoom in een gegeven punt $x = a$ te berekenen. Hiervoor is het Horner algoritme beter geschikt: de waarde $s = \sum_k c_k x^k$ in $x = a$ is als volgt te berekenen:

```
float GetPolyValue(float c[], int n)
{
  int i; float s = c[n];
  for (i = n - 1; i >= 0; i--)
  {
    s = s * a + c[i];
  }
  return s;
}
```

dan heeft `s` na afloop de waarde $p(a)$.

8.6 Bepaalde integralen

Vrijwel alle numerieke integratie methoden zijn gebaseerd op een formule van de vorm:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + R(f)$$

met n, c_i en x_i onafhankelijk van $f(x)$ en $R(f)$ de restfout die voor alle gebruikelijke methoden de vorm $R(f) = Cf^{(q)}(\xi)$ heeft met $\xi \in (a,b)$ en $q \geq n+1$. Vaak worden de punten x_i equidistant gekozen. Enkele gebruikelijke formules zijn:

- De trapeziumregel: $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $h = b - a$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

- Regel van Simpson: $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $x_2 = b$, $h = \frac{1}{2}(b-a)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

- De midpoint regel: $n = 0$, $x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$, $h = b - a$:

$$\int_a^b f(x)dx = hf(x_0) + \frac{h^3}{24} f''(\xi)$$

Als f sterk varieert binnen het interval zal men dit interval gewoonlijk opsplitsen en de integratieformules op de deelintervallen toepassen.

Als men zowel de coëfficiënten c_j als de punten x_j in een integratieformule zodanig wil bepalen dat de integratieformule exact geldt voor polynomen van een zo hoog mogelijke graad, dan krijgt men een integratieformule van Gauss. Twee voorbeelden hiervan zijn:

1. De tweepuntsformule:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = h\left[f\left(\frac{-h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\right] + \frac{h^5}{135} f^{(4)}(\xi)$$

2. De driepuntsformule:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{h}{9}\left[5f\left(-h\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(h\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)\right] + \frac{h^7}{15750} f^{(6)}(\xi)$$

8.7 Differentiëren

Voor de numerieke berekening van $f'(x)$ staan verschillende differentiatieformules ter beschikking:

- Voorwaartse differentiatie:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \tfrac{1}{2} h f''(\xi)$$

- Achterwaartse differentiatie:
$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \tfrac{1}{2}hf''(\xi)$$
- Centrale differentiatie:
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$
- Als meer functiewaarden gebruikt worden is de benadering beter:
$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$$

Ook voor hogere afgeleiden bestaan er formules:
$$f''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} + \frac{h^4}{90}f^{(6)}(\xi)$$

8.8 Differentiaalvergelijkingen

We gaan uit van de eerste orde DV $y'(x) = f(x,y)$ voor $x > x_0$ en beginvoorwaarde $y(x_0) = x_0$. Stel dat we benaderingen $z_1, z_2, ..., z_n$ voor $y(x_1)$, $y(x_2)$,..., $y(x_n)$ gevonden hebben. Dan kunnen we ter bepaling van z_{n+1} als benadering voor $y(x_{n+1})$ enkele formules afleiden:

- Euler (eenstaps, expliciet):
$$z_{n+1} = z_n + hf(x_n, z_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi)$$
- Midpointregel (tweestaps, expliciet):
$$z_{n+1} = z_{n-1} + 2hf(x_n, z_n) + \frac{h^3}{3}y'''(\xi)$$
- Trapeziumregel (eenstaps, impliciet):
$$z_{n+1} = z_n + \tfrac{1}{2}h(f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, z_{n+1})) - \frac{h^3}{12}y'''(\xi)$$

Runge-Kutta methoden zijn een belangrijke klasse van eenstaps methoden. Ze worden gemotiveerd doordat de oplossing $y(x)$ voldoet aan:
$$y_{n+1} = y_n + hf(\xi_n, y(\xi_n)) \quad \text{met} \quad \xi_n \in (x_n, x_{n+1})$$

Omdat ξ_n onbekend is worden er enkele "metingen" gedaan van de incrementfunctie $k = hf(x,y)$ in goed gekozen punten nabij de oplossingskromme en vervolgens neemt men voor $z_{n+1} - z_n$ een gewogen gemiddelde van de meetwaarden. Zo geldt voor één van de mogelijke 3e orde Runge-Kutta methoden:
$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, z_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, z_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \tfrac{3}{4}h, z_n + \tfrac{3}{4}k_2) \\ z_{n+1} &= z_n + \tfrac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3) \end{aligned}$$

en de klassieke 4e orde methode is:
$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, z_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, z_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, z_n + \tfrac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, z_n + k_3) \\ z_{n+1} &= z_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Vaak wordt de nauwkeurigheid nog vergroot door de stapgrootte per stap aan te passen aan de geschatte afrondingsfout. Bij 4e orde Runge-Kutta is stapverdubbeling de meest voor de hand liggende methode.

8.9 De fast Fourier transformatie

We kunnen de Fouriertransformatie van een functie benaderen als we een aantal discrete punten hebben. Stel we hebben N opeenvolgende samples $h_k = h(t_k)$, $t_k = k\Delta$, $k = 0, 1, 2, ..., N-1$. De discrete Fourier transformatie is dan gegeven door:

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \mathrm{e}^{2\pi ikn/N}$$

en de inverse Fouriertransformatie door

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \mathrm{e}^{-2\pi ikn/N}$$

Deze operatie is van orde N^2. Dit kan sneller, orde $N \cdot {}^2\log(N)$, met de Fast Fourier transformatie. Hiertoe ziet men in dat een discrete Fouriertransformatie met lengte N recursief opgedeeld kan worden in de som van 2 discrete transformaties met lengte $N/2$, één gevormd van de even punten, de ander van de oneven.

Dit is als volgt te implementeren. Het array `data[1..2*nn]` bevat op de oneven plaatsen het reële en op de even plaatsen de imaginaire delen van de invoerwaarden: `data[1]` is het reële deel en `data[2]` het imaginaire deel van f_0, etc. De volgende routine vervangt de waarden in `data` door hun discreet Fourier getransformeerden als `isign` $= 1$, en door hun invers getransformeerde elementen als `isign` $= -1$. `nn` moet een macht van 2 zijn.

```
#include <math.h>
#define SWAP(a,b) tempr=(a);(a)=(b);(b)=tempr

void FourierTransform(float data[], unsigned long nn, int isign)
{
  unsigned long n, mmax, m, j, istep, i;
  double        wtemp, wr, wpr, wpi, wi, theta;
  float         tempr, tempi;

  n = nn << 1;
  j = 1;
  for (i = 1; i < n; i += 2)
  {
    if ( j > i )
    {
      SWAP(data[j], data[i]);
      SWAP(data[j+1], data[i+1]);
    }
    m = n >> 1;
    while ( m >= 2 && j > m )
    {
      j -= m;
      m >>= 1;
    }
    j += m;
  }
  mmax = 2;
  while ( n > mmax ) /* Buitenste loop, wordt log2(nn) maal uitgevoerd */
  {
    istep = mmax << 1;
    theta = isign * (6.28318530717959/mmax);
    wtemp = sin(0.5 * theta);
    wpr   = -2.0 * wtemp * wtemp;
```

```
    wpi   = sin(theta);
    wr    = 1.0;
    wi    = 0.0;
    for (m = 1; m < mmax; m += 2)
    {
      for (i = m; i <= n; i += istep) /* Danielson-Lanczos formule */
      {
        j          = i + mmax;
        tempr      = wr * data[j]   - wi * data[j+1];
        tempi      = wr * data[j+1] + wi * data[j];
        data[j]    = data[i]   - tempr;
        data[j+1]  = data[i+1] - tempi;
        data[i]   += tempr;
        data[i+1] += tempi;
      }
      wr = (wtemp = wr) * wpr - wi * wpi + wr;
      wi = wi * wpr + wtemp * wpi + wi;
    }
    mmax=istep;
  }
}
```