

WISSELSTROOMTHEORIE

1. EENFASIGE WISSELSTROOMTHEORIE	1
1.1 Inleiding tot de wisselstroomtheorie	1
1.1.1 Periode (T)	1
1.1.2 Frequentie (f)	1
1.1.3 Momentele waarde (u, i)	1
1.1.4 Maximale en top-top waarde	2
1.1.5 Gemiddelde waarde (I_{gem} , U_{gem})	2
1.1.6 Effectieve waarde (U, I)	2
1.1.7 Verband tussen momentele en maximale waarde	3
1.1.8 Cirkelfrequentie	3
1.1.9 De gemiddelde waarde van een sinusvormige spanning	4
1.1.10 De effectieve waarde van een sinusoidale grootheid	5
1.1.11 De top- en vormfactor	6
1.1.12 Verband tussen flux en geïnduceerde spanning	7
1.1.13 fasegelijkheid	7
1.1.14 faseverschuiving	8
1.2 Het vector- of wijzerdiagram	8
1.3 Complexe rekenwijze	10
1.3.1 Inleiding	10
1.3.2 Rekenen met complexe getallen	11
1.3.3 De hoek tussen twee complexe grootheden	12
1.3.4 polaire notatie	13
1.3.5 goniometrische notatie	13
1.4 Studie van ketens op wisselspanningsgebied	14
1.4.1 Inleiding	14
1.4.2 Enkelvoudige ketens	14
1.4.3 Serieketens	19
1.4.4 Parallelketens	29
1.4.5 Gemengde ketens	37
1.4.6 Serie- en parallelschakelingen van Condensatoren en Spoelen	40
1.5 Vermogen in wisselspanningskringen	44
1.5.1 Actief, Reactief en Schijnbaar vermogen	44
1.5.2 Belang van de $\cos\varphi$	47
1.5.3 voorbeeld :	48
1.5.4 Verbetering van de $\cos\varphi$	49

2. DRIEFASIGE STROMEN EN SPANNINGEN	51
2.1 Inleiding	51
2.2 Ontstaan van een driefasige spanning	53
2.3 Basiseigenschappen van een driefasige spanning	54
2.4 Schakeling van driefasige generatoren	55
2.4.1 Sterschakeling	55
2.4.2 Driehoekschakeling	56
2.5 Schakeling van driefasige belastingen (generator in ster)	57
2.5.1 Belasting in ster	57
2.5.2 Belasting in driehoek	57
2.6 Vermogen in driefasige systemen	58
2.6.1 Algemeen	58
2.6.2 Symmetrische belasting	58
2.6.3 Meten van actief vermogen	60
2.6.4 Meten van reactief vermogen	66
2.7 Nulpuntsverplaatsing	68
2.7.1 Inleiding	68
2.7.2 Asymmetrische belasting in ster met nulgeleider	68
2.7.3 Nulpuntsverplaatsing als de nulgeleider onderbroken wordt	70
2.8 oefeningen wisselspanning	73
2.9 oefeningen driefasige systemen	76

1. Eenfasige wisselstroomtheorie

1.1 Inleiding tot de wisselstroomtheorie

Een wisselspanning (of wisselstroom) is een spanning (of stroom) die in functie van de tijd varieert.

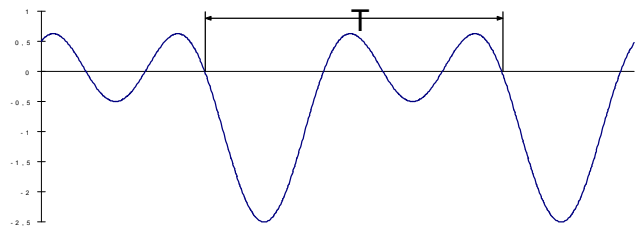
Meestal spreken we van wisselstroom (spanning) slechts als de variatie zo snel gebeurt dat de optredende verschijnselen niet meer volledig op gelijkspanningsgebied kunnen beschreven worden. Voor traag variërende signalen volstaat een studie op gelijkstroomgebied.

De in dit hoofdstuk bestudeerde signalen zijn periodieke signalen : het verloop van spanning of stroom in functie van de tijd is periodiek.

Dergelijke signalen worden gekarakteriseerd door de volgende begrippen :

1.1.1 Periode (T)

Onder één periode verstaan we de tijdsduur (in seconden) tussen twee opeenvolgende tijdstippen waarop de spanning (of stroom) op dezelfde wijze door nul gaat, of op dezelfde wijze een minimale of maximale waarde bereikt.



Figuur 1 : de periode van een wisselspanning

Bij een periodiek signaal herhaalt het verloop van spanning of stroom in functie van de tijd zich dus in elke periode.

1.1.2 Frequentie (f)

De frequentie van een periodieke stroom of spanning is het aantal perioden dat per seconde doorlopen wordt.

$$f = \frac{1}{T} \text{ [Hz]}$$

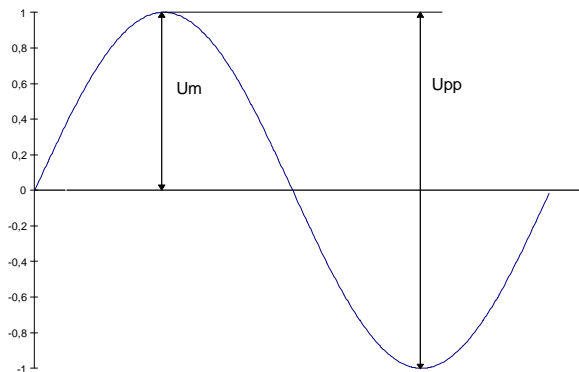
1.1.3 Momentele waarde (u, i)

De waarde die een veranderlijke grootheid op een zeker ogenblik heeft, is de momentele of ogenblikkelijke waarde. Als symbool gebruiken we een kleine letter.

voorbeeld : u_1 is de spanning op het ogenblik t_1

1.1.4 Maximale en top-top waarde

De maximale waarde of topwaarde van een in de tijd veranderlijke spanning is de uiterste waarde van de spanning. Als symbool gebruiken we U_{\max} , of U_m .



Figuur 2 : maximale op topwaarde U_m , top-top waarde U_{pp}

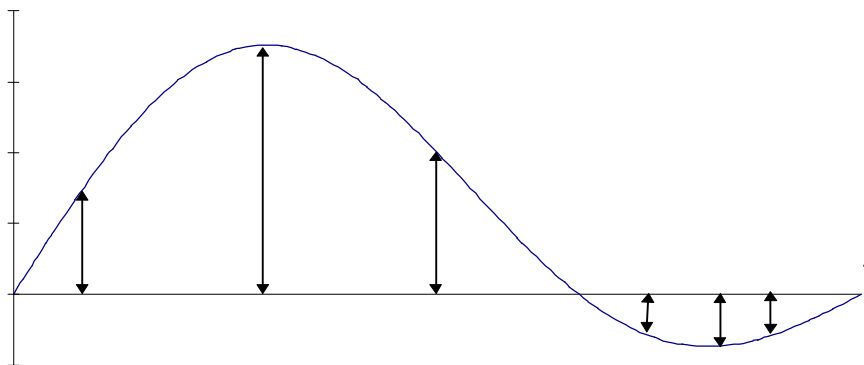
Als de maximale waarde in positieve en negatieve zin even groot, dan spreken we ook wel van 'amplitude'.

Het spanningsverschil tussen de maximale en de minimale waarde noemen we de top-tot-top waarde U_{tt} of U_{pp} . (piek-piek)

1.1.5 Gemiddelde waarde (I_{gem} , U_{gem})

De gemiddelde waarde I_{gem} van een willekeurige stroom kan geschreven worden als :

$$I_{gem} = \frac{\sum i}{n} = \frac{i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6}{6}$$



Figuur 3 : willekeurige wisselstroom -gemiddelde berekenen-

Als symbool gebruiken we U_{gem} , I_{gem} of U_{av} , I_{av} (Average)

1.1.6 Effectieve waarde (U, I)

De effectieve waarde van een periodieke stroom of spanning is de waarde die een gelijkstroom of -spanning zou moeten bezitten om in een weerstand hetzelfde vermogen te ontwikkelen.

Als symbolen gebruiken we I_{eff} , U_{eff} of kortweg I, U.

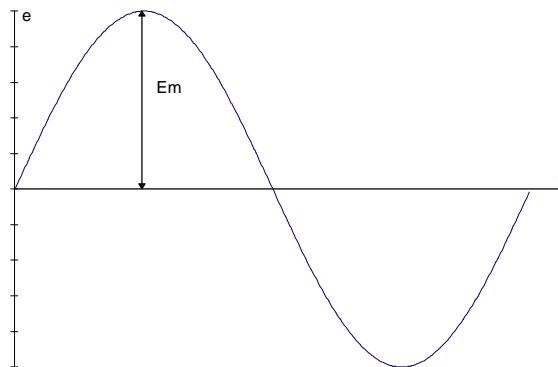
1.1.7 Verband tussen momentele en maximale waarde

Uit het hoofdstuk magnetisme weten we dat in een roterende winding in een magnetisch veld een sinusvormige spanning opgewekt wordt, indien de winding met een constante hoeksnelheid in een homogeen magnetisch veld roteert.

De momentele waarde is dan $e = E_m \cdot \sin \alpha$.

Roteert de winding met een hoeksnelheid ω (rad/sec), dan is in t sec de doorlopen hoek $\alpha = \omega \cdot t$

$$\begin{array}{l} e = E_m \cdot \sin \omega t \\ u = U_m \cdot \sin \omega t \end{array}$$



Figuur 4 : sinusvormige wisselspanning

1.1.8 Cirkelfrequentie

Onder de cirkelfrequentie van een wisselstroom of -spanning verstaan we het aantal radialen dat per seconde doorlopen wordt.

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

In 1 periode T wordt een hoek $\alpha = 360^\circ$ doorlopen. dit komt overeen met 2π radialen.

De tijdsduur t voor het doorlopen van deze hoek is de periode T .

ingevuld in de bovenstaande formule geeft dit :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ met } T = \frac{1}{f}$$

$$\boxed{\omega = 2 \cdot \pi \cdot f} \text{ rad/s}$$

voorbeeld 1 :

Een wisselspanning heeft een maximale waarde van 100V en $f=50\text{Hz}$. Bereken :

- de cirkelfrequentie
- de doorlopen hoek na $1/1200\text{s}$ in radialen en graden.
- de spanning op dat tijdstip

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 314 \text{ rad / s}$$

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \alpha = \omega \cdot t = 314 \text{ rad / s} \cdot \frac{1}{1200} \text{ s} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

$$2 \cdot \pi \text{ rad} = 360^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{12} \cdot \text{rad} = \frac{\pi}{12} \cdot 180 = 15^\circ$$

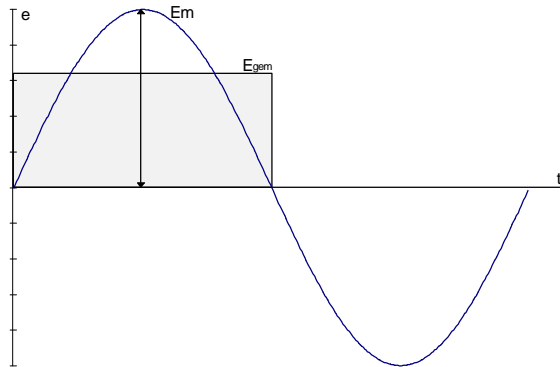
$$u = U_m \cdot \sin \omega t = 100 \cdot \sin 15^\circ = 25,88 \text{ V}$$

1.1.9 De gemiddelde waarde van een sinusvormige spanning

De gemiddelde waarde van een sinusoidale spanning of stroom wordt nooit over de ganse periode berekend, omdat die nul is.

Voor een halve periode kunnen we ze berekenen.

E_{gem} is de gemiddelde waarde als de oppervlakte onder E_{gem} in de grafiek $E = f(t)$ even groot is als de oppervlakte onder $e = E_m \cdot \sin \omega t$. (zie figuur 5)



Figuur 5 : gemiddelde waarde van een sinusoidale grootheid

We kunnen dus E_{gem} over een tijd $\omega \cdot t = \pi$ ($= 180^\circ$) berekenen uit :

$$\begin{aligned} E_{gem} &= \frac{\int_0^p E_m \cdot \sin \omega t \, d\omega t}{p} \\ &= -\frac{E_m}{p} \cdot \cos \omega t \Big|_0^p \\ &= -\frac{E_m}{p} \cdot (-1 - 1) \end{aligned}$$

$$E_{gem} = \frac{2}{p} \cdot E_m = 0,636 \cdot E_m$$

De bovenstaande vergelijking geldt ook voor andere sinusvormige grootheden, bijvoorbeeld voor de stroom I .

$$I_{gem} = \frac{2}{p} \cdot I_m = 0,636 \cdot I_m$$

1.1.10 De effectieve waarde van een sinusoidale grootheid

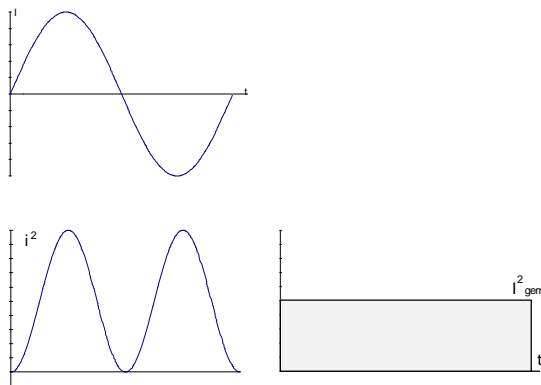
De effectieve waarde van een stroom is die waarde die een gelijkstroom moet hebben om in een weerstand een gelijk vermogen te ontwikkelen.

$$I_{\text{eff}}^2 \cdot R = i^2 \cdot R$$

Hieruit berekenen we :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{(i^2)_{\text{gem}}}$$

Onderstaande figuur geeft het verloop van $i = f(t)$ en $i^2 = f(t)$ weer, samen met de gemiddelde waarde van i^2 .



Figuur 6 : effectieve waarde van een sinusvormige grootheid

In deze figuur zien we dat :

$$[i^2]_{\text{gem}} = \frac{1}{2} [I_m]^2$$

We kunnen dus schrijven dat :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2} I_m^2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m$$

De effectieve spanning kunnen we ook berekenen uit :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2} U_m^2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_m$$

De effectieve waarde kunnen we ook berekenen zonder gebruik te maken van bovenstaande figuur :

uit de formules

$$i = I_m \sin \omega t$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{(i^2)_{\text{gem}}}$$

berekenen we :

$$[i^2]_{\text{gem}} = [(I_m \sin \omega t)^2]_{\text{gem}} = [(I_m^2 \sin^2 \omega t)]_{\text{gem}}$$

vanuit de goniometrie weten we bovendien dat :

$$\cos 2\omega t = 1 - 2 \sin^2 \omega t \Rightarrow \sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$$

zodat :

$$[i^2]_{gem} = \left[I_m^2 \cdot \left(\frac{1 - 2 \cdot \cos 2\omega t}{2} \right) \right]_{gem}$$
$$= \left[\frac{I_m^2}{2} \right]_{gem} + \left[-\frac{I_m^2}{2} \cdot \cos 2\omega t \right]_{gem}$$

De tweede term in deze formule is over 1 periode gezien gelijk aan nul, zodat alleen de volgende formule over blijft :

$$[i^2]_{gem} = \frac{I_m^2}{2}$$

$$I_{eff} = \sqrt{[i^2]_{gem}} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m$$

Voorbeeld 2 :

gegeven : $i = 100 \cdot \sin 628 \cdot t$

gevraagd :

- de gemiddelde waarde
- de effectieve waarde
- de frequentie
- de momentele waarde na 5 ms.

oplossing :

$$i = I_m \cdot \sin \omega t$$

- $I_{gem} = 0,636 \cdot I_m = 0,636 \cdot 100 \text{ A} = 63,6 \text{ A}$
- $I_{eff} = 0,707 \cdot I_m = 0,707 \cdot 100 \text{ A} = 70,7 \text{ A}$
- $\omega = 628 \text{ rad/s} \Rightarrow f = \omega/2\pi = 100 \text{ Hz}$
- $i = 100 \cdot \sin 628 \cdot t = 100 \cdot \sin (628 \cdot 0,005)$
 $i = 100 \cdot \sin \pi = 100 \cdot \sin 180^\circ = 0 \text{ A}$

1.1.11 De top- en vormfactor

De topfactor f_t is de verhouding tussen de maximale en de effectieve waarde van een periodiek veranderlijke grootte.

$$f_t = \frac{U_{max}}{U_{eff}} \text{ voor een sinusvormige spanning geeft dit : } f_t = \frac{U_{max}}{U_{eff}} = \sqrt{2}$$

De vormfactor f_v is de verhouding tussen de effectieve en de gemiddelde waarde van een periodiek veranderlijke grootte.

$$f_v = \frac{U_{eff}}{U_{gem}} \text{ voor een sinusvormige spanning geeft dit : } f_v = \frac{U_{eff}}{U_{gem}} = \frac{0,707 \cdot U_m}{0,636 \cdot U_m} = 1,11$$

1.1.12 Verband tussen flux en geïnduceerde spanning

Uit het hoofdstuk magnetisme weten we dat :

$$E_m = B \cdot A \cdot \omega = \omega \cdot \mathbf{f}_m$$

Voor de effectieve waarde van de spanning geldt dan :

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot \omega \cdot \mathbf{f}_m = 0,707 \cdot 2 \cdot \mathbf{p} \cdot f \cdot \mathbf{f}_m$$

Dit geeft :

$$E = 4,44 \cdot f \cdot \mathbf{f}_m \cdot N$$

voor een spoel met N windingen, die roteert met een frequentie f, en waardoor een maximale flux φ_m gaat.

1.1.13 fasegelijkheid

Als we een toestel op wisselspanning aansluiten, dan zal door dit toestel een wisselstroom vloeien.

De tijdstippen waarop de waarden van spanning en stroom nul worden, noemt men de **nuldoorgangen**.

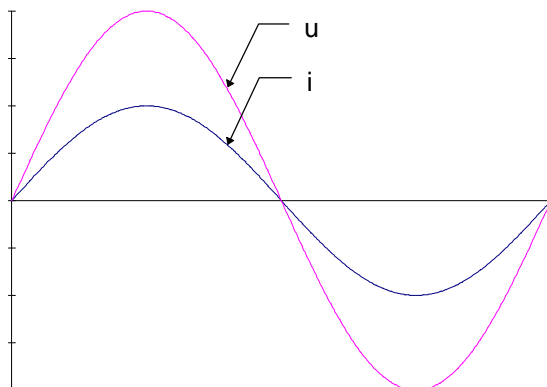
Als het verloop van spanning en stroom zodanig is dat de nuldoorgangen samenvallen, en de stroom op dezelfde tijdstippen hun uiterste waarden bereiken, zowel in positieve als in negatieve zin, dan spreken we van fasegelijkheid.

We zeggen dan dat stroom en spanning **in fase** zijn.

De volgende stroom en spanning zijn in fase :

$$u = U_m \cdot \sin \omega t$$

$$i = I_m \cdot \sin \omega t$$



Figuur 7 : fasegelijkheid

1.1.14 faseverschuiving

Als spanning en stroom niet gelijktijdig hun maximale of nulwaarde bereiken, dan is er sprake van faseverschuiving.

Stroom en spanning zijn dan in fase verschoven.

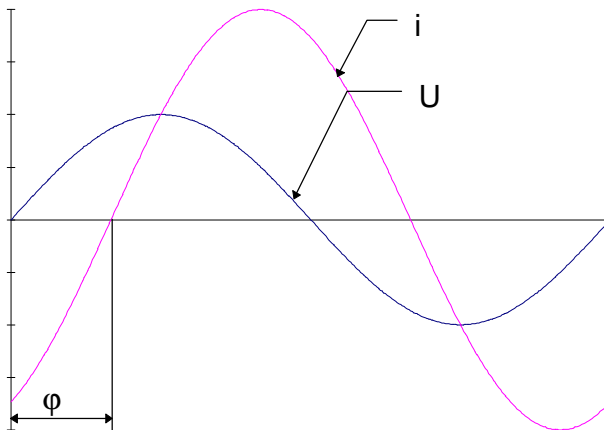
Afhankelijk van het feit of de stroom i eerder of later zijn maximum bereikt, zeggen we dat de stroom i voor- of naijlt ten opzichte van de spanning.

Voor sinusoidale spanningen en stromen kunnen we deze faseverschuiving uitdrukken in graden (een periode is 360 graden) Als symbool voor faseverschuiving gebruiken we dan φ .

Voor een stroom die een hoek φ naijlt op de spanning schrijven we :

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{indien} \quad u = U_m \cdot \sin\omega t$$

In de onderstaande figuur ijlt de stroom 60° na op de spanning.



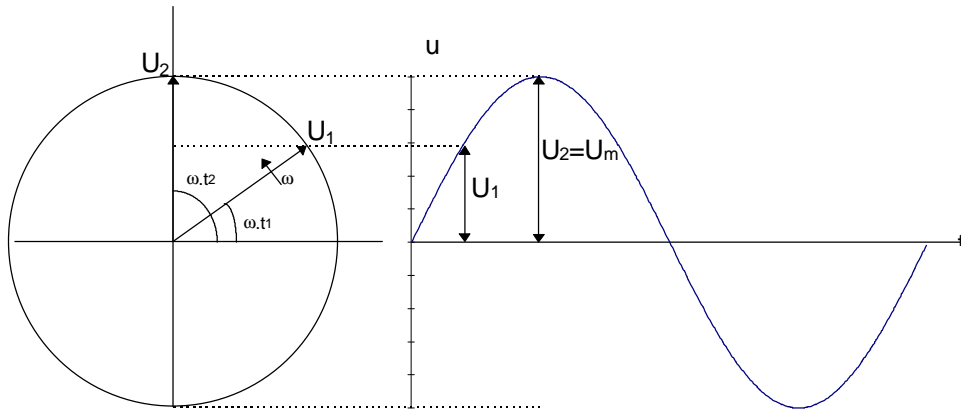
Figuur 8 : faseverschuiving (i ijlt na op u, of u ijlt voor op i)

1.2 Het vector- of wijzerdiagram

Een wisselstroomgrootheid kan men door een draaiende vector voorstellen.

Een vector is een lijnstuk met een lengte, een richting en een zin.

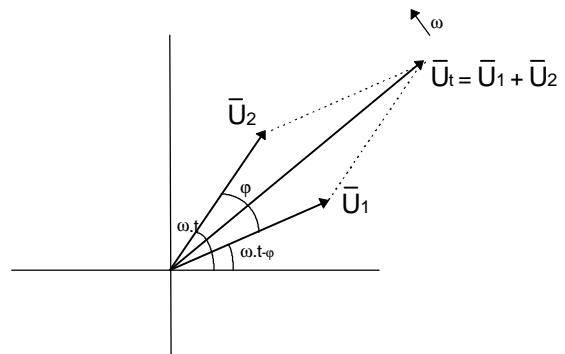
Voor de lengte van de vector nemen we U_m of I_m . We laten deze vector nu roteren met een hoeksnelheid ω tegen de wijzers van de klok in.



Om duidelijk aan te geven dat stroom en spanning vectorieel moeten beschouwd worden, gebruiken we \vec{I} en \vec{U} .

Indien twee vectoren met dezelfde snelheid en dezelfde richting ronddraaien, zullen ze ten opzichte van elkaar niet van stand veranderen. We kunnen ze samen voorstellen in een vectordiagram.

Optellen of aftrekken van twee sinusvormige grootheden van gelijke frequentie geeft weer een sinusvormige grootheid met dezelfde frequentie.

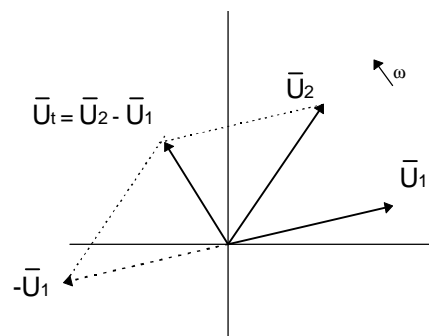


Figuur 9 : optellen van vectoren

Een verschil van vectoren kan omgevormd worden tot een som :

$$U_3 = \vec{U}_2 - \vec{U}_1$$

$$\Rightarrow \vec{U}_2 + (-\vec{U}_1)$$



Figuur 10 : aftrekken van vectoren

In plaats van maximale waarden in het vectordiagram uit te zetten, gebeurt dit ook met effectieve waarden. De werkwijze blijft identiek : de eigenschappen die gelden voor maximale waarden, gelden ook voor effectieve.

1.3 Complexe rekenwijze

1.3.1 Inleiding

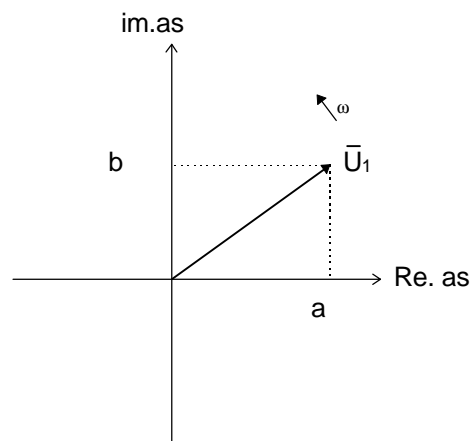
Een vector kunnen we ontbinden in een horizontale en een verticale componente.

Als we deze vector voorstellen in het complexe vlak, dan noemen we de horizontale componente reëel, de verticale componente imaginair. De horizontale as is dan ook de reële, de verticale is de imaginaire as.

In de figuur hiernaast kan de spanning \bar{U}_1 geschreven worden als :

$$\bar{U}_1 = a + j.b$$

waarbij b de projectie van de vector op de imaginaire as is, en a de projectie op de reële as.



De tekens van a en b bepalen in welk kwadrant de vector ligt.

Figuur 11 : vector in het complexe vlak

a	b	kwadrant
positief	positief	eerste
negatief	positief	tweede
negatief	negatief	derde
positief	negatief	vierde

De lengte van de vector kan berekend worden uit :

$$|U| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

deze waarde wordt de absolute waarde of modulus genoemd.

De hoek tussen de vector en de positieve reële as kan berekend worden met :

$$j = \text{tg} \left(\frac{b}{a} \right)$$

deze waarde noemen we het argument.

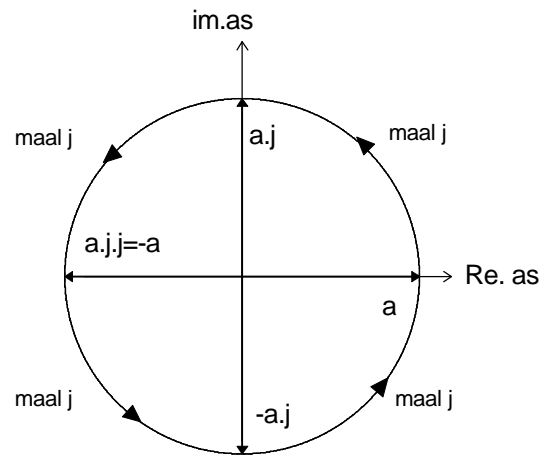
De vermenigvuldiging met de operator j verdraait een vector over een hoek van 90° in tegenwijzerzin (linksom).

voorbeeld : een vector $\bar{U} = a$ die we vermenigvuldigen met j : $\overline{U \cdot j} = a \cdot j$

Merk op dat

$$j \cdot j = j^2 = -1$$

$$a \cdot j \cdot j = -a$$



Figuur 12 : vermenigvuldigen met j

1.3.2 Rekenen met complexe getallen

1.3.2.1 Optellen en aftrekken

De som van twee complexe getallen wordt bekomen door de reële delen bij elkaar op te tellen en de imaginaire delen met elkaar op te tellen.

$$\text{als } \bar{U}_1 = a_1 + j \cdot b_1 \text{ en } \bar{U}_2 = a_2 + j \cdot b_2 \\ \text{dan is } \bar{U}_1 + \bar{U}_2 = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$$

Het verschil wordt bekomen door resp. de reële delen en de imaginaire delen van elkaar af te trekken.

$$\bar{U}_1 - \bar{U}_2 = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$$

1.3.2.2 Vermenigvuldigen en delen

Bij een vermenigvuldiging vermenigvuldigen we alle termen onderling :

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 \cdot \bar{U}_2 &= (a_1 + j \cdot b_1) \cdot (a_2 + j \cdot b_2) \\ &= a_1 \cdot a_2 + j \cdot a_1 \cdot b_2 + j \cdot a_2 \cdot b_1 + j \cdot j \cdot b_1 \cdot b_2 \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + j \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \end{aligned}$$

Bij de deling kunnen we de complexe noemer elimineren door te vermenigvuldigen met het complex toegevoegde van de noemer.

$$\begin{aligned}\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} &= \frac{a_1 + j.b_1}{a_2 + j.b_2} \\ &= \frac{(a_1 + j.b_1).(a_2 - j.b_2)}{(a_2 + j.b_2).(a_2 - j.b_2)} \\ &= \frac{(a_1.a_2 + b_1.b_2) + j.(a_2.b_1 - a_1.b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)}\end{aligned}$$

voorbeeld :

$$\bar{U}_1 = 3 + j.4$$

$$\bar{U}_2 = 5 + j.6$$

$$\bar{U}_1 + \bar{U}_2 = 8 + j.10$$

$$\bar{U}_1 - \bar{U}_2 = -2 - j.2$$

$$\bar{U}_1 . \bar{U}_2 = 15 + j.20 + j.18 + j^2 . 24 = -9 + j.38$$

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = \frac{(3 + j.4)(5 - j.6)}{25 + 36} = \frac{15 - j.18 + j.20 - j^2 . 24}{61} = \frac{39 + j.2}{61} = 0,639 + j.0,033$$

1.3.3 De hoek tussen twee complexe grootheden

Om de faseverschuiving (hoek) tussen twee complexe grootheden te bepalen, kunnen we de hoek van elk van deze grootheden ten opzichte van de reële as berekenen, en dan deze hoeken van elkaar aftrekken.

voorbeeld :

voor de eerste grootheid :

$$\bar{U}_1 = 3 + j.6$$

$$j_1 = b \operatorname{gtg} \left(\frac{6}{3} \right) = 2$$

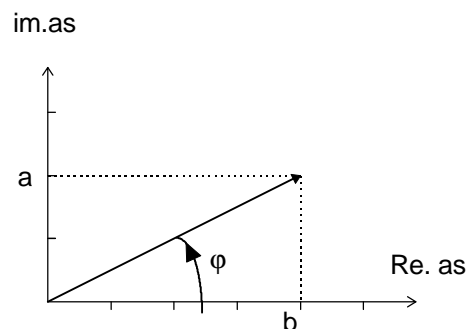
$$j_1 = 63^\circ 26'$$

voor de tweede grootheid :

$$\bar{U}_2 = 4 + j.2$$

$$j_2 = b \operatorname{gtg} \left(\frac{2}{4} \right) = 0,5$$

$$j_2 = 26^\circ 34'$$



Figuur 13 : hoek tussen twee grootheden

De hoek tussen de twee grootheden is dan :

$$j = j_1 - j_2 = 63^\circ 26' - 26^\circ 34' = 36^\circ 52'$$

1.3.4 polaire notatie

1.3.4.1 Inleiding

Een wisselspanningsgrootheid kan behalve vectorieel en complex ook nog met een polaire notatie voorgesteld worden.

$U = \text{modulus} \angle \text{argument}$

waarin de modulus de lengte van een vector is en het argument de hoek ten opzichte van de (positieve) horizontale as.

voorbeeld :

$U = 3 + j.4$ kunnen we ook schrijven als $U = 5 \angle 53,13^\circ$.

immers : modulus = $\sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$ en argument = $\text{bgtg} \frac{4}{3} = 53,13^\circ$

1.3.4.2 vermenigvuldigen en delen

Deze polaire voorstellingswijze is bijzonder interessant voor vermenigvuldiging en deling van wisselspanningsgrootheden.

Bij de vermenigvuldiging moeten de moduli vermenigvuldigd en de argumenten opgeteld worden.

Bij de deling moeten de moduli gedeeld, en de argumenten afgetrokken worden.

$$U = U_1 \cdot U_2 = a \cdot b \angle \varphi_1 + \varphi_2$$

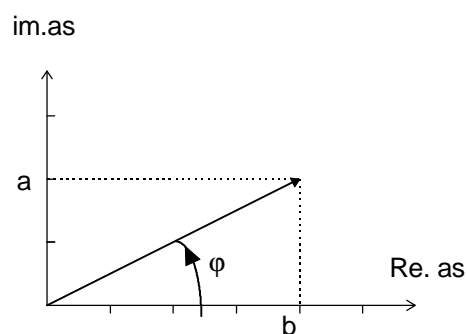
$$U = \frac{U_1}{U_2} = \frac{a}{b} \angle \varphi_1 - \varphi_2$$

1.3.5 goniometrische notatie

De goniometrische notatie sluit nauw aan bij de complexe notatie.

$\bar{U} = a + b.j$ kunnen we schrijven als

$\bar{U} = U \cdot \cos\varphi + j \cdot U \cdot \sin\varphi$ (zie figuur)



Figuur 14 : goniometrische notatie

1.4 Studie van ketens op wisselspanningsgebied

1.4.1 Inleiding

Met de hierboven aangehaalde basisprincipes en technieken kunnen we het gedrag van enkelvoudige en samengestelde ketens op wisselspanningsgebied berekenen.

Voor de berekeningen in de cursus baseren we ons hoofdzakelijk op de complexe voorstelling en rekenwijze. Een berekening met behulp van andere voorstellingswijzen is natuurlijk even goed mogelijk. Daarom zal regelmatig een band gelegd worden met deze andere technieken en voorstellingswijzen.

1.4.2 Enkelvoudige ketens

1.4.2.1 De ohmse keten

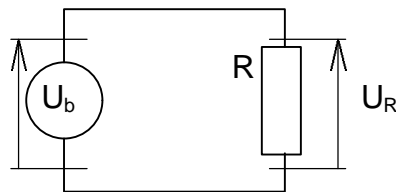
Schakelen we een wisselspanningsbron en een ohmse weerstand in serie zoals in figuur 15, dan weten we dat op elk ogenblik de bronspanning u_b gelijk is aan de spanning over de weerstand u_R . Deze spanning varieert voortdurend. In de notatie gebruiken we dan ook kleine letters.

Voor een gebruikelijke sinusvormige spanning kunnen we schrijven dat :

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t)$$

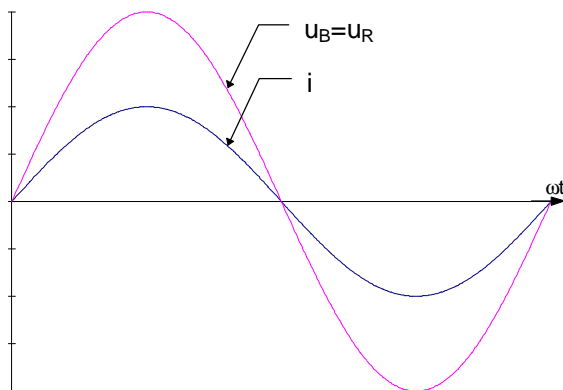
$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin(\omega t)$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t)$$



Figuur 15 : Ohmse weerstand op wisselspanning

Stroom en spanning verlopen dus beiden sinusvormig, en in fase.



Figuur 16 : spanning en stroomverloop in ohmse keten

Stroom en spanning kunnen we ook in het complexe vlak voorstellen. In principe tekenen we dan vectoren met lengte U_m en I_m . Omdat we in wisselspanningssystemen echter meestal met effectieve waarden werken, worden in het vectordiagram deze effectieve waarden getekend.

Meestal wordt als referentiepunt het tijdstip $t=0$ genomen, zodat sinusvormige grootheden horizontaal getekend worden. Dit hoeft echter niet noodzakelijk zo te zijn.



Figuur 17 : vectordiagram ohmse keten

Het vermogen in dergelijke kring kan steeds berekend worden uit :

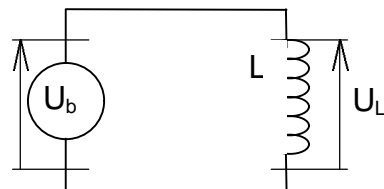
$$P=I.U \text{ (effectieve waarden)} = R.I^2$$

1.4.2.2 De zuiver inductieve keten

Uit het voorgaande weten we reeds dat :

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t)$$

$$u_L = N \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$



Figuur 18 : zuiver inductieve keten

uit combinatie van deze vergelijkingen vinden we :

$$\Rightarrow U_m \cdot \sin(\omega t) \cdot dt = L \cdot di$$

$$\Rightarrow \frac{U_m}{\omega} \cdot \int \sin(\omega t) \cdot d\omega t = L \cdot \int di$$

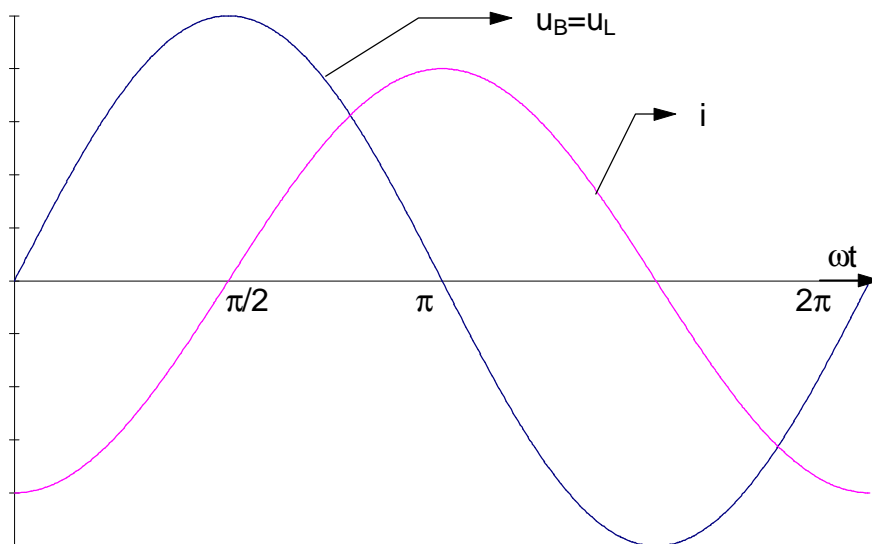
$$\Rightarrow -\frac{U_m}{\omega} \cdot \cos(\omega t) = L \cdot i$$

$$\Rightarrow i = -\frac{U_m}{L \cdot \omega} \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow i = I_m \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{met } I_m = \frac{U_m}{L \cdot \omega} \quad \text{of} \quad I = \frac{U}{\omega \cdot L} \quad (\text{voor de effectieve waarden})$$

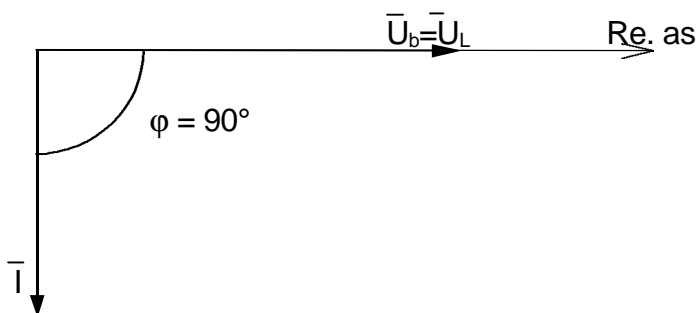
Hierin zien we dat de stroom 90° naeft op de spanning. Dit geeft ons het volgende verloop van stroom en spanning



Figuur 19 : spannings- en stroomverloop zuiver inductieve keten

In een vectordiagram kunnen we dit op de volgende manier voorstellen :

We nemen de aangelegde spanning als referentie, en leggen deze referentiespanning op de horizontale (reële) as. De stroom ijft 90° na.



Figuur 20 : vectordiagram zuiver inductieve keten

In de complexe notatie voor stroom en spanning kunnen we de faseverschuiving van 90 graden zien als een vermenigvuldiging met j .

$$\bar{U} = j \cdot \omega \cdot L \cdot \bar{I}$$

waarin $j \cdot \omega \cdot L$ de *impedantie van de spoel* (\bar{Z}) of kortweg *inductantie* (\bar{X}_L) genoemd wordt.

Voor een ideale spoel is de totale impedantie \bar{Z} gelijk aan de inductantie.

$$\boxed{\bar{Z} = \bar{X}_L = j \cdot \omega \cdot L}$$

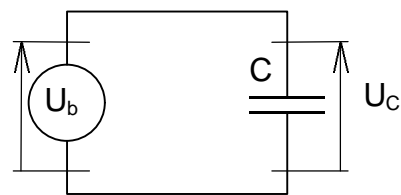
$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{j \cdot \omega \cdot L} = \frac{\bar{U}}{X_L} = \frac{\bar{U}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L}$$

1.4.2.3 De zuiver capacatieve keten

Uit het voorgaande weten we reeds dat :

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t)$$

$$q = C \cdot u_c$$



Figuur 21 : zuiver capacatieve keten

uit combinatie van deze vergelijkingen vinden we :

$$\Rightarrow q = C \cdot U_m \cdot \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = c \cdot \frac{du}{dt} = \omega \cdot C \cdot U_m \cdot \cos(\omega t)$$

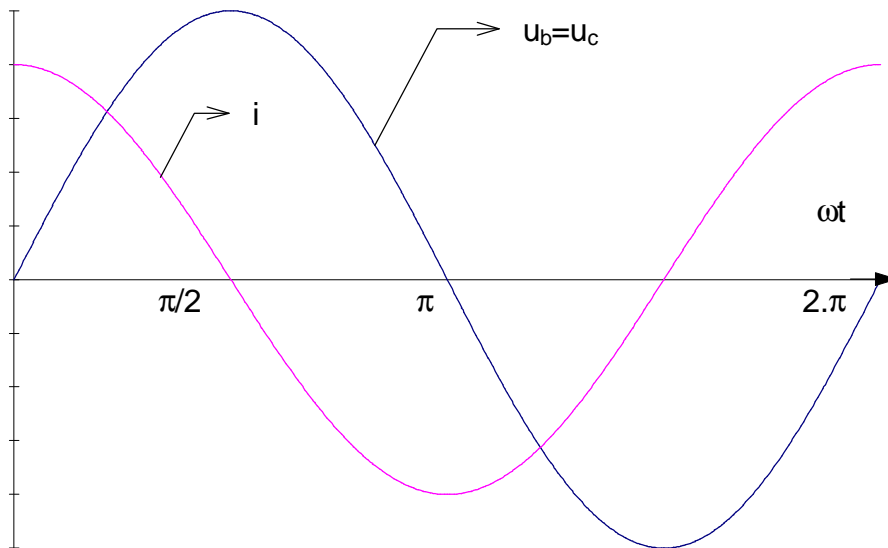
$$\Rightarrow i = \omega \cdot C \cdot U_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow i = I_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{met } I_m = \omega \cdot C \cdot U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega \cdot C}}$$

$$\text{of } I = \omega \cdot C \cdot U = \frac{U}{\frac{1}{\omega \cdot C}} \quad (\text{voor de effectieve waarden})$$

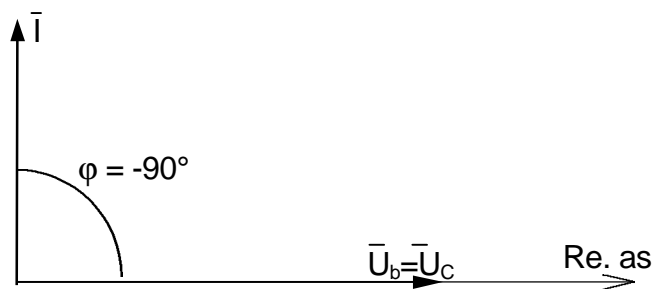
Hierin zien we dat de stroom 90° voor ijt op de spanning. Dit geeft ons het volgende verloop van stroom en spanning



Figuur 22 : spannings- en stroomverloop zuiver capacitieve keten

In een vectordiagram kunnen we dit op de volgende manier voorstellen :

We nemen de aangelegde spanning als referentie, en leggen deze referentiespanning op de horizontale (reële) as. De stroom ijt 90° voor.



Figuur 23 : vectordiagram zuiver capacitieve keten

In de complexe notatie voor stroom en spanning kunnen we de faseverschuiving van 90 graden zien als een vermenigvuldiging met j .

$$\bar{I} = j \cdot \omega \cdot C \cdot \bar{U}$$

$$\bar{U} = \bar{I} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \bar{I} \cdot \bar{Z}$$

waarin $\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$ de *impedantie van de condensator* (\bar{Z}) of kortweg *capacitantie* (\bar{X}_c) genoemd wordt.

Voor een ideale condensator is de totale impedantie \bar{Z} gelijk aan de capacitantie.

$$\bar{Z} = \bar{X}_c = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = -\frac{j}{\omega \cdot C}$$

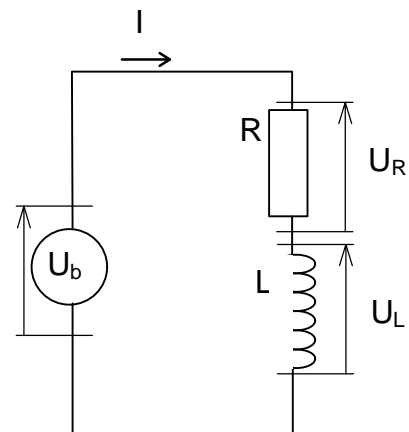
$$\bar{I} = \bar{U} \cdot j \cdot \omega \cdot C = \frac{\bar{U}}{X_c} = \frac{\bar{U}}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$

1.4.3 Serieketens

1.4.3.1 De R-L serieketen

Schakelen we met een wisselspanningsbron een ohmse weerstand en een spoel in serie zoals in figuur 24, dan weten we dat op elk ogenblik de bronspanning u_b gelijk is aan de spanning over de weerstand en de spoel samen. Deze spanning varieert voortdurend. In de notatie gebruiken we dan ook kleine letters.

$$u_b = u_R + u_L$$



Figuur 24 : weerstand en spoel in serie

Voor een gebruikelijke sinusvormige spanning kunnen we op basis van het voorgaande de spanningen en stromen met een complexe notatie weergeven.

$$u_R = i \cdot R$$

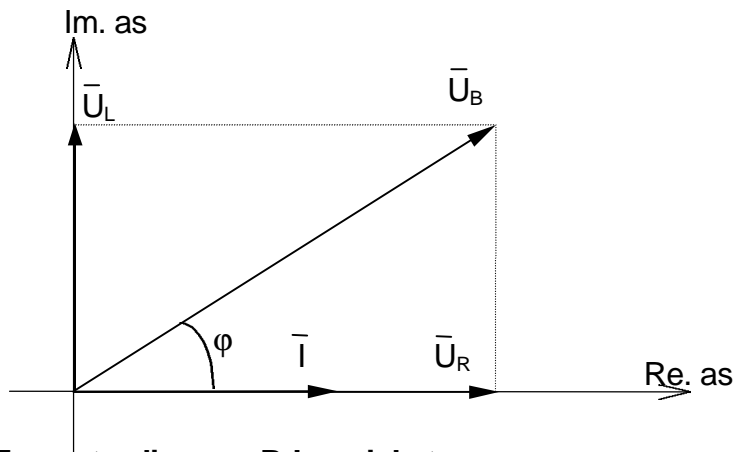
$$u_L = i \cdot X_L = i \cdot j \cdot \omega \cdot L$$

$$u = u_R + u_L = i \cdot R + i \cdot j \omega \cdot L$$

$$\bar{U} = \bar{I} \cdot (R + j \cdot \omega \cdot L) = \bar{I} \cdot \bar{Z}$$

waarin \bar{Z} de totale impedantie van de serieketen is.

In het vectordiagram tekenen we de spanning u_b als de som van de spanning over de weerstand en de spoel. De spanning op de weerstand is in fase met de stroom, de spanning op de spoel is 90° voorijlend.



Figuur 25 : vectordiagram R-L serieketen

de **stroom I** kunnen we berekenen uit :

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{U}}{R + j \cdot \omega \cdot L}$$

modulus en argument berekenen we met :

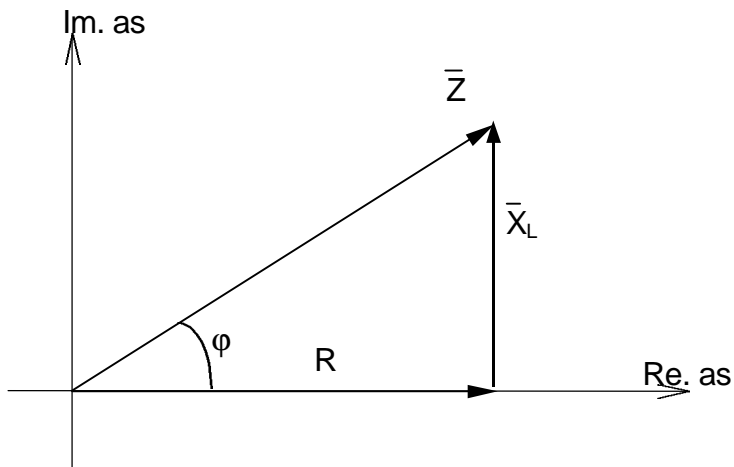
$$|I| = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}}$$

$$j = \text{bgtg} \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \text{bgtg} \frac{\omega \cdot L}{R}$$

de **impedantie Z** van de seriekring is de vectoriële som van de impedanties van de afzonderlijke elementen:

$$\boxed{Z = R + X_L = R + j \cdot \omega \cdot L}$$

Ook deze impedanties kunnen we uittekenen in het complexe vlak. Dit resulteert in de zogenaamde **impedantiedriehoek**.



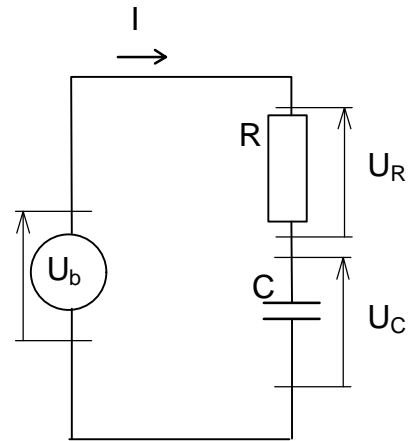
Figuur 26 : impedantiedriehoek bij R-L serieschakeling

De grootte van de impedantie (argument) kunnen we berekenen.

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

1.4.3.2 De R-C serieketen

Schakelen we met een wisselspanningsbron een ohmse weerstand en een condensator in serie zoals in figuur 27, dan weten we dat op elk ogenblik de bronspanning u_b gelijk is aan de spanning over de weerstand en de condensator samen. Deze spanning varieert voortdurend. In de notatie gebruiken we dan ook kleine letters. De stroom I gaat door beide componenten.



$$u_b = u_R + u_C$$

Figuur 27 : weerstand en spoel in serie

Voor een gebruikelijke sinusvormige spanning kunnen we op basis van het voorgaande de spanningen en stromen met een complexe notatie weergeven.

$$u_R = i \cdot R$$

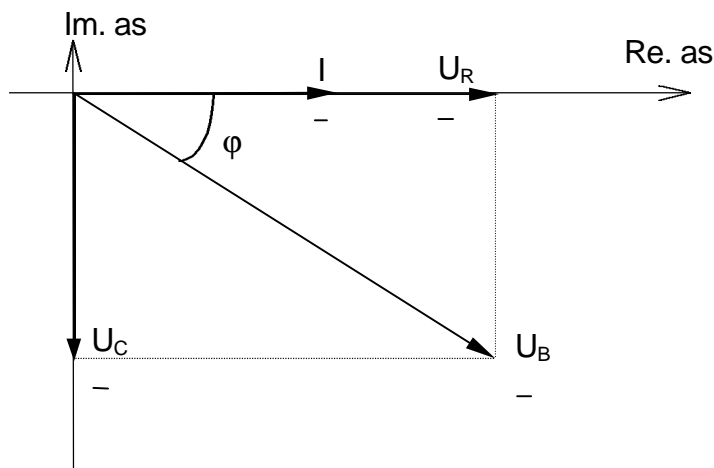
$$u_C = i \cdot X_C = i \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

$$u = u_R + u_C = i \cdot R + i \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

$$\bar{U} = \bar{I} \cdot \left(R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \right) = \bar{I} \cdot \bar{Z}$$

waarin \bar{Z} de totale impedantie van de serieketen is.

In het vectordiagram tekenen we de spanning u_b als de som van de spanning over de weerstand en de condensator. De spanning op de weerstand is in fase met de stroom, de spanning op de condensator is 90° naijlend.



Figuur 28 : vectordiagram R-C serieketen

de **stroom I** kunnen we berekenen uit :

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{U}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$

modulus en argument berekenen we met :

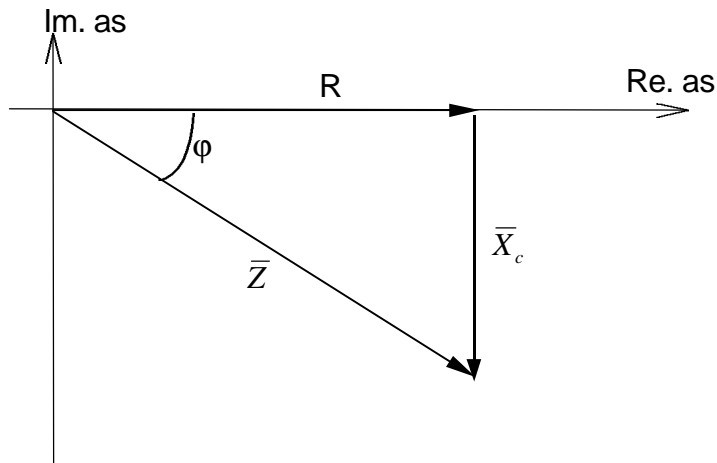
$$|I| = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}$$

$$\mathbf{j} = \text{bgtg} \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \text{bgtg} \frac{1}{R \cdot \omega \cdot C}$$

de **impedantie** \bar{Z} van de seriekring is de som van de impedanties van de afzonderlijke elementen:

$$\bar{Z} = \bar{R} + \bar{X}_c = R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

Ook deze impedanties kunnen we uittekenen in het complexe vlak. Dit resulteert in de volgende **impedantiedriehoek**.



Figuur 29 : impedantiedriehoek R-C serieketen

De grootte van de impedantie (argument) kunnen we berekenen.

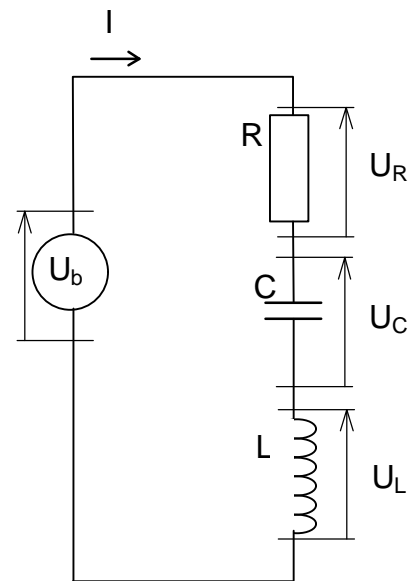
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

1.4.3.3 De R-L-C serieketen

Schakelen we met een wisselspanningsbron een ohmse weerstand met een condensator en een spoel in serie zoals in figuur 30, dan weten we dat op elk ogenblik de bronspanning u_b gelijk is aan de spanning over de weerstand en de condensator samen. Deze spanning varieert voortdurend. In de notatie gebruiken we dan ook kleine letters. De stroom I gaat door alle componenten.

$$u_b = u_R + u_C + u_L$$

Voor een gebruikelijke sinusvormige spanning kunnen we op basis van het voorgaande de spanningen en stromen met een complexe notatie weergeven.



Figuur 30 : R-L-C serieketen

$$u_R = i \cdot R$$

$$u_C = i \cdot X_C = i \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

$$u_L = i \cdot X_L = i \cdot j \omega \cdot L$$

$$u = u_R + u_C + u_L = i \cdot R + i \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + i \cdot j \cdot \omega \cdot L$$

$$\boxed{\bar{U} = \bar{I} \cdot \left(R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + j \cdot \omega \cdot L \right) = \bar{I} \cdot \bar{Z}}$$

waarin \bar{Z} de totale impedantie van de serieketen is.

$$\bar{Z} = R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + j \cdot \omega \cdot L$$

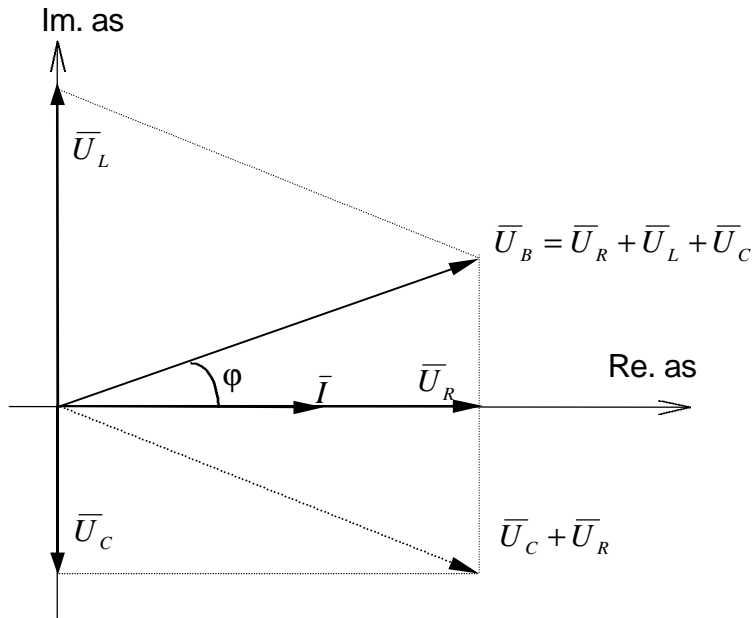
In het vectordiagram tekenen we de stroom i , die door de drie elementen vloeit, als referentie op de horizontale as. De spanning op de weerstand is in fase met de stroom, de spanning op de condensator is 90° naijlend, en die op de spoel 90° voorijlend.

Er kunnen zich nu drie situaties voordoen, die we achtereenvolgens bespreken.

- De impedantie van de spoel is groter dan die van de condensator.
- De impedantie van de spoel is kleiner dan die van de condensator
- beide impedanties zijn precies even groot (maar tegengesteld gericht in het complexe vlak !)

1.4.3.3.1 De impedantie van de spoel is groter dan die van de condensator

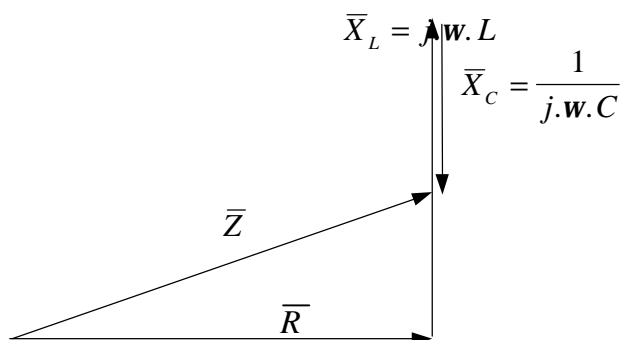
Uit de voorgaande berekeningen zien we dat dan ook de spanning over de spoel groter is dan die over de condensator. In het vectordiagram geeft dit :



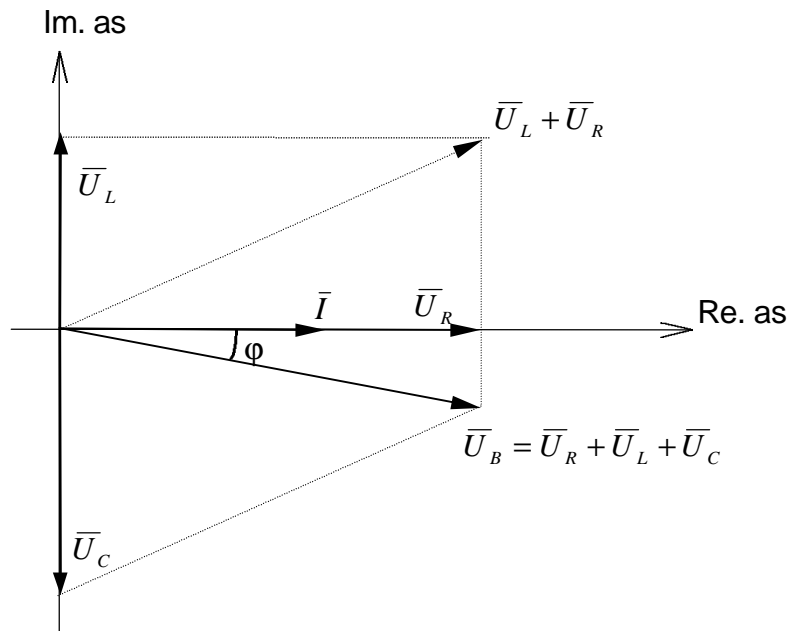
Figuur 31 : vectordiagram R-C serieketen

De spanning (u_B) ijlt dus voor op de stroom. De totale keten reageert inductief. Het resulterend vectordiagram is dat van een R-L serieketen.

Voor $\bar{Z} = R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + j \cdot \omega \cdot L$ kunnen we de volgende impedantiedriehoek tekenen :

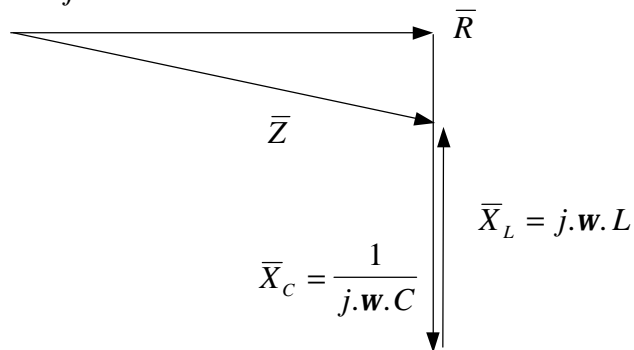


1.4.3.3.2 De impedantie van de spoel is kleiner dan die van de condensator

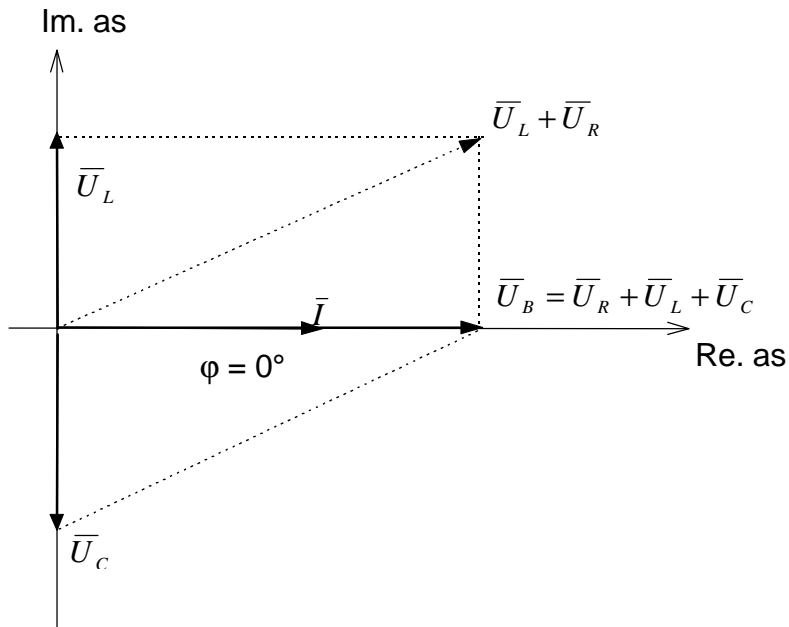


De spanning (u_B) ijlt nu na op de stroom. De totale keten reageert capacitief. Het resulterend vectordiagram is dat van een R-C serieketen.

Voor $\bar{Z} = R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + j \cdot \omega \cdot L$ kunnen we de volgende impedantiedriehoek tekenen :



1.4.3.3.3 De impedantie van de spoel even groot als die van de condensator



Figuur 32 : vectordiagram seriëresonantie

In deze situatie is de totale impedantie van de keten gelijk aan die van de weerstand alleen. Bronspanning en stroom zijn bovendien in fase.

De impedantie is in deze situatie minimaal, waardoor de stroom in de keten maximaal is.

Dit verschijnsel noemen we **resonantie**. Aangezien we hier resonantie krijgen in een zuivere serieketen, spreken we van seriëresonantie.

Voor een willekeurige R-L-C serieketen krijgen we resonantie als de impedantie van de spoel en de condensator even groot zijn. Voor elke weerstand-spoel combinatie vinden we één bepaalde frequentie waarbij dit het geval is.

$$w \cdot L = \frac{1}{w \cdot C}$$

$$w = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

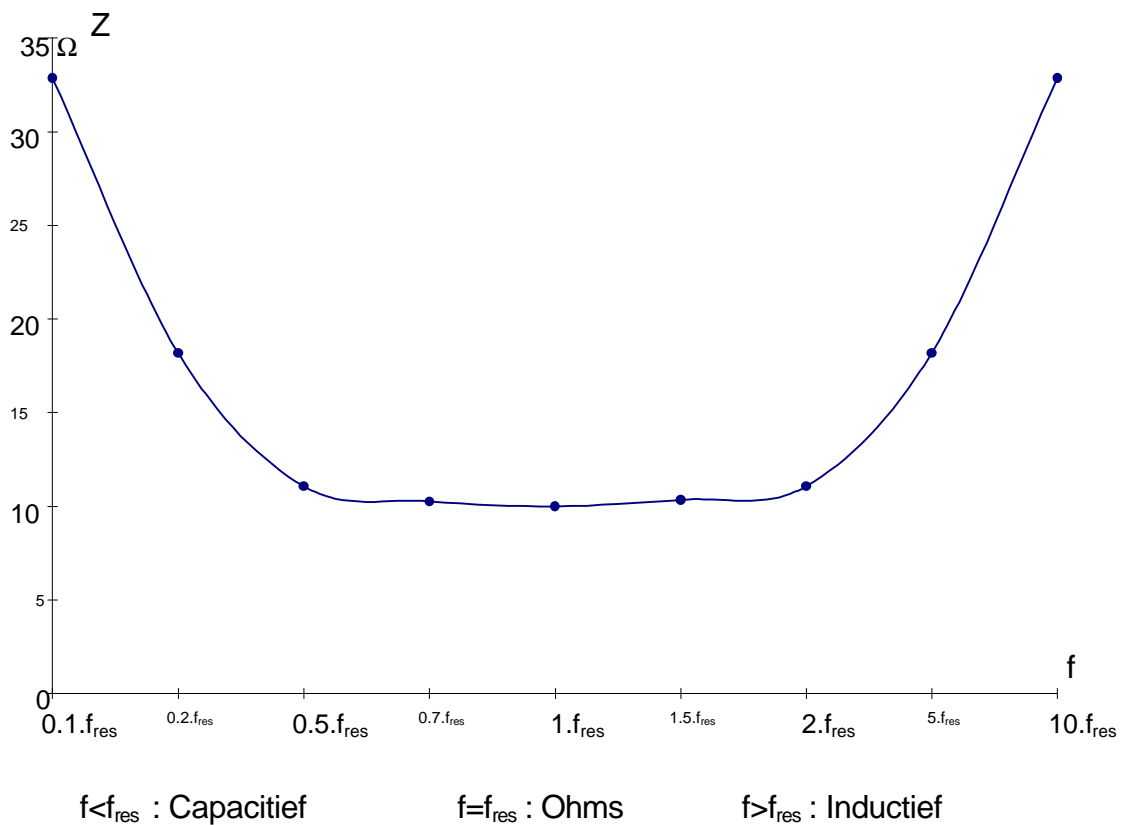
$$f_{res} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

voorbeeld : $Z = f(f)$ voor serieketen met $R=10\Omega$, $L=10\text{mH}$, $C=1\mu\text{F}$

$$f_{res} = \frac{1}{2 \cdot p \cdot \sqrt{L \cdot C}} \approx 50\text{Hz}$$

$$\bar{Z} = R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + j \cdot \omega \cdot L$$

$$|Z| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{R^2 + \left(2 \cdot p \cdot f \cdot L - \frac{1}{2 \cdot p \cdot f \cdot C}\right)^2}$$



1.4.4 Parallelketens

1.4.4.1 De R-L parallelketen

In een parallelketen staat de bronspanning over elk van de elementen. Daarom gaan we deze spanning als referentiepunt nemen.

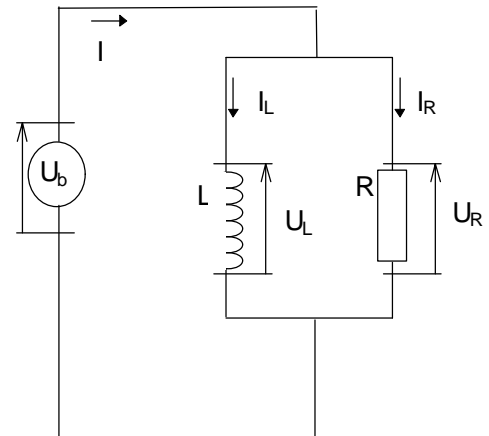
De totale stroom I splitst zich in het knooppunt tussen spoel en weerstand in twee deelstromen.

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{U}_B}{R}$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{U}_B}{\bar{X}_L} = \frac{\bar{U}_B}{j \cdot \omega \cdot L}$$

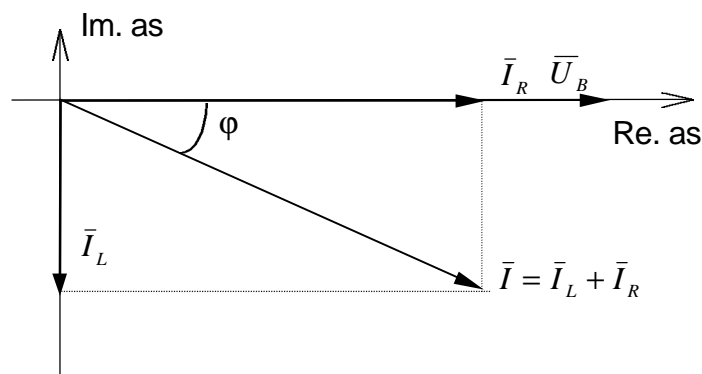
$$\bar{I} = \bar{I}_L + \bar{I}_R = \frac{\bar{U}_B}{R} + \frac{\bar{U}_B}{j \cdot \omega \cdot L}$$

$$= \bar{U}_B \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} \right) = \bar{U}_B \cdot \frac{1}{\bar{Z}_{tot}}$$



Figuur 33 : R-L parallelketen

De deelstroom door de spoel zal 90° najlen op de bronspanning, de stroom door de weerstand is in fase met de bronspanning.



Figuur 34 : vectordiagram R-L parallelschakeling

in de vorige formule zien we dat :

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L}$$

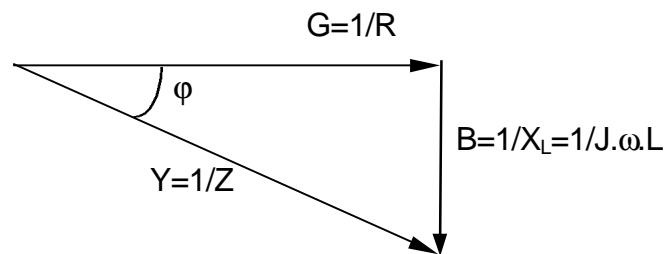
analoog als bij de parallelschakeling in gelijkstroomtheorie kunnen we dus zeggen dat de totale geleidbaarheid de som van de parallel geschakelde geleidbaarheden is.

voor de weerstand : $G = \frac{1}{R}$ = conductantie

voor de spoel : $B = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L}$ = susceptantie

voor de parallelschakeling : $Y = \frac{1}{Z}$ = admittantie

Deze geleidbaarheden of admittanties kunnen we in een zogenaamde admittantiedriehoek tekenen.



Figuur 35 : admittantiedriehoek R-L

De impedantie Z kunnen we berekenen uit :

$$\bar{Z} = \frac{R \cdot \bar{X}_L}{R + \bar{X}_L} = \frac{R \cdot j \cdot \omega \cdot L}{R + j \cdot \omega \cdot L}$$

$$\bar{Z} = x + j \cdot y \quad |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$j = \text{bgtg} \frac{y}{x}$$

We kunnen ook de modulus (grootte) en het argument (fase-hoek) van de totale impedantie berekenen :

$$|Z| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \frac{R \cdot \omega \cdot L}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}}$$

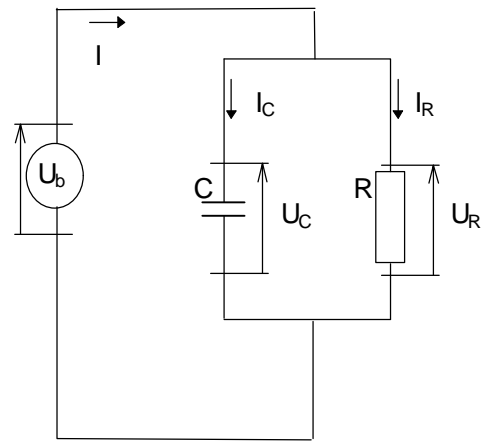
$$j = \text{bgtg} \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \text{bgtg} \left(\frac{R}{\omega \cdot L} \right)$$

1.4.4.2 De R-C parallelketen

In een parallelketen staat de bronspanning over elk van de elementen. Daarom gaan we deze spanning als referentiepunt nemen.

De totale stroom I splitst zich in het knooppunt tussen condensator en weerstand in twee deelstromen.

De deelstroom door de condensator zal 90° voorijlen op de bronspanning, de stroom door de weerstand is in fase met de bronspanning.

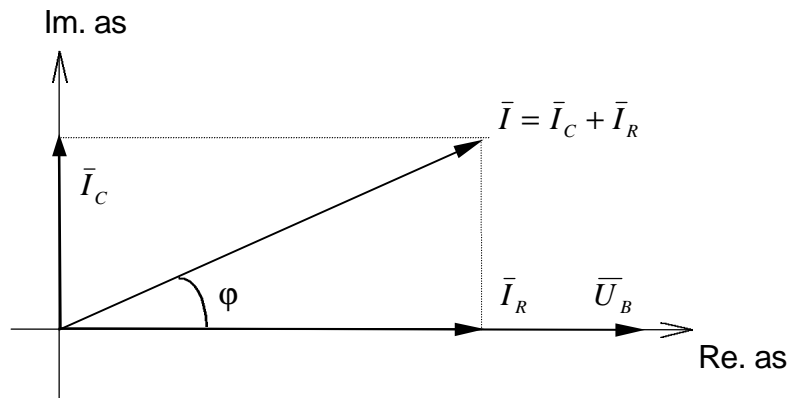


Figuur 36 : R-C parallelketen

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{U}_B}{R}$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}_B}{X_C} = \frac{\bar{U}_B}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_C + \bar{I}_R = \frac{\bar{U}_B}{R} + \frac{\bar{U}_B}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$



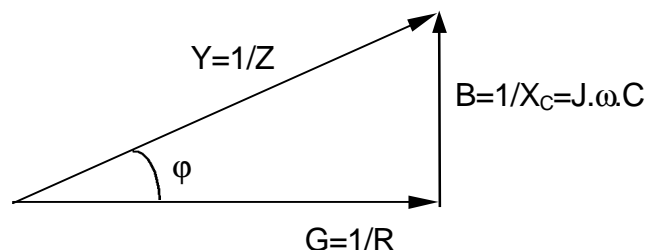
Figuur 37: vectordiagram R-C parallelschakeling

$$= \bar{U}_B \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \right) = \bar{U}_B \cdot \frac{1}{Z_{tot}}$$

hierin zien we dat :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$

Deze geleidbaarheden of admittanties kunnen we in een zogenaamde admittantiedriehoek tekenen.



Figuur 38 : admittantiedriehoek R-C

De impedantie Z kunnen we dus berekenen uit :

$$\boxed{\bar{Z} = \frac{R \cdot \bar{X}_C}{R + \bar{X}_C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}}$$

$$\bar{Z} = x + j \cdot y \quad |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$j = \text{bgtg} \frac{y}{x}$$

We kunnen ook de modulus (grootte) en het argument (fase-hoek) van de totale impedantie berekenen :

$$|Z| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}}$$

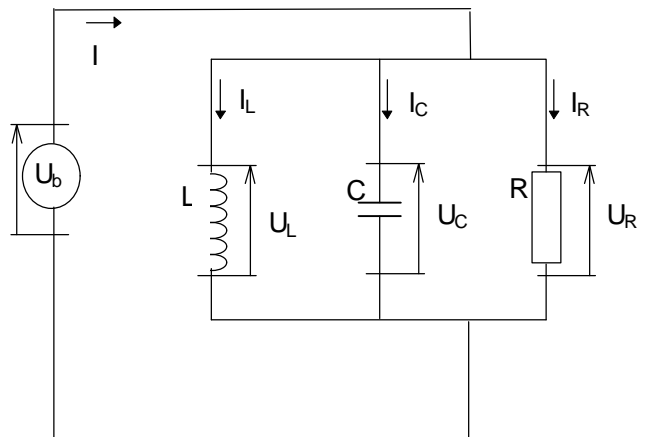
$$j = \text{bgtg} \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \text{bgtg}(-\omega \cdot R \cdot C)$$

1.4.4.3 De R-L-C parallelketen

Ook in deze parallelketen staat de bronspanning over elk van de elementen.

De totale stroom I splitst zich in het knooppunt tussen spoel, condensator en weerstand in drie deelstromen.

De deelstroom door de condensator zal 90° voorijlen op de bronspanning, de stroom door de weerstand is in fase met de bronspanning, en die door de spoel zal 90° najilen.



Figuur 39 : R-L-C parallelketen

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{U}_B}{R}$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{U}_B}{\bar{X}_L} = \frac{\bar{U}_B}{j \cdot \omega \cdot L}$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}_B}{\bar{X}_C} = \frac{\bar{U}_B}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$

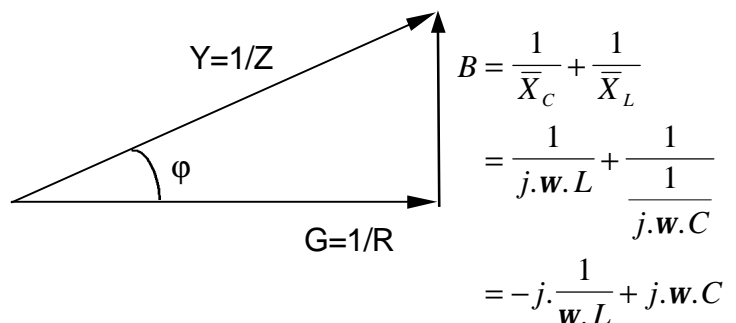
$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C = \frac{\bar{U}_B}{R} + \frac{\bar{U}_B}{j \cdot \omega \cdot L} + \frac{\bar{U}_B}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$

$$= \bar{U}_B \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} + j \cdot \omega \cdot C \right) = \bar{U}_B \cdot \frac{1}{\bar{Z}_{tot}}$$

hierin zien we dat :

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L}$$

Deze geleidbaarheden of admittanties kunnen we in een zogenaamde admittantiedriehoek tekenen.



Figuur 40 : admittantiedriehoek R-L-C

Net als bij de serieketen kunnen er zich nu drie situaties voordoen, die we achtereenvolgens bespreken.

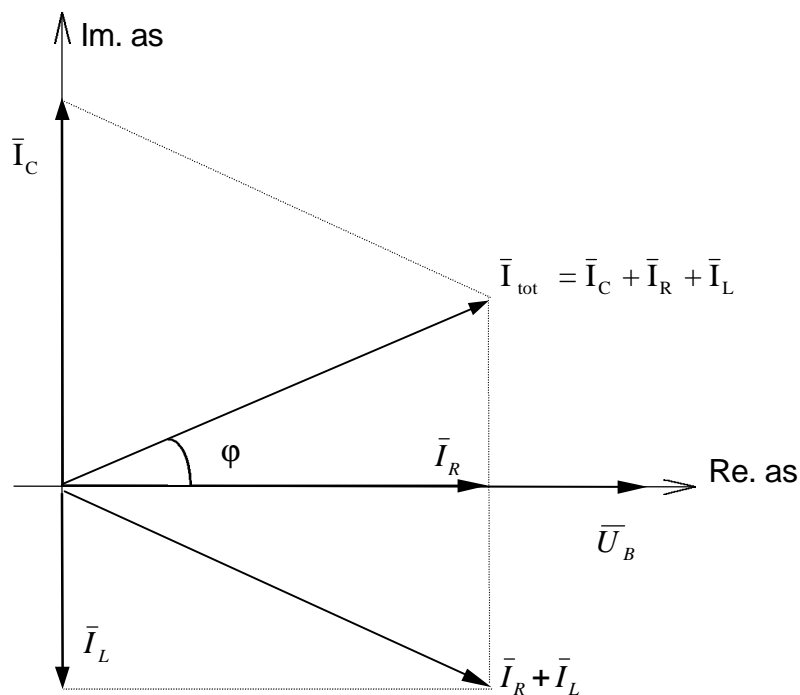
- De impedantie van de spoel is groter dan die van de condensator.
- De impedantie van de spoel is kleiner dan die van de condensator
- beide impedanties zijn precies even groot

1.4.4.3.1 De impedantie van de spoel is groter dan die van de condensator

Als de impedantie van de spoel groter is dan die van de condensator, zal $\frac{1}{X_L} < \frac{1}{X_C}$.

De stroom door de condensator zal dus groter zijn dan die door de spoel.

In het vectordiagram zien we dat het geheel capacitef reageert.



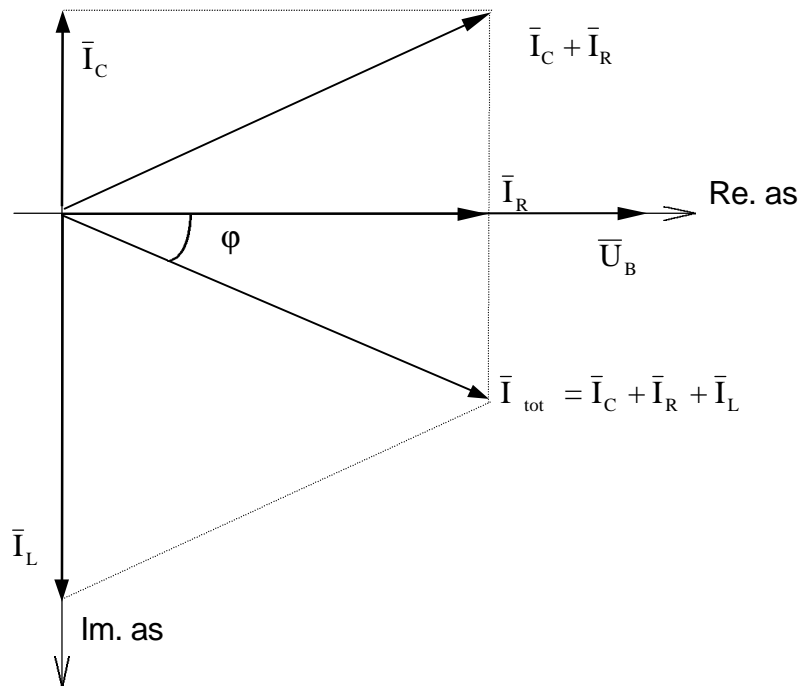
Figuur 41 : vectordiagram R-L-C : capacitef

1.4.4.3.2 De impedantie van de spoel is kleiner dan die van de condensator

Als de impedantie van de spoel kleiner is dan die van de condensator, zal $\frac{1}{X_L} > \frac{1}{X_C}$.

De stroom door de condensator zal dus kleiner zijn dan die door de spoel.

In het vectordiagram zien we dat het geheel inductief reageert.



1.4.4.3.3 De impedantie van de spoel is even groot als die van de condensator

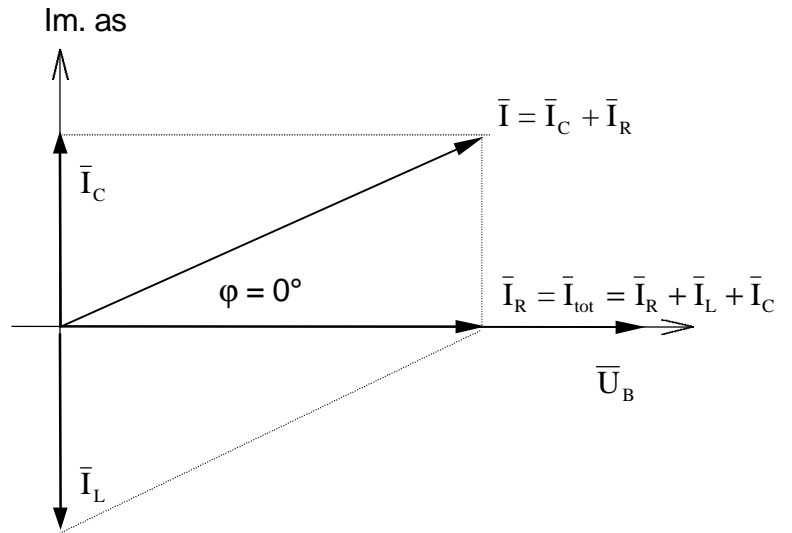
Als de impedantie van de spoel even groot is als die van de condensator, zal $\frac{1}{X_L} = \frac{1}{X_C}$.

De stroom door de spoel en de condensator zijn even groot, maar 180° in fase verschoven. Daardoor reageert de keten zuiver ohms.

We spreken in dit geval van parallelresonantie. De totale stroom in de keten is hier minimaal. (totale impedantie is maximaal).

We kunnen de resonantiefrequentie net als bij de serieresonantie berekenen uit de voorwaarde $X_C = X_L$ zodat we weer bekomen :

$$f_{re} = \frac{1}{2 \cdot p \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

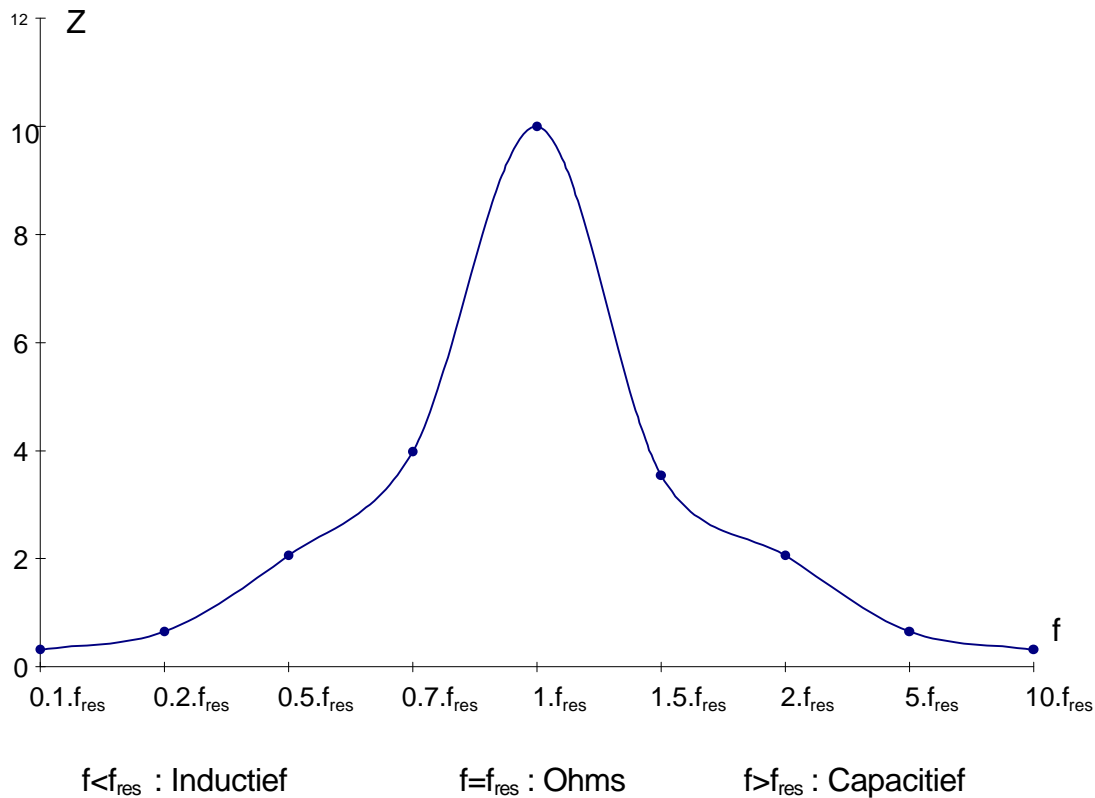


voorbeeld : $Z = f(f)$ voor parallelketen met $R=10\Omega$, $L=10\text{mH}$, $C=1\mu\text{F}$

$$f_{res} = \frac{1}{2 \cdot p \cdot \sqrt{L \cdot C}} \approx 50\text{Hz}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot w \cdot L} + j \cdot w \cdot C = \frac{1}{R} + j \cdot \left(w \cdot C - \frac{1}{w \cdot L} \right)$$

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(2 \cdot p \cdot f \cdot C - \frac{1}{2 \cdot p \cdot f \cdot L} \right)^2}}$$



1.4.5 Gemengde ketens

Bij gemengde ketens kunnen we de totale vervangingsimpedantie berekenen door een combinatie te maken van serie- en parallelschakelingen. We gebruiken hier dus dezelfde oplossingstechnieken als bij gemengde ketens op gelijkspanning.

Je mag echter niet vergeten de faseverschuivingen mee in rekening te brengen. Dus : een complexe of polaire rekenwijze is aangewezen.

We illustreren deze werkwijze aan de hand van een typische gemengde R-L-C schakeling.

In de berekeningen bij de vorige schakelingen zien we dat we bij serieschakelingen de impedanties mogen optellen. Bij parallelschakelingen moeten we de admittanties optellen.

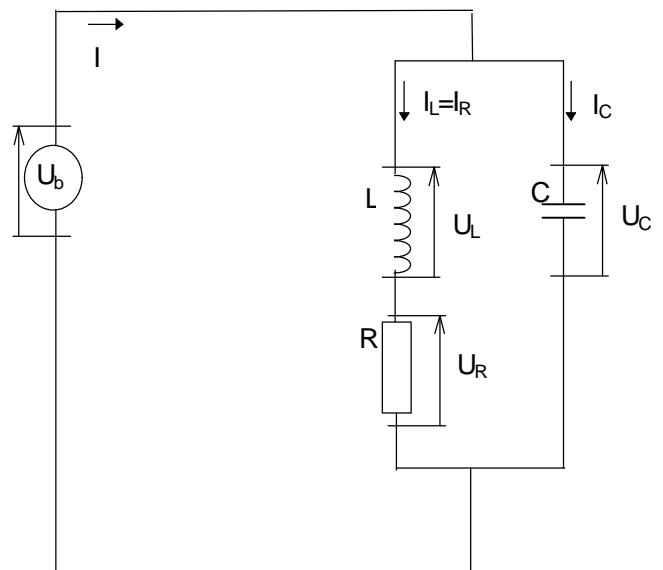
1.4.5.1 RLC gemengde keten

Deze schakeling splitst zich in de parallelschakeling van de condensator met de serieschakeling van spoel en weerstand.

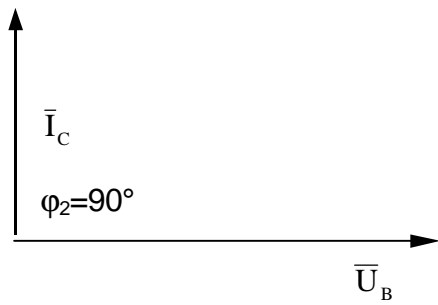
Voor de serieschakeling kunnen we de impedanties optellen.

De bronspanning staat over deze serieschakeling, zodat we de stroom $I_L=I_R$ kunnen berekenen.

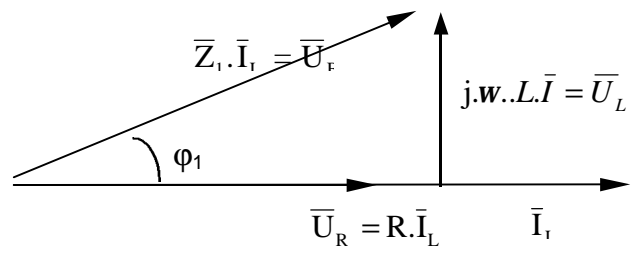
$$\bar{I}_L = \frac{\bar{U}_B}{R + j \cdot \omega \cdot L}$$
$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}_B}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = j \cdot \omega \cdot C \cdot \bar{U}_B$$



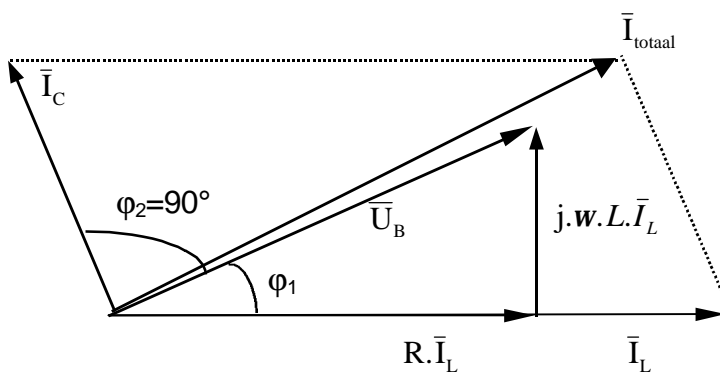
Figuur 42 : R-L-C parallelketen



Figuur 43 : vectordiagram C deelschakeling



Figuur 44 : vectordiagram R-L deelschakeling



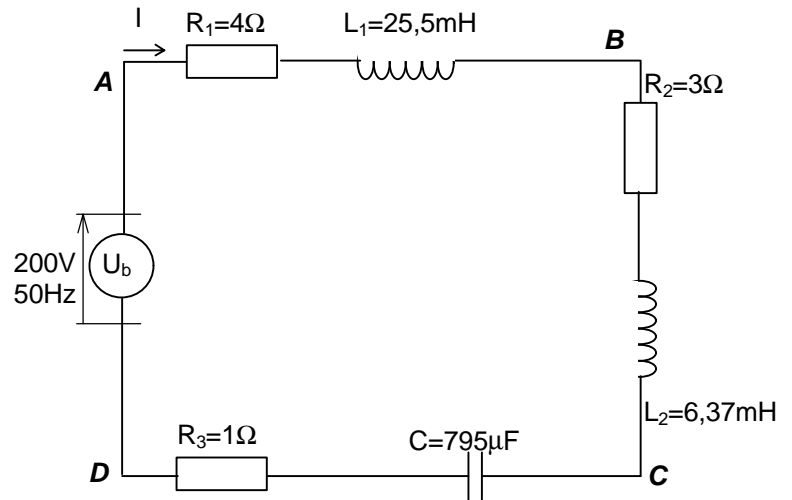
Figuur 45 : vectordiagram gemengde keten

Afhankelijk van de grootte van de verschillende componenten kan de schakeling inductief, capacitief of in resonantie zijn. (Spanning en stroom in fase)

1.4.5.2 Voorbeeld 1

gevraagd :

bereken de totale stroom I en de deelspanningen U_{AB} , U_{BC} , U_{CD} in de hiernaast afgebeelde schakeling.



Oplossing :

1. Berekenen van de impedanties van de spoelen en condensator.

$$\bar{X}_{L1} = j \cdot \omega \cdot L = 2 \cdot \mathbf{p} \cdot f \cdot L = 2 \cdot \mathbf{p} \cdot 50 \cdot 25,5 \cdot 10^{-3} = j \cdot 8$$

$$\bar{X}_{L2} = j \cdot \omega \cdot L = 2 \cdot \mathbf{p} \cdot f \cdot L = 2 \cdot \mathbf{p} \cdot 50 \cdot 6,37 \cdot 10^{-3} = j \cdot 2$$

$$\bar{X}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2 \cdot \mathbf{p} \cdot 50 \cdot 795 \cdot 10^{-6}} = -j \cdot 4$$

2. Berekenen van de impedanties per deeltak en de totale impedantie.

$$\bar{Z}_{AB} = 4 + j \cdot 8$$

$$\bar{Z}_{BC} = 3 + j \cdot 2$$

$$\bar{Z}_{CD} = 1 - j \cdot 4$$

$$\bar{Z} = \bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} + \bar{Z}_{CD} = 8 + j \cdot 6$$

3. Berekenen van de totale stroom.

$$\bar{I} = \frac{U_b}{\bar{Z}} = \frac{200V}{8 + j \cdot 6} = \frac{200 \cdot (8 - j \cdot 6)}{(8 + j \cdot 6) \cdot (8 - j \cdot 6)} = \frac{1600 - j \cdot 1200}{64 + 36} = 16 - j \cdot 12$$

$$|I| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 25A$$

$$\mathbf{j} = \text{bgtg} \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \text{bgtg} \frac{-12}{16} = -37^\circ$$

4. Berekenen van de deelspanningen per deeltak.

$$\bar{U}_{AB} = \bar{I} \cdot \bar{Z}_{AB} = (16 - j \cdot 12) \cdot (4 + j \cdot 8) = 64 - j \cdot 48 + j \cdot 128 - j^2 \cdot 96 = 160 + j \cdot 80$$

$$\bar{U}_{BC} = \bar{I} \cdot \bar{Z}_{BC} = (16 - j \cdot 12) \cdot (3 + j \cdot 2) = 49 - j \cdot 36 + j \cdot 32 + j^2 \cdot 24 = 72 - j \cdot 4$$

$$\bar{U}_{CD} = \bar{I} \cdot \bar{Z}_{CD} = (16 - j \cdot 12) \cdot (1 - j \cdot 4) = 16 - j \cdot 12 - j \cdot 64 + j^2 \cdot 24 = -32 - j \cdot 76$$

$$5. \text{Kontrol}e : \bar{U}_b = \bar{U}_{AB} + \bar{U}_{BC} + \bar{U}_{CD} = 160 + j \cdot 80 + 72 - j \cdot 4 - 32 - j \cdot 76 = 200V$$

1.4.6 Serie- en parallelschakelingen van Condensatoren en Spoelen

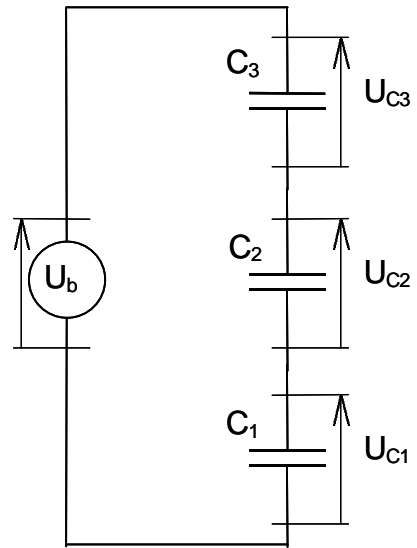
1.4.6.1 Schakeling van condensatoren

1.4.6.1.1 Serieschakeling van capaciteiten

$$\begin{aligned}\bar{U}_b &= \bar{U}_{C1} + \bar{U}_{C2} + \bar{U}_{C3} \\ &= \frac{\bar{I}}{j \cdot \omega \cdot C_1} + \frac{\bar{I}}{j \cdot \omega \cdot C_2} + \frac{\bar{I}}{j \cdot \omega \cdot C_3} \\ &= \frac{\bar{I}}{j \cdot \omega} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{\bar{I}}{j \cdot \omega} \left(\frac{1}{C_{\text{totaal}}} \right)\end{aligned}$$

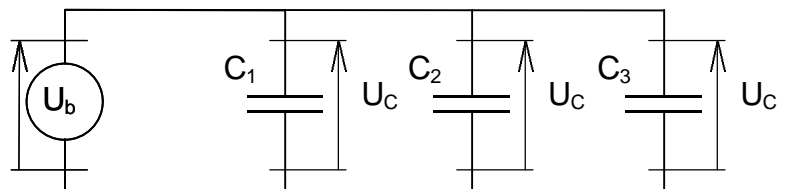
$$\boxed{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_{\text{totaal}}}}$$

Serieschakeling : impedanties optellen



1.4.6.1.2 Serieschakeling van capaciteiten

$$\begin{aligned}\bar{U}_b &= \bar{U}_{C1} = \bar{U}_{C2} = \bar{U}_{C3} \\ &= \frac{\bar{I}_1}{j \cdot \omega \cdot C_1} = \frac{\bar{I}_2}{j \cdot \omega \cdot C_2} = \frac{\bar{I}_3}{j \cdot \omega \cdot C_3} \\ \bar{I} &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{U}_b \cdot j \cdot \omega \cdot (C_1 + C_2 + C_3)\end{aligned}$$



$$\boxed{C_{\text{totaal}} = C_1 + C_2 + C_3}$$

Parallelschakeling : admittanties optellen

1.4.6.2 Schakeling van ideale spoelen

1.4.6.2.1 Serieschakeling van ideale spoelen

$$\bar{U}_b = \bar{U}_{L1} + \bar{U}_{L2} + \bar{U}_{L3}$$

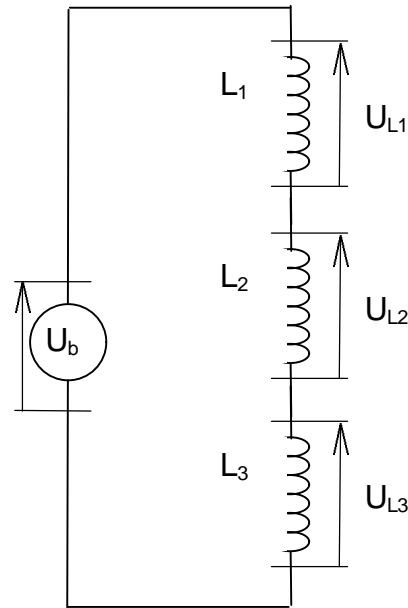
$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \bar{I}_3 = \bar{I}$$

$$\bar{U}_L = \bar{I} \cdot j \cdot \omega \cdot L$$

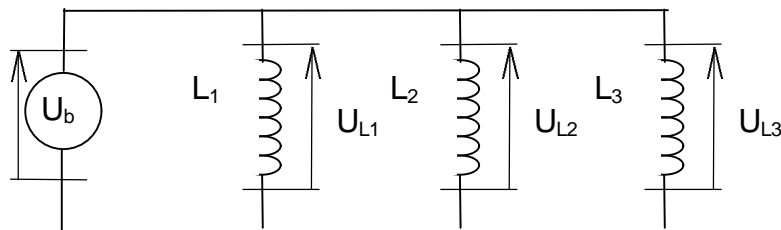
$$\bar{U}_b = \bar{I} \cdot j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 + L_3)$$

$$\boxed{L_{\text{totaal}} = L_1 + L_2 + L_3}$$

Serieschakeling : impedanties optellen



1.4.6.2.2 Parallelschakeling van ideale spoelen



$$\bar{U}_b = \bar{U}_{L1} = \bar{U}_{L2} = \bar{U}_{L3}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_b}{j \cdot \omega \cdot L_1} \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_b}{j \cdot \omega \cdot L_2} \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_b}{j \cdot \omega \cdot L_3}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{U}_b}{j \cdot \omega \cdot L_1} + \frac{\bar{U}_b}{j \cdot \omega \cdot L_2} + \frac{\bar{U}_b}{j \cdot \omega \cdot L_3} \\ &= \frac{\bar{U}_b}{j \cdot \omega} \cdot \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right) = \frac{\bar{U}_b}{j \cdot \omega} \cdot \left(\frac{1}{L_{\text{totaal}}} \right) \end{aligned}$$

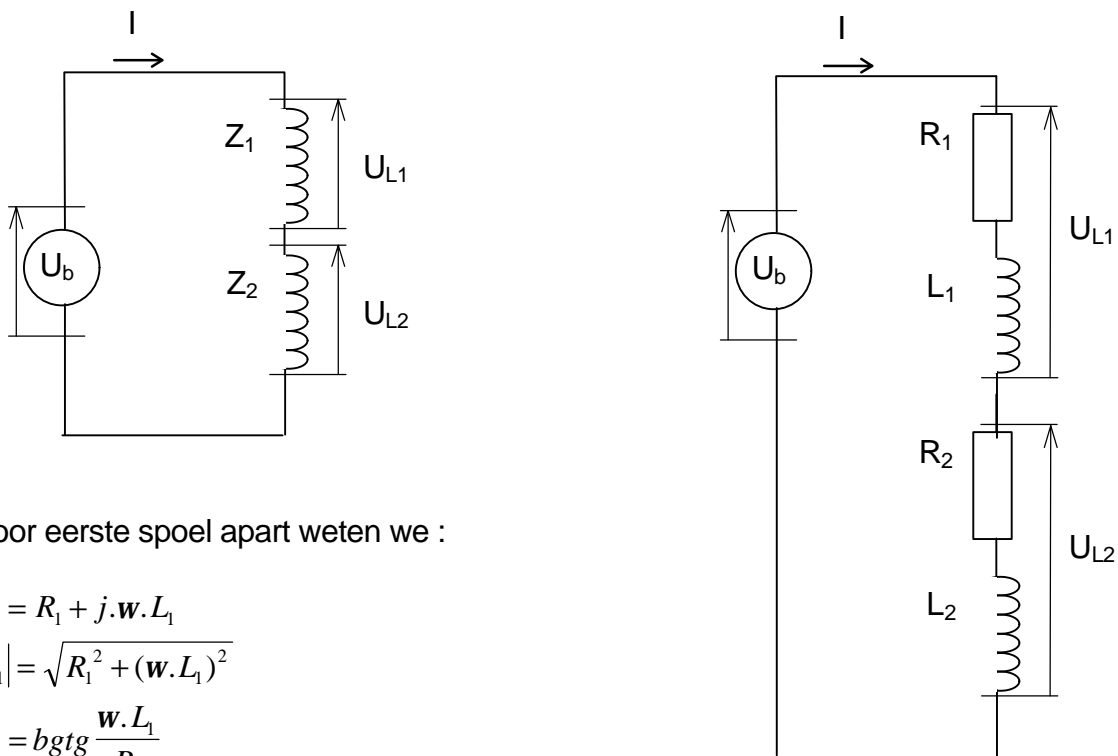
$$\boxed{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = \frac{1}{L_{\text{totaal}}}}$$

Parallelschakeling : admittanties optellen

1.4.6.3 Serieschakeling van niet ideale spoelen

Een niet-ideale spoel kan voorgesteld worden als de serieschakeling van een weerstand en een ideale spoel.

Een serieschakeling van niet-ideale spoelen kan dus voorgesteld worden als de serieschakeling van twee weerstand-spoel serieschakelingen.



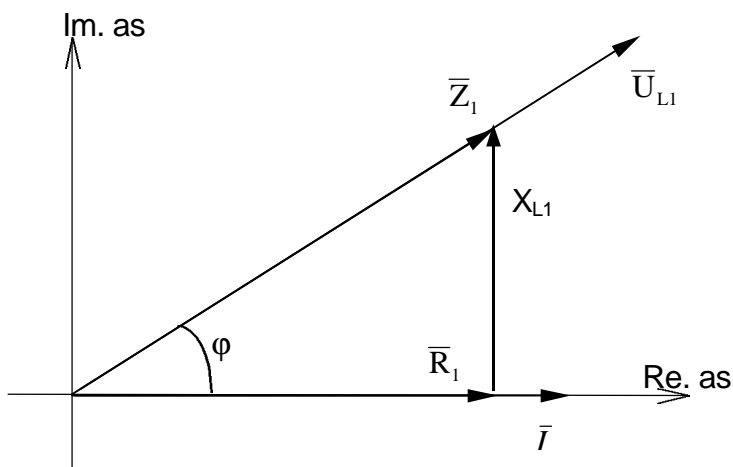
Voor eerste spoel apart weten we :

$$\bar{Z}_1 = R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1$$

$$|Z_1| = \sqrt{R_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2}$$

$$j_1 = \text{bgtg} \frac{\omega \cdot L_1}{R_1}$$

dit geeft het volgende vectordiagram :

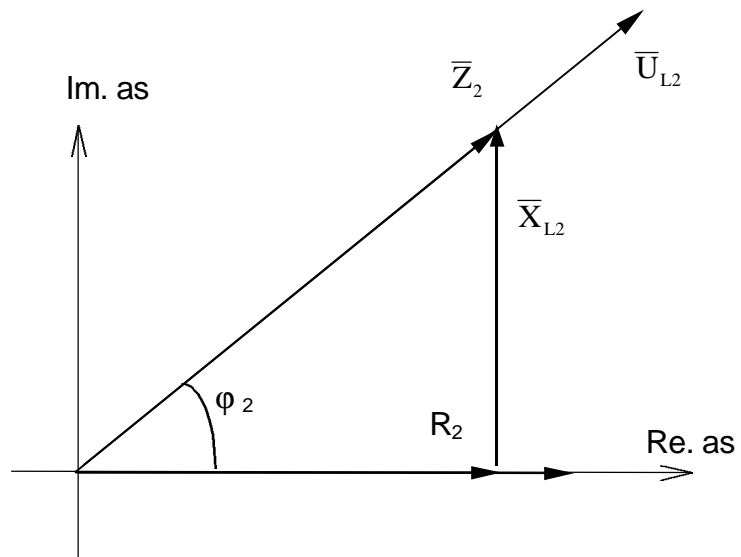


Voor de tweede spoel apart :

$$\bar{Z}_2 = R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2$$

$$|Z_2| = \sqrt{R_2^2 + (\omega \cdot L_2)^2}$$

$$j_2 = \text{bgtg} \frac{\omega \cdot L_2}{R_2}$$



Impedanties in serie kunnen we optellen :

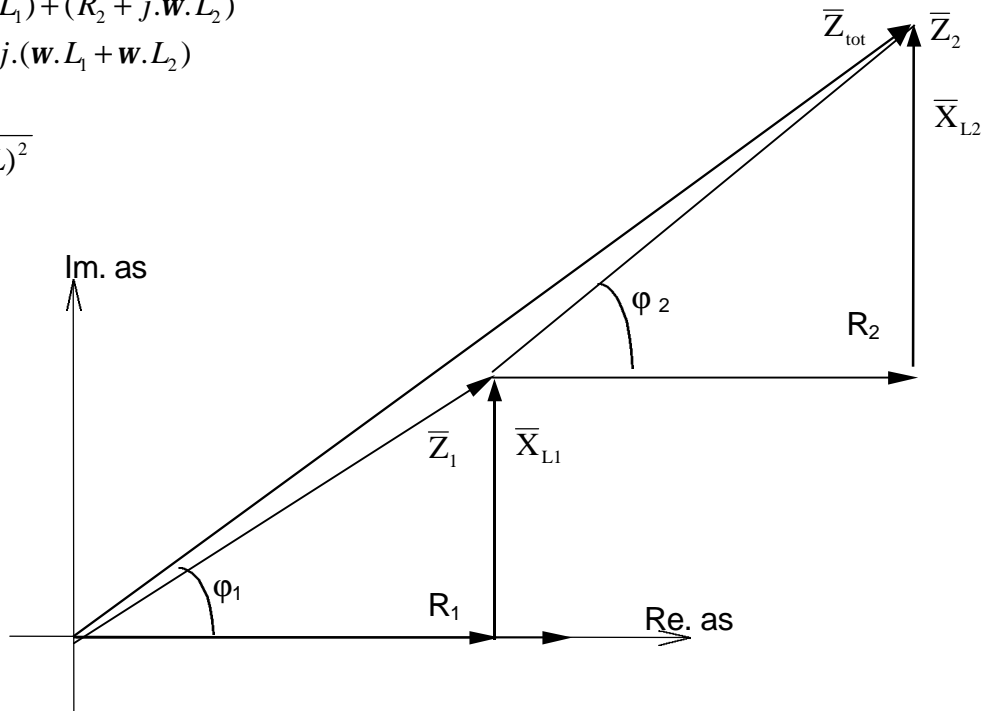
$$\bar{Z}_{tot} = (R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1) + (R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2)$$

$$= (R_1 + R_2) + j \cdot (\omega \cdot L_1 + \omega \cdot L_2)$$

$$= R + j \cdot \omega \cdot L$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

$$j = \text{bgtg} \frac{\omega \cdot L}{R}$$



OPGELET : Impedanties vectorieel optellen :

$$|Z_{tot}| \neq |Z_1| + |Z_2|$$

$$j \neq j_1 + j_2$$

1.5 Vermogen in wisselspanningskringen

1.5.1 Actief, Reactief en Schijnbaar vermogen

We bestuderen hier eerst een wisselspanningskring waarin de stroom een hoek φ naait op de spanning. De spanning kan geschreven worden als : $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$, de stroom als $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

We kunnen het verloop van het vermogen in functie van de tijd berekenen uit :

$$P = u \cdot i$$

$$\begin{aligned} &= U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) \\ &= U_m \cdot I_m \sin \omega t \cdot (\sin(\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi)) \\ &= U_m \cdot I_m \cdot (\sin^2(\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi)) \\ &= U_m \cdot I_m \left(\cos(\varphi) \frac{1 - 2 \cdot \cos(2\omega t)}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \cdot \sin(\varphi) \right) \\ &= U_m \cdot I_m \cdot \frac{1}{2} \left(\cos(\varphi) \frac{1 - 2 \cdot \cos(2\omega t)}{1} - \frac{\sin(2\omega t)}{1} \cdot \sin(\varphi) \right) \\ &= \frac{U_m \cdot I_m}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot (\cos(\varphi)(1 - 2 \cdot \cos(2\omega t)) - (\sin(2\omega t)) \cdot \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

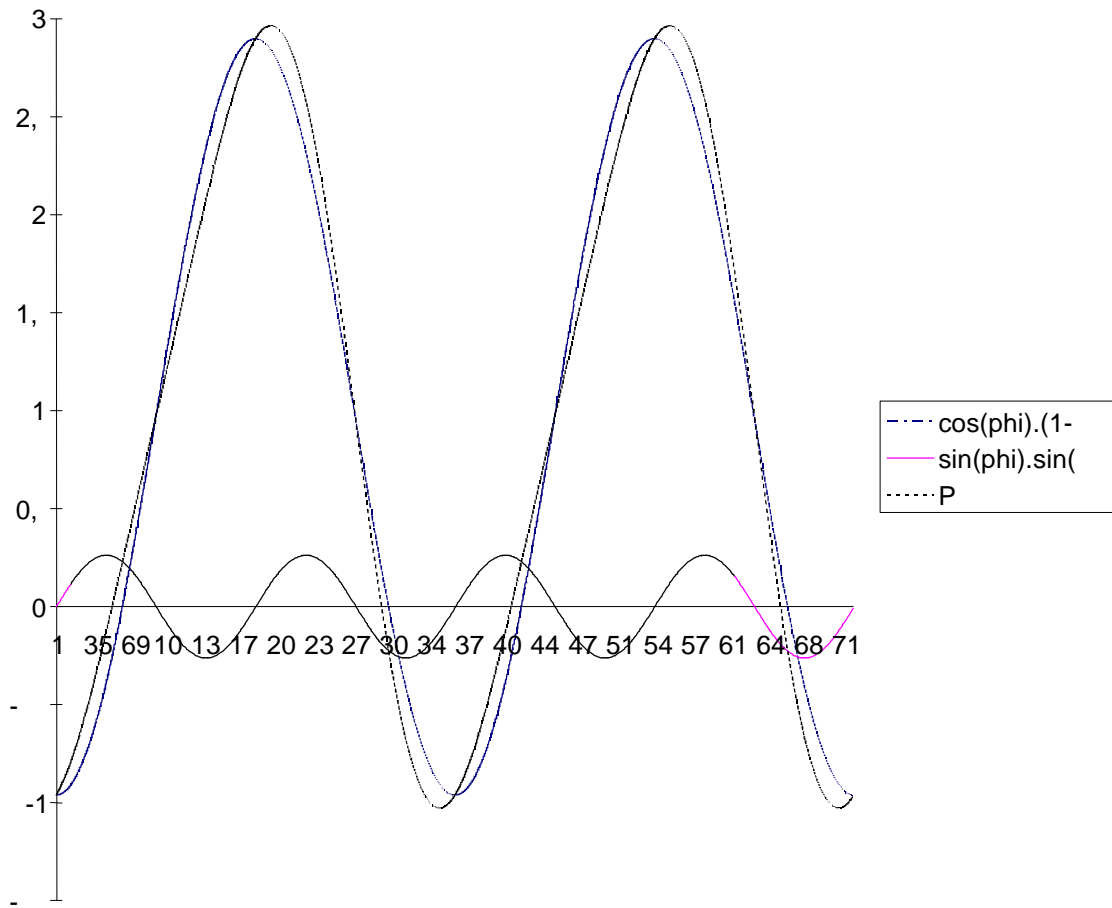
$$= \underbrace{U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot (1 - 2 \cdot \cos(2\omega t))}_1 - \underbrace{U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\omega t)}_2$$

Deze vergelijking bestaat uit twee gescheiden tijdsafhankelijke delen.

In een grafiek zien we duidelijk dat het tweede gedeelte (met de term $\sin(2\omega t)$) gemiddeld nul is. We kunnen ons dus voorstellen dat deze term het ene ogenblik vermogen levert, het volgende ogenblik vermogen terug opneemt. We noemen deze term de reactieve vermogencomponent.

Over meer dan een periode bekeken, is het dus de eerste term die zorgt voor de vermogenoverdracht tussen bron en verbruiker. We noemen deze term $U \cdot I \cdot \cos \varphi$ dan ook de actieve vermogencomponent

De som van deze twee componenten is het ogenblikkelijke vermogen.



Figuur TT : actief, reactief, schijnbaar vermogen ifv tijd

We definiëren dan ook :

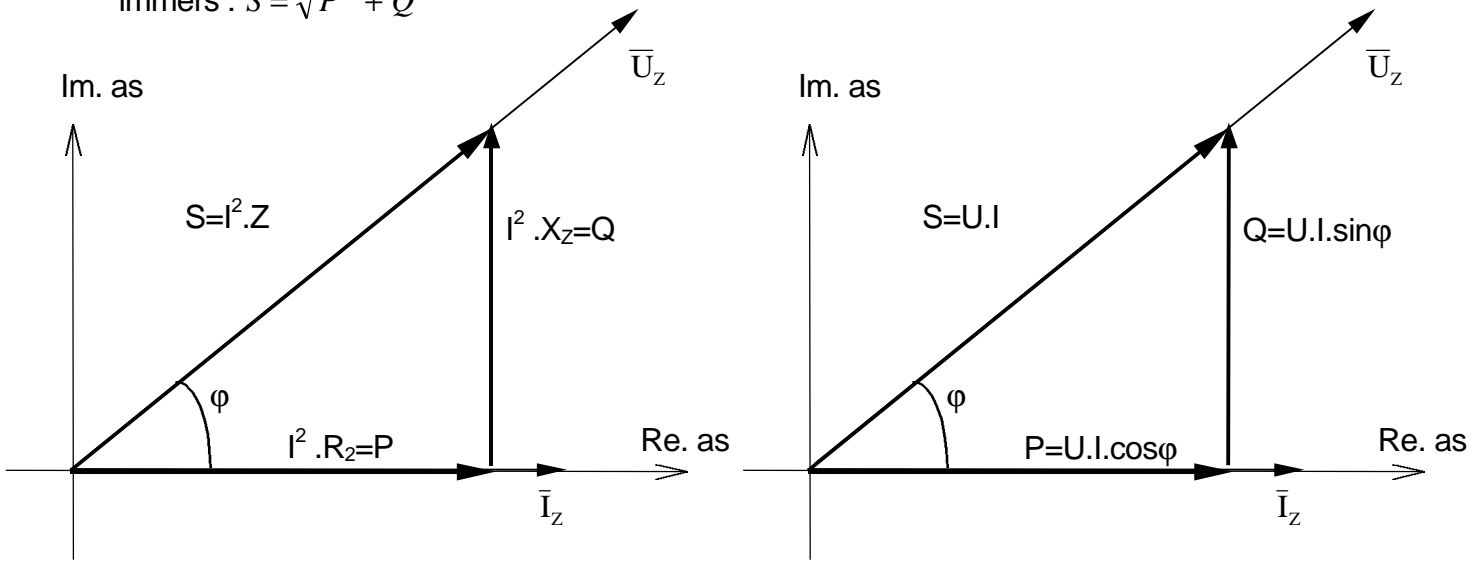
$P=U \cdot I \cdot \cos\varphi$	Actief vermogen eenheid : Watt (W)
$Q=U \cdot I \cdot \sin\varphi$	Reactief vermogen eenheid : Volt.Ampère Reactief(VAR)
$S=U \cdot I$	Schijnbaar vermogen eenheid : Volt.Ampère (VA)

Let op : U, I zijn effectieve waarden voor spanning en stroom !

$$\begin{aligned}
 P_{tot} &= P_1 + P_2 + P_3 \\
 &= U_1 \cdot I_1 \cdot \cos\mathbf{j}_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \cos\mathbf{j}_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \cos\mathbf{j}_3 \\
 Q_{tot} &= U_1 \cdot I_1 \cdot \sin\mathbf{j}_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \sin\mathbf{j}_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \sin\mathbf{j}_3 \\
 S_{tot} &= U_1 \cdot I_1 + U_2 \cdot I_2 + U_3 \cdot I_3
 \end{aligned}$$

Met S, P en Q kunnen we een (rechthoekige) vermogendriehoek samenstellen:

immers : $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$



In enkelvoudige componenten geeft dit het volgende resultaat :

	Weerstand	Spoel	Condensator
φ	0°	90°	-90°
P	$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = U^2 / R$	0	0
Q	0	$Q = U \cdot I = I^2 \cdot X_L = U^2 / X$	$Q = -U \cdot I$
S	$S = U \cdot I = P$	$S = U \cdot I = Q$	$S = U \cdot I = -Q$

1.5.2 Belang van de $\cos\phi$

1.5.2.1 Op gebied van het actief vermogen

Uit de formule $P=S.\cos\phi$ kunnen we afleiden dat voor eenzelfde Schijnbaar vermogen het actieve (nuttige) vermogen stijgt als de $\cos\phi$ stijgt.

Voor een transformator bijvoorbeeld bepaalt de dimensionering het maximale schijnbare vermogen (S) dat deze transfo kan leveren. Aan een belasting met grote $\cos\phi$ kan met deze transfo dus meer actief vermogen geleverd worden.

voorbeeld :

transfo 10000 VA $U=500V$ $\Rightarrow I=20A$

indien	$\phi = 0^\circ$	$\cos\phi = 1$	$P = S.\cos\phi$	$\Rightarrow P = S = 10000W$
	$\phi = 30^\circ$	$\cos\phi = 0,866$	$P = S.\cos\phi$	$\Rightarrow P = S.0,866 = 8660W$
	$\phi = 60^\circ$	$\cos\phi = 0,5$	$P = S.\cos\phi$	$\Rightarrow P = S.0,5 = 5000W$

bij een constant schijnbaar vermogen S (VA) $\Rightarrow P \downarrow$ als $\phi \uparrow$ ($\cos\phi \downarrow$)

1.5.2.2 Op gebied van stroomsterkte

De stroom in de geleiders naar een toestel dat een actief vermogen P verbruikt kunnen we berekenen uit :

$$I = \frac{S}{U} = \frac{P}{U.\cos\phi}$$

Voor een bepaalde verbruiker zien we dat de stroom in de geleiders groter wordt naarmate $\cos\phi$ daalt.

Indien de stroom in een geleider stijgt, zal

- het spanningsverlies in de geleider toenemen
- het vermogenverlies (in de geleiders) toenemen
- de doorsnede van de gebruikte draden groter moeten zijn.

We hebben er dus voordeel bij de $\cos\phi$ in onze schakeling zo groot mogelijk (dicht bij 1) te maken.

bij P en E = cte $\Rightarrow I \uparrow$ als $\cos\phi \downarrow$

voorbeeld :

verbruiker $P=10kW$ $U=500V$

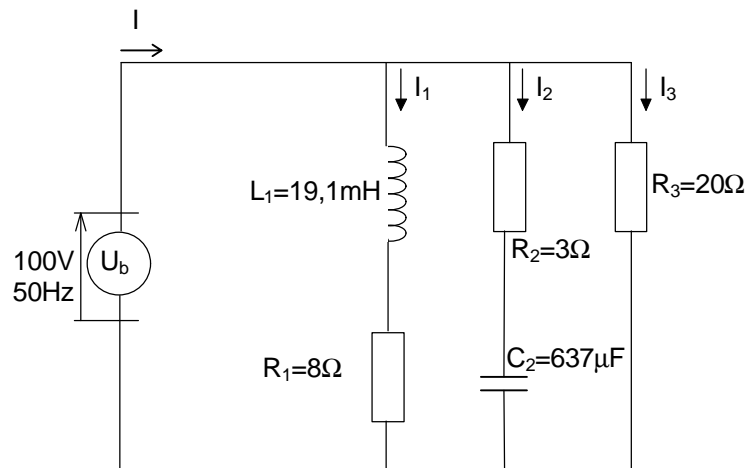
indien :	$\phi = 0^\circ$	$\cos\phi = 1$	$I=20A$
	$\phi = 60^\circ$	$\cos\phi = 0,5$	$I=40A$

1.5.2.3 Op gebied van energiekosten

Het electriciteitstarief voor industriële verbruikers is afhankelijk van de $\cos\varphi$. Immers : de electriciteitsproducenten en verdelers hebben er voor hun installaties alle voordeel bij dat de verbruikers een zo groot mogelijke $\cos\varphi$ hebben. Daarom rekenen zij extra kosten aan indien de $\cos\varphi$ slechter (kleiner) wordt.

1.5.3 voorbeeld :

Bereken vermogens P,Q,S
I en $\cos\varphi$ voor de keten
hiernaast afgebeeld.



Oplossing :

$$\bar{Z}_1 = R_1 + \bar{X}_{L1} = R + j \cdot \omega \cdot L = 8 + j \cdot (19,1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50) = 8 + j \cdot 6$$

$$\bar{Z}_2 = R_2 + \bar{X}_{C2} = R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = 3 + \frac{1}{j \cdot 795 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50} = 3 - j \cdot 4$$

$$\bar{Z}_3 = R_3 = 20$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_b}{\bar{Z}_1} = \frac{100}{8 + j \cdot 6} = \frac{100 \cdot (8 - j \cdot 6)}{(8 + j \cdot 6)(8 - j \cdot 6)} = 8 - j \cdot 6$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_b}{\bar{Z}_2} = \frac{100}{3 - j \cdot 4} = \frac{100 \cdot (3 + j \cdot 4)}{(3 + j \cdot 4)(3 - j \cdot 4)} = 12 + j \cdot 16$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_b}{\bar{Z}_3} = \frac{100}{20} = 5A$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 8 - j \cdot 6 + 12 + j \cdot 16 + 5 = 25 + j \cdot 10$$

$$|I| = \sqrt{\text{Im}^2 + \text{Re}^2} = \sqrt{25^2 + 10^2} = 26,92A$$

$$j = \text{bgtg} \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \text{bgtg} \frac{10}{25} = 21,8^\circ$$

$$\cos j = 0,928$$

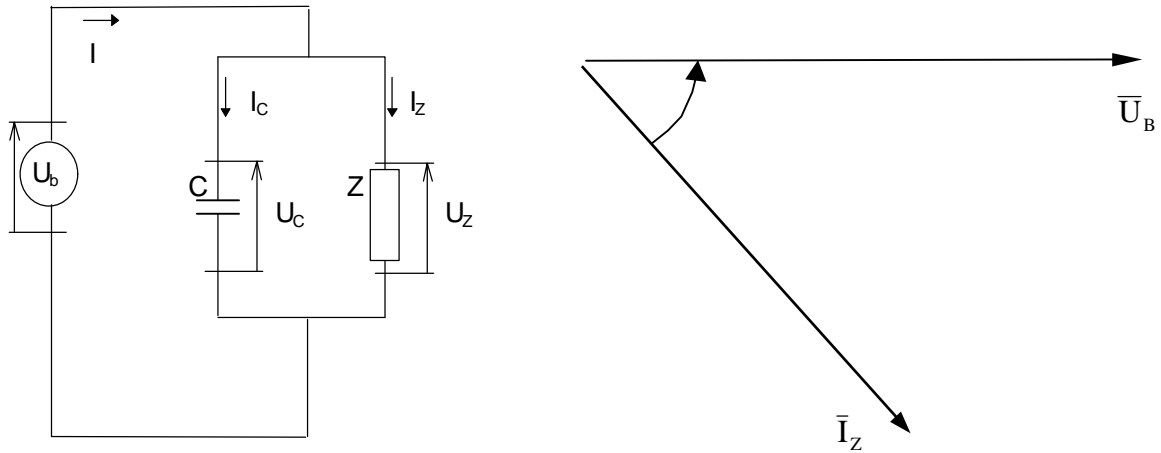
$$P = U \cdot I \cdot \cos j = 2500W$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin j = 1000VAr$$

$$S = U \cdot I = 2690VA$$

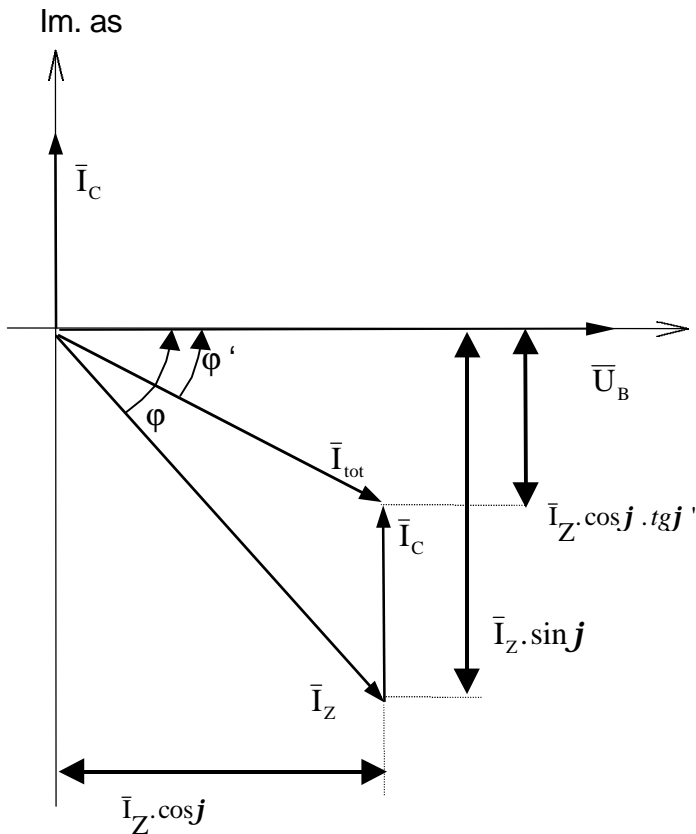
1.5.4 Verbetering van de $\cos\varphi$

De meeste praktische schakelingen hebben een inductief karakter. De $\cos\varphi$ verbeteren gebeurt dan ook meestal door condensatoren parallel met de belasting te schakelen.



Figuur UU : verbetering $\cos\varphi$

Figuur VV : vectordiagram zonder C



Figuur WW : vectordiagram verbetering $\cos\phi$

In het vectordiagram zien we dat :

$$\begin{aligned} I_c &= I_z \cdot \sin j - I_z \cdot \cos j \cdot \text{tg} j' \\ &= I_z \cdot (\sin j - \cos j \cdot \text{tg} j') \\ &= U_b \cdot w \cdot C \end{aligned}$$

hieruit berekenen we C

$$C = \frac{I_z \cdot (\sin j - \cos j \cdot \text{tg} j')}{w \cdot U_b}$$

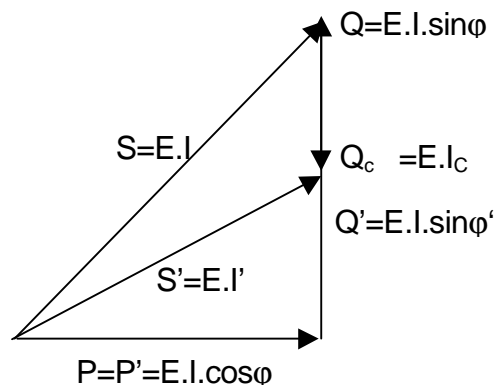
waarin ϕ' de (gewenste) hoek is na de $\cos\phi$ verbetering.

Het terugbrengen van deze hoek tot een zeer kleine waarde is economisch niet rendabel. Er moet dus een compromis gesloten worden tussen stijgende kosten voor verdere verbetering en dalende uitbatingskosten bij verbeterde $\cos\phi$.

Indien enkel het vermogen en de $\cos\phi$ van de verbruiker (te meten met W en $\cos\phi$ meter) en de spanning van het net gekend zijn, kan de te plaatsen condensator ook berekend worden uit :

$$\begin{aligned} Q_c &= Q - Q' \\ &= P \cdot \text{tg} j - P \cdot \text{tg} j' \\ Q_c &= U \cdot I_c = U^2 \cdot w \cdot C \end{aligned}$$

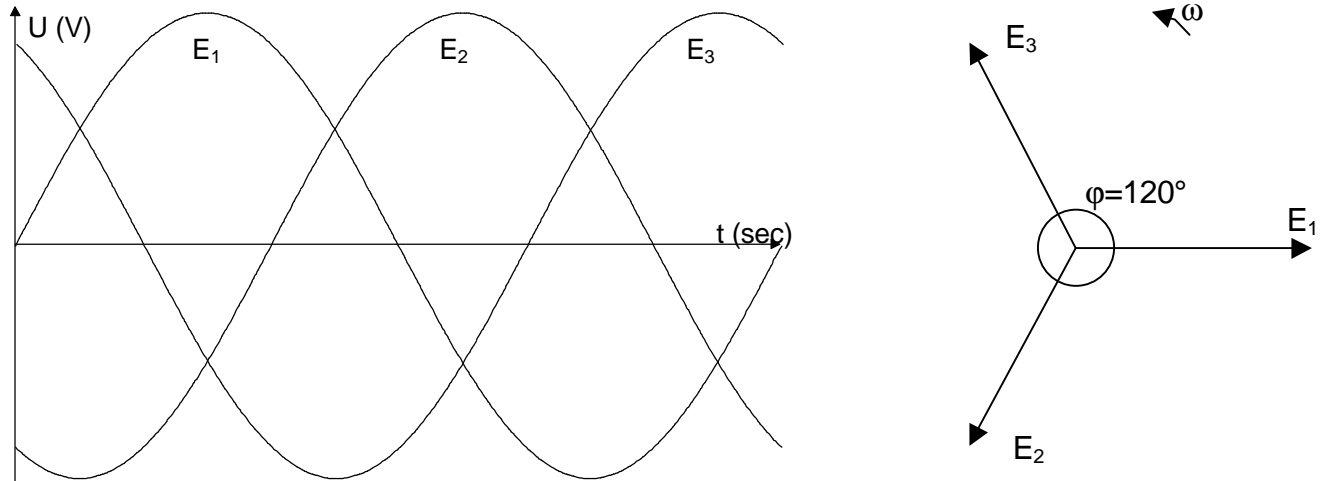
$$C = \frac{P \cdot (\text{tg} j - \text{tg} j')}{U_b^2 \cdot w}$$



2. Driefasige stromen en spanningen

2.1 Inleiding

Een systeem van driefasige spanningen bestaat uit drie sinusvormige wisselspanningen met dezelfde frequentie die onderling 120° in fase verschoven zijn.



Figuur XX : driefasige spanningen

Goniometrisch kunnen we deze spanningen schrijven als :

$$\begin{aligned} e_1 &= E_m \cdot \sin \omega t \\ e_2 &= E_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ) \\ e_3 &= E_m \cdot \sin(\omega t - 240^\circ) \end{aligned}$$

waarin **e** de ogenblikkelijke waarde van de wisselspanningsbron voorstelt. Voor de spanningen over een verbruiker gebruiken we, om het onderscheid te maken, het symbool **u**.

E_m , U_m stellen de maximale waarden van deze spanningen voor.
 E , U zijn de effectieve waarden.

Meestal gebruiken we de complexe notatie voor deze spanningen :

$$\begin{aligned} U_1 &= |U| \\ U_2 &= |U| \cos(-120^\circ) + j \cdot |U| \sin(-120^\circ) && \text{(indien } U_1 \text{ op de reële as ligt)} \\ U_3 &= |U| \cos(120^\circ) + j \cdot |U| \sin(120^\circ) \end{aligned}$$

bijvoorbeeld : voor een driefasige spanning van $3 \times 240V$:

$$\begin{aligned} U_1 &= 240V \\ U_2 &= -120V - j \cdot 207.8V \\ U_3 &= -120V + j \cdot 207.8V \end{aligned}$$

Als we U_1 op de imaginaire as leggen op het tijdstip $t=0$, dan verdraait het vectordiagram 90° , zodat de complexe notatie wordt :

$$U_1 = |U| \cdot \cos 90^\circ + j \cdot |U| \cdot \sin 90^\circ$$

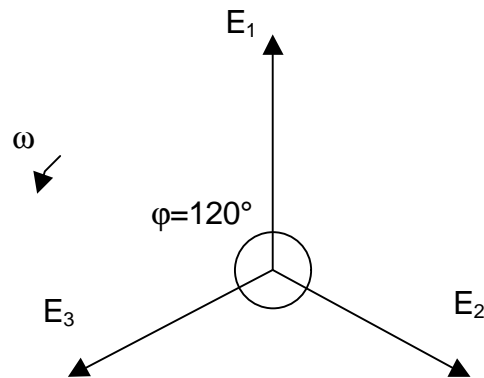
$$U_2 = |U| \cos(-30^\circ) + j \cdot |U| \sin(-30^\circ)$$

$$U_2 = |U| \cos(-150^\circ) + j \cdot |U| \sin(-150^\circ)$$

$$U_1 = j \cdot |U|$$

$$U_2 = |U| \cos 30^\circ - j \cdot |U| \sin 30^\circ$$

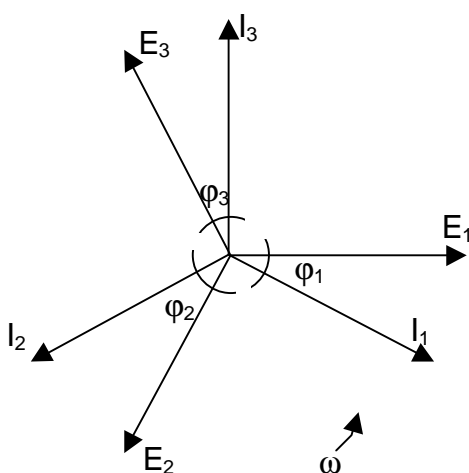
$$U_2 = -|U| \cos 30^\circ - j \cdot |U| \sin 30^\circ$$



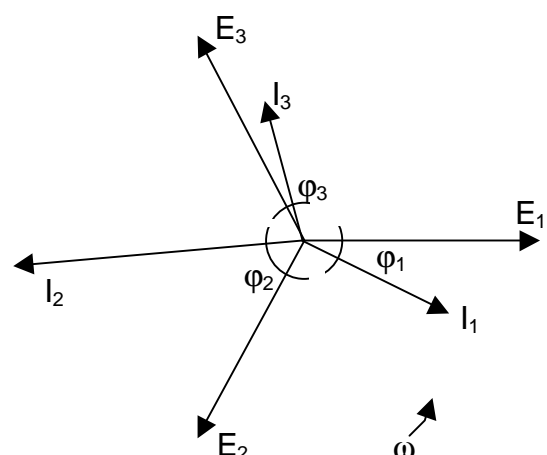
In dit vectordiagram kunnen we ook de stromen voorstellen die door de drie bronnen geleverd worden.

We maken hierbij een onderscheid tussen symmetrische en asymmetrische belastingen. In een symmetrische belasting is de belastingsimpedantie voor de drie bronnen identiek. Aangezien de drie bronspanningen even groot zijn, en dezelfde frequentie hebben, zullen ook de drie stromen even groot zijn, en ten opzichte van de bijhorende spanning dezelfde faseverschuiving φ hebben.

Voor een asymmetrische belasting zullen de drie stromen verschillend in grootte en faseverschuiving zijn.



**Figuur YY : vectordiagram
symmetrische belasting**



**vectordiagram
asymmetrische belasting**

Deze stromen kunnen we in goniometrische notatie weergeven als :

Symmetrische belasting

$$i_1 = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

$$i_2 = I_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi)$$

$$i_3 = I_m \cdot \sin(\omega t - 240^\circ - \varphi)$$

Asymmetrische belasting

$$i_1 = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi_1)$$

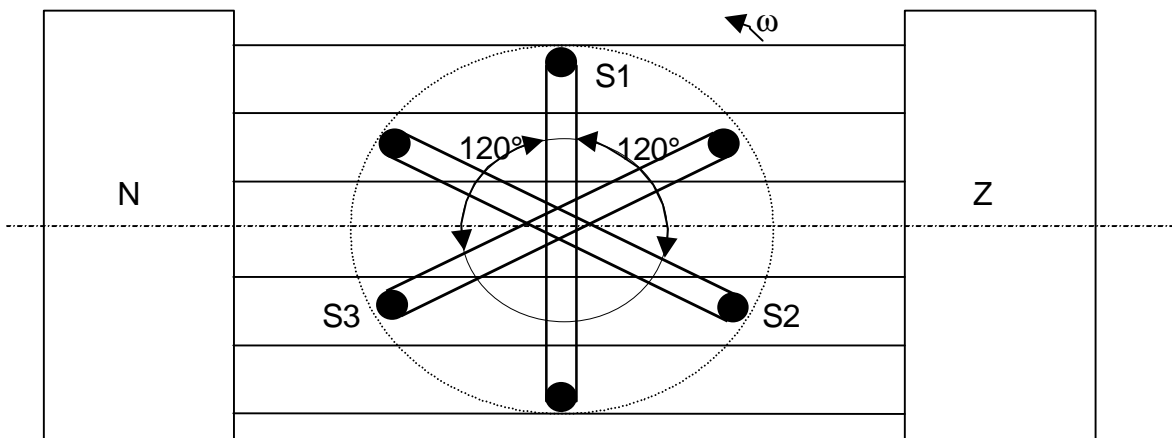
$$i_2 = I_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi_2)$$

$$i_3 = I_m \cdot \sin(\omega t - 240^\circ - \varphi_3)$$

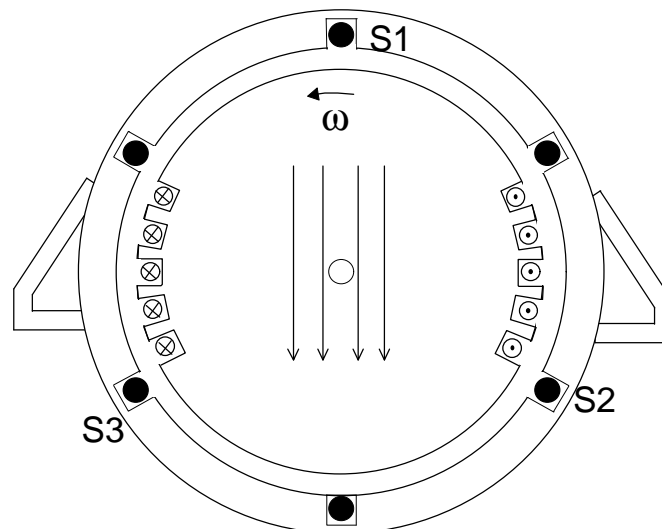
2.2 Ontstaan van een driefasige spanning

Indien drie identieke windingen, onderling 120° verschoven, roteren in een magnetisch veld zullen drie spanningen opgewekt worden die onderling eveneens in fase verschoven zijn.

Klassieke uitvoeringen hiervan zijn de buitenpool driefasen generator en de binnenpool driefasen generator.



Figuur ZZ : tweepolige buitenpool driefasen generator



Figuur AAA : tweepolige binnenpool driefasige generator

2.3 Basiseigenschappen van een driefasige spanning

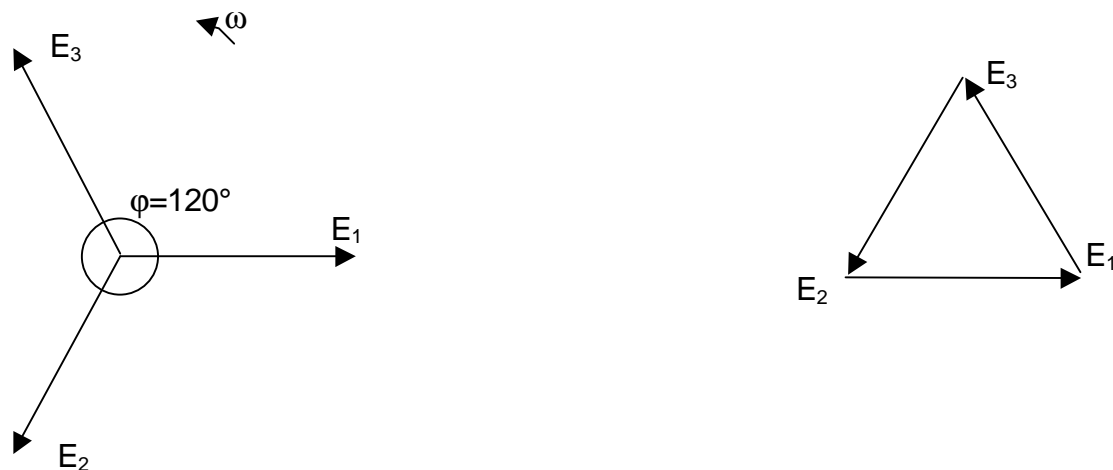
Voor de beschouwde driefasige spanningen gaan we er van uit dat de drie spanningen evenwichtig zijn : even groot en onderling in 120° in fase verschoven.

De som van deze drie spanningen is dan nul.

$$\begin{aligned} e_1 &= |E| & e_1 &= E \cdot \cos 0^\circ + j \cdot E \cdot \sin 0^\circ \\ e_2 &= -|E| \sin 30^\circ - j \cdot |E| \cos 30^\circ & e_2 &= E \cdot \cos(-120^\circ) + j \cdot E \cdot \sin(-120^\circ) \\ e_3 &= -|E| \sin 30^\circ + j \cdot |E| \cos 30^\circ & e_3 &= E \cdot \cos 120^\circ + j \cdot E \cdot \sin 120^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= |E| - |E| \sin 30^\circ - j \cdot |E| \cos 30^\circ - |E| \sin 30^\circ + j \cdot |E| \cos 30^\circ \\ &= |E| \cdot (1 - \sin 30^\circ - \sin 30^\circ) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0 \\ \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 &= 0 \end{aligned}}$$



Figuur BBB : som van spanningen in driefasig systeem

Bij een symmetrische belasting zijn bovendien ook de drie stromen even groot en onderling 120° in fase verschoven, zodat ook de som van de drie stromen nul is.

$$\boxed{\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 &= 0 \end{aligned}}$$

2.4 Schakeling van driefasige generatoren

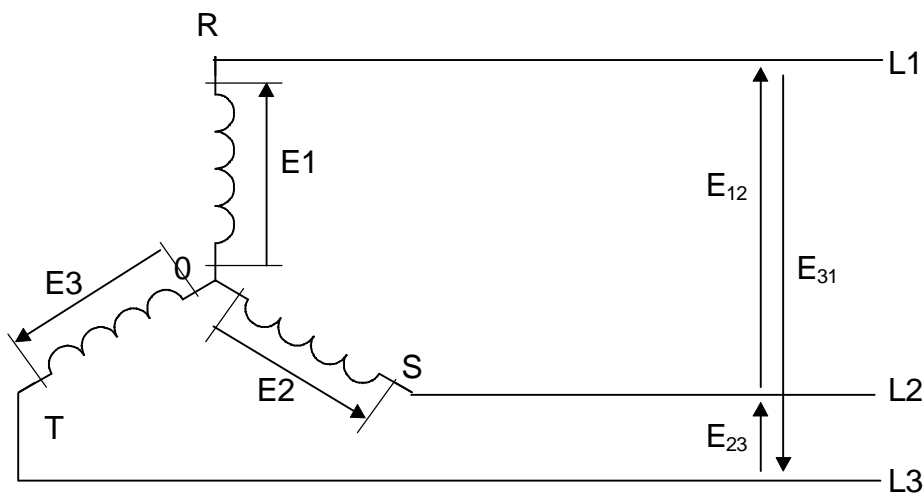
2.4.1 Sterschakeling

De drie spoelen van de generator die de spanningen opwekt kunnen in ster geschakeld worden. In praktijk is dit de meest voorkomende schakeling van generatoren (transformatoren)

De drie spoelen krijgen dan een gemeenschappelijke klem (**nulpunt**).

Aan de andere uiteinden van de spoelen wordt telkens een **lijndraad** verbonden, waardoor de stroom naar een verbruiker vloeit.

Eventueel kan het nulpunt van de generator met de verbruiker verbonden worden via de **nulgeleider**.



E_1, E_2, E_3 noemen we de **FASESPANNINGEN** (per fase van de generator)

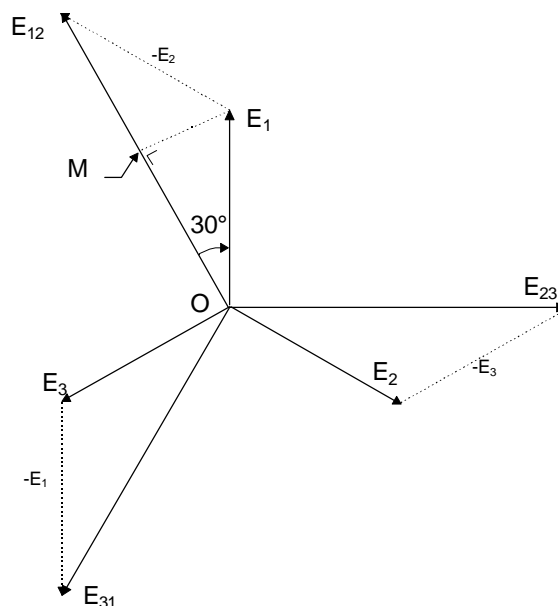
E_{12}, E_{23}, E_{31} noemen we de **LIJNSPANNINGEN** (tussen twee lijnen)

$$\begin{aligned}\vec{E}_{12} &= \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \\ \vec{E}_{23} &= \vec{E}_2 - \vec{E}_3 \\ \vec{E}_{31} &= \vec{E}_3 - \vec{E}_1 \\ \vec{E}_{12} + \vec{E}_{23} + \vec{E}_{31} &= 0\end{aligned}$$

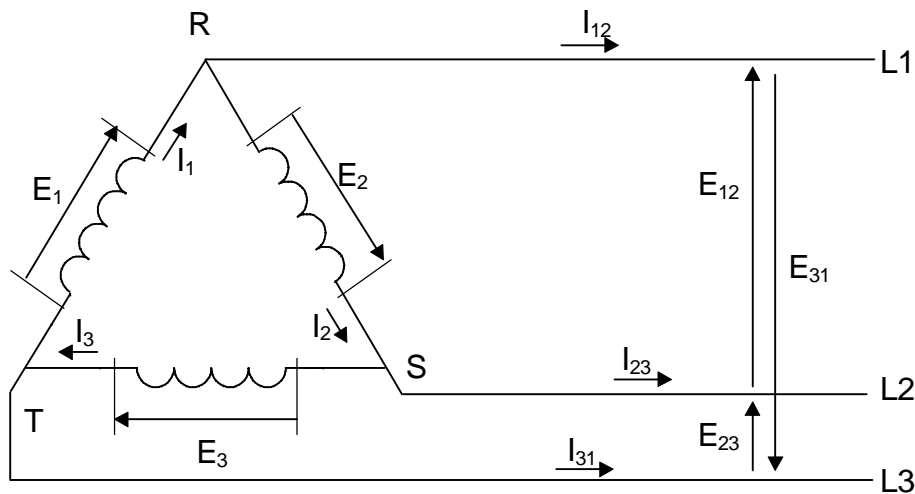
$$\begin{aligned}|\vec{E}_{12}| &= E_{12} = 2 \cdot OM \\ &= 2 \cdot E_1 \cdot \cos 30^\circ \\ &= 2 \cdot E_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \cdot E_1\end{aligned}$$

$$E_{12} = E_{23} = E_{31} = \sqrt{3} \cdot E_1$$

Lijnspanning = $\sqrt{3}$ · Fasespanning
Lijnstroom = fasestroom



2.4.2 Driehoekschakeling



E_1, E_2, E_3 noemen we de FASESPANNINGEN (per fase van de generator)

E_{12}, E_{23}, E_{31} noemen we de LIJNSPANNINGEN (tussen twee lijnen)

I_1, I_2, I_3 noemen we de FASESTROMEN (per fase in de generator)

I_{12}, I_{23}, I_{31} noemen we de LIJNSTROMEN (in de lijnen)

onderscheid in notatie tussen lijn- en fasestroom : fasestroom = I_f lijnstroom = I

$$\vec{I}_{12} = \vec{I}_1 - \vec{I}_2$$

$$\vec{I}_{23} = \vec{I}_2 - \vec{I}_3$$

$$\vec{I}_{31} = \vec{I}_3 - \vec{I}_1$$

$$\vec{I}_{12} + \vec{I}_{23} + \vec{I}_{31} = 0$$

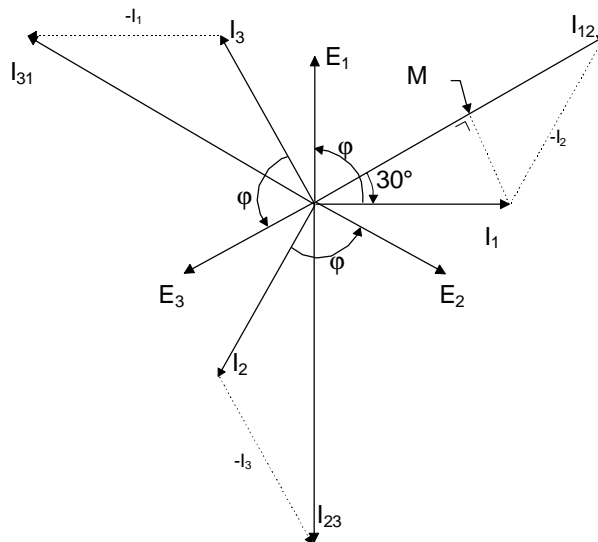
$$|\vec{I}_{12}| = I_{12} = 2 \cdot OM$$

$$= 2 \cdot I_1 \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 2 \cdot I_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3} \cdot I_1$$

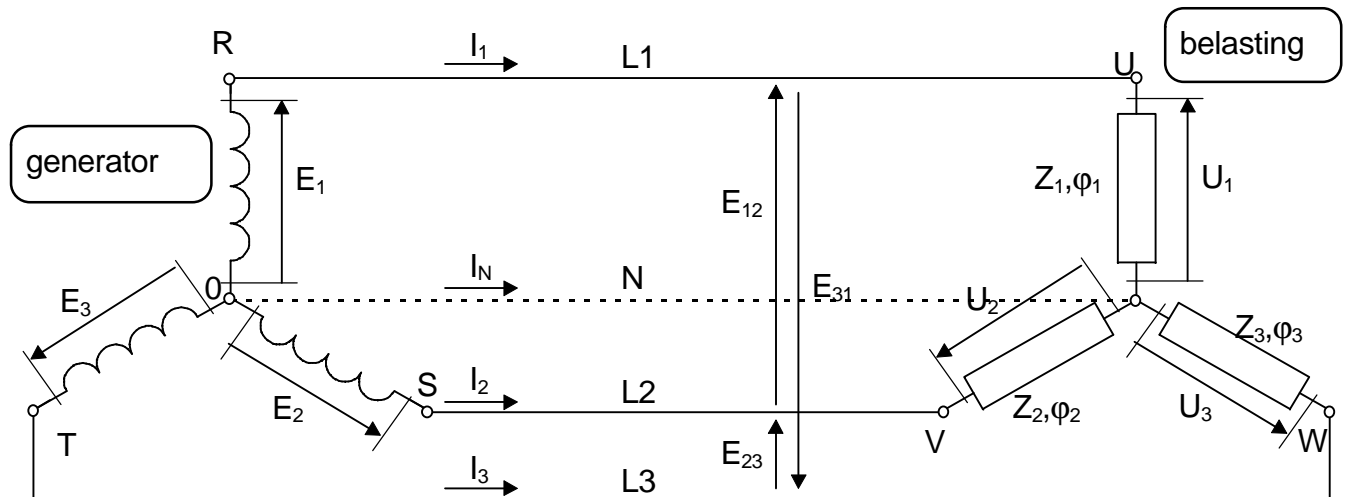
$$I_{12} = I_{23} = I_{31} = \sqrt{3} \cdot E_1$$



Lijnspanning = Fasespanning
Lijnstroom = $\sqrt{3}$ · fasestroom

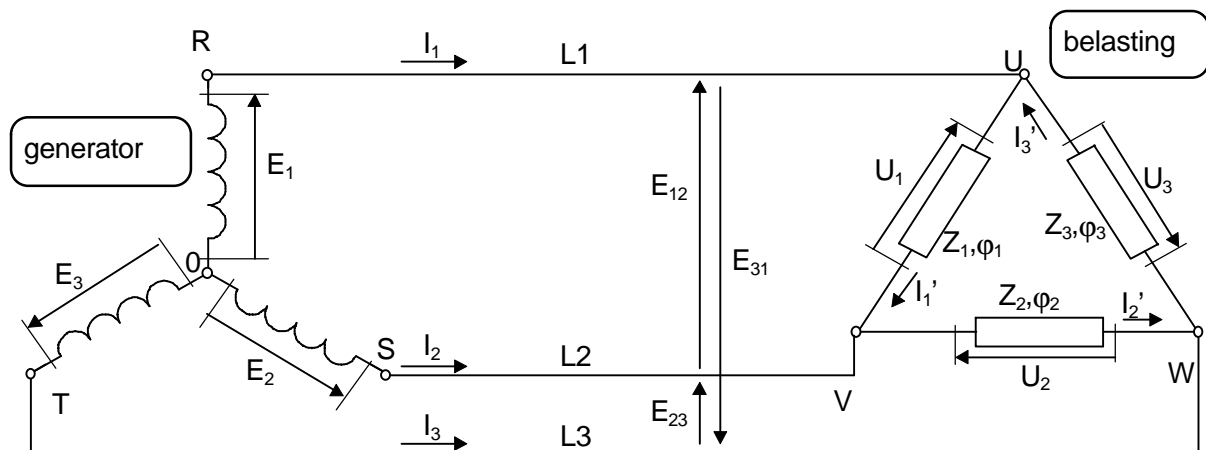
2.5 Schakeling van driefasige belastingen (generator in ster)

2.5.1 Belasting in ster



U_1, U_2, U_3 zijn de fasespanningen bij de belasting = fasespanningen E_1, E_2, E_3 generator

2.5.2 Belasting in driehoek



U_1, U_2, U_3 zijn de fasespanningen bij de belasting = lijnspanningen E_{12}, E_{23}, E_{31} generator

2.6 Vermogen in driefasige systemen

2.6.1 Algemeen

Het totale actieve vermogen dat door de generator aan een belasting geleverd wordt, kan berekend worden uit de som van de actieve vermogens in elk van de takken van de belasting.

In elke tak kan het vermogen berekend worden uit :

$$P = U \cdot I \cdot \cos \mathbf{j}$$

(U, I = effectieve waarden)
(φ = hoek tussen U en I)

samen geeft dit :

$$\begin{aligned} P_{tot} &= P_1 + P_2 + P_3 \\ &= U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \mathbf{j}_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \mathbf{j}_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \cos \mathbf{j}_3 \end{aligned}$$

U_f en I_f zijn fasegrootheden !

2.6.2 Symmetrische belasting

Bij een symmetrische belasting zijn de drie elementen van de belasting identiek. We weten dan dat de spanningen, de stromen en de hoek φ tussen spanning en stroom in elke fase van de belasting even groot zijn.

De spanning over 1 element van de belasting noemen we de fasespanning U_f . De stroom door een element van de belasting is de fasestroom I_f .

Voor een symmetrische belasting geldt dus :

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_f$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_f$$

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_3 = \mathbf{j}$$

Vullen we dit in in de formule voor het vermogen, dan vinden we :

$$\begin{aligned} P_{tot} &= P_1 + P_2 + P_3 \\ &= U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \mathbf{j}_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \mathbf{j}_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \cos \mathbf{j}_3 \\ &= 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos \mathbf{j} \end{aligned}$$

In praktische schakelingen meten we meestal niet de fasestromen en -spanningen, maar is het veel eenvoudiger om de lijnstromen en lijnspanningen te meten. We hebben voor berekening van het vermogen best formules waar niet de fasestromen en spanningen, maar wel de lijnstromen en lijnspanningen kunnen ingevuld worden.

2.6.2.1 Sterschakeling

$$I = I_f \quad \text{en} \quad U = \sqrt{3} \cdot U_f$$

$$\Rightarrow P = 3 \cdot \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cdot \cos \mathbf{j} = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \mathbf{j}$$

U en I zijn lijngrootheden !

2.6.2.2 Driehoekschakeling

$$U = U_f \quad \text{en} \quad I = \sqrt{3} \cdot I_f$$

$$\Rightarrow P = 3 \cdot U \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot \cos \mathbf{j} = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \mathbf{j}$$

U en I zijn lijngrootheden !

Onafhankelijk of we een ster- of driehoekschakeling hebben, kunnen we het vermogen met dezelfde formule uit **lijnspanningen en -stromen** berekenen.

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \mathbf{j} \quad [W]$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \mathbf{j} \quad [VAR] \quad \text{voor symmetrische belastingen !}$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \quad [VA]$$

Voor asymmetrische belastingen moeten we de vermogens in elk van de drie takken berekenen en dan optellen. (zie algemeen)

$$P_{tot} = P_1 + P_2 + P_3 \\ = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \mathbf{j}_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \mathbf{j}_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \cos \mathbf{j}_3$$

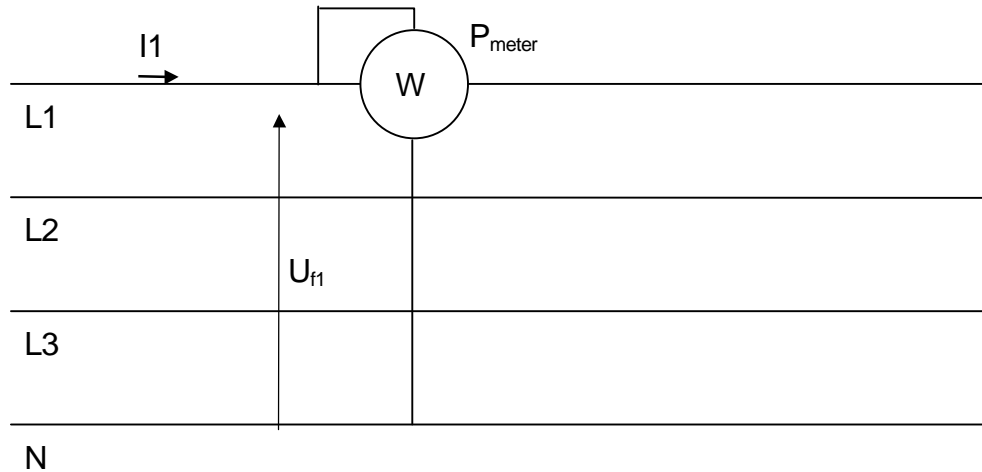
$$Q_{tot} = U_1 \cdot I_1 \cdot \sin \mathbf{j}_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \sin \mathbf{j}_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \sin \mathbf{j}_3$$

$$S_{tot} = U_1 \cdot I_1 + U_2 \cdot I_2 + U_3 \cdot I_3$$

2.6.3 Meten van actief vermogen

2.6.3.1 Driefasennet met nulgeleider en symmetrische belasting

In deze situatie kunnen we het vermogen berekenen uit de meting met 1 Watt-meter.



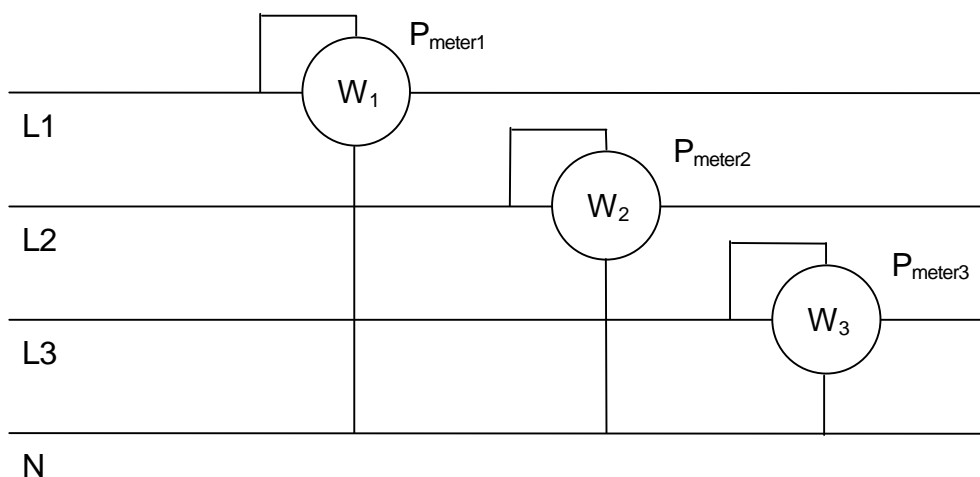
$$P_{meter} = U_f \cdot I \cdot \cos \phi = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cdot \cos \phi$$

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \phi = 3 \cdot P_{meter}$$

$$P = 3 \cdot P_{meter}$$

2.6.3.2 Driefasennet met nulgeleider en asymmetrische belasting

één Watt-meter volstaat niet meer : omdat het vermogen in elke fase verschillend kan zijn, moeten we drie Watt-meters gebruiken.

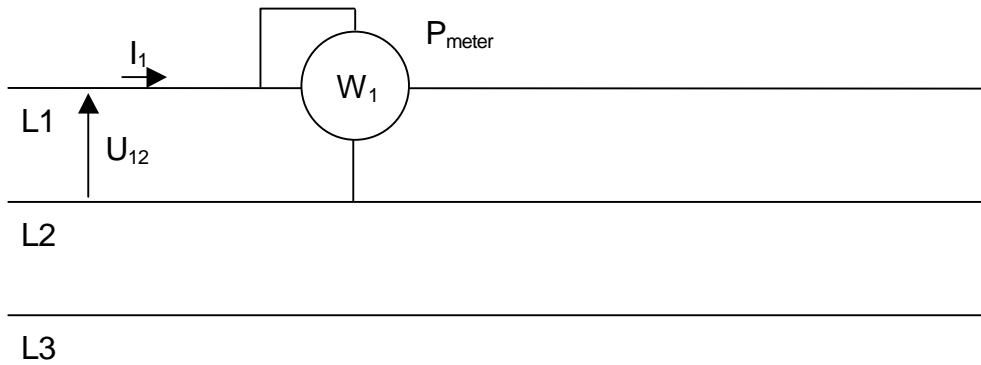


$$P = P_{meter1} + P_{meter2} + P_{meter3}$$

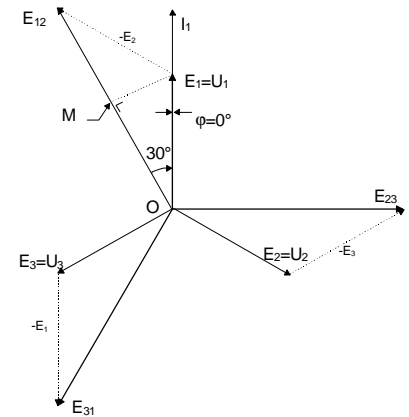
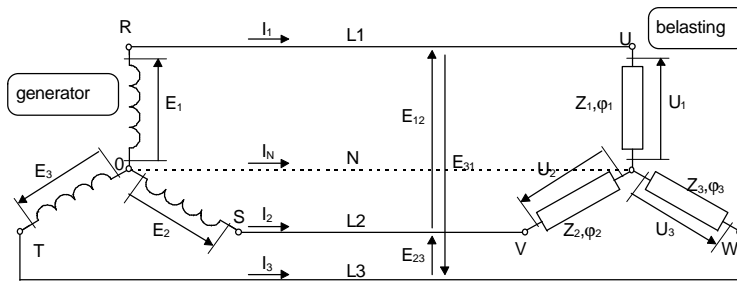
$$\text{immers : } P_{meter1} = I_1 \cdot U_{f1} \cdot \cos \phi = \frac{U_1}{\sqrt{3}} \cdot I_1 \cdot \cos \phi$$

2.6.3.3 Driefasennet zonder nulgeleider en symmetrische belasting

methode 1 enkel voor Ohmse belasting !!!



Belasting in ster $\varphi=0^\circ$

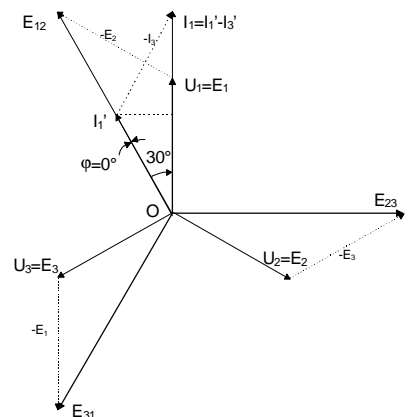
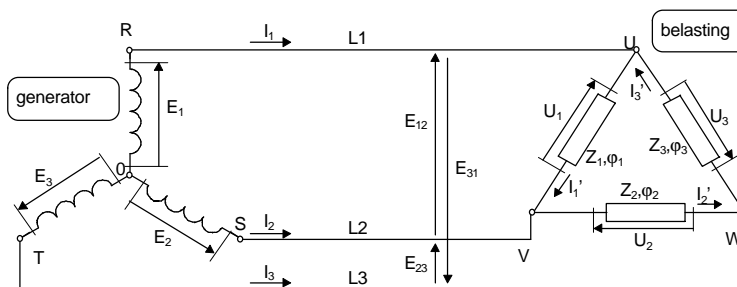


$$P_{meter} = I_1 \cdot U_{12} \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot U_{12} \cdot I_1$$

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos j$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 2 \cdot P_{meter}}$$

Belasting in driehoek $\varphi=0^\circ$

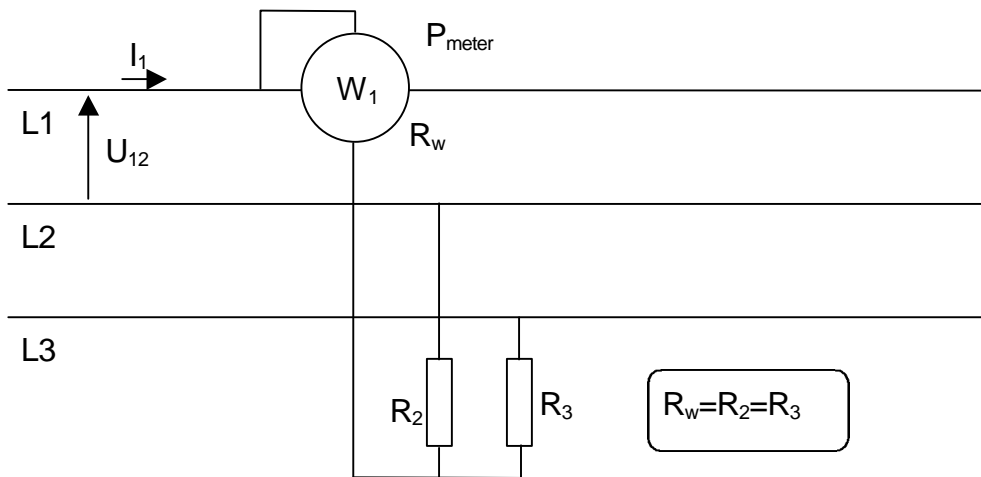


$$P_{meter} = I_1 \cdot U_{12} \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot U_{12} \cdot I_1$$

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos j$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 2 \cdot P_{meter}}$$

methode 2 : met kunstmatig sterpunt



R_w = inwendige weerstand van de spanningsspoel van de W-meter.

Indien $R_w=R_2=R_3$, dan vormen we een ster-punt, waarvan de ster op nulpotentialaal komt. We creëren dus een kunstmatig nulpunt. De spanningsspoel van de W-meter meet nu een fasespanning.

$$P_{meter} = U_f \cdot I = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I$$

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = 3 \cdot P_{meter}$$

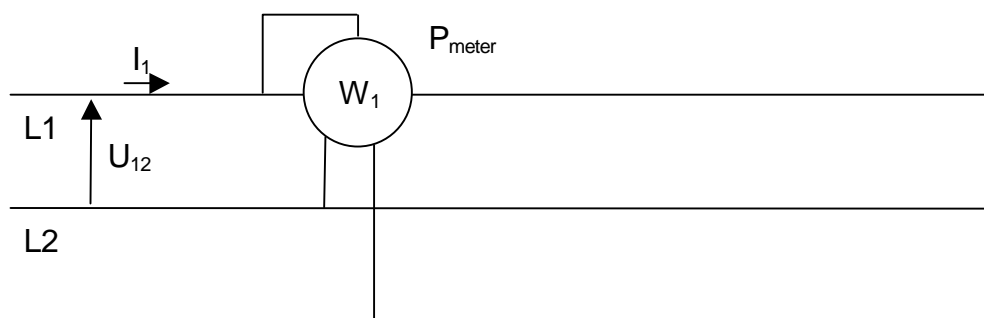
$$P = 3 \cdot P_{meter}$$

voordeel methode 2 :

spanningsspoel W-meter meet slechts de fasespanning (=lijnspanning / $\sqrt{3}$)

methode 3 : met driefasige W-meter

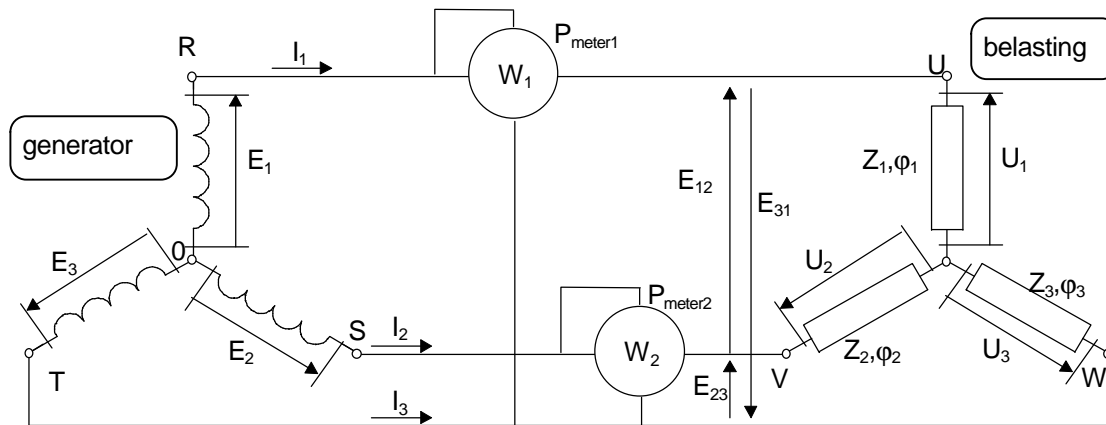
$$P = P_{meter}$$



2.6.3.4 Driefasennet zonder nulgeleider en asymmetrische belasting

Aron-schakeling

1. Belasting in ster



$$P = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3$$

$$\text{met } I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = -I_1 - I_2$$

$$P = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 - E_3 \cdot I_1 - E_3 \cdot I_2$$

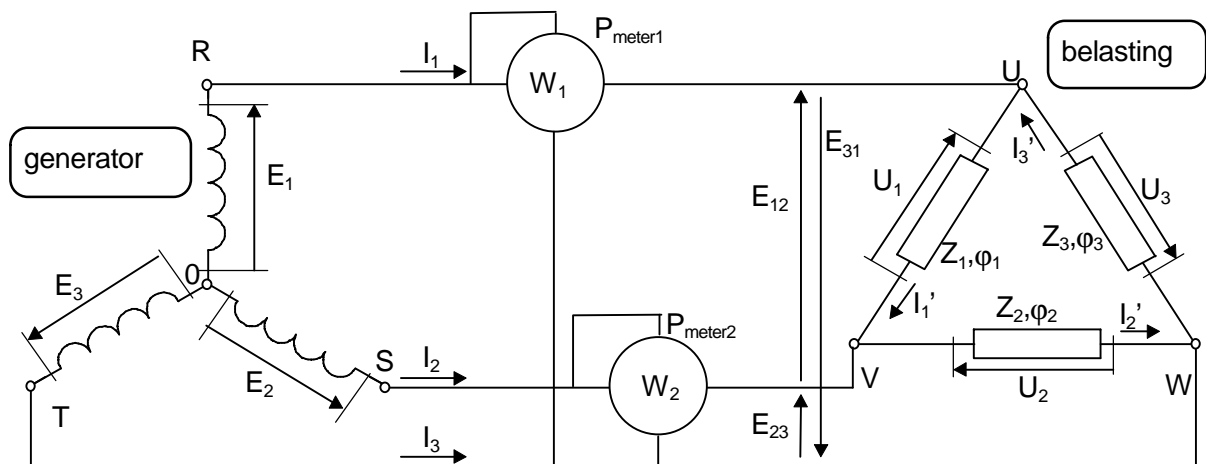
$$P = (E_1 - E_3) \cdot I_1 + (E_2 - E_3) \cdot I_2$$

$$P = E_{13} \cdot I_1 + E_{23} \cdot I_2$$

$$P = P_{\text{meter1}} + P_{\text{meter2}}$$

Indien een nulgeleider aanwezig is, kan niet meer gezegd worden dat $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

2. Belasting in driehoek



$$P = E_{12} \cdot I_1' + E_{23} \cdot I_2' + E_{31} \cdot I_3'$$

$$\text{met } E_{12} + E_{23} + E_{31} = 0 \Rightarrow E_{12} = -E_{23} - E_{31}$$

$$P = -E_{23} \cdot I_1' - E_{31} \cdot I_1' + E_{23} \cdot I_2' + E_{31} \cdot I_3'$$

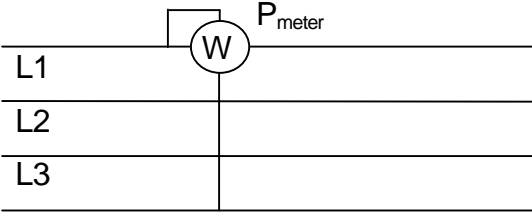
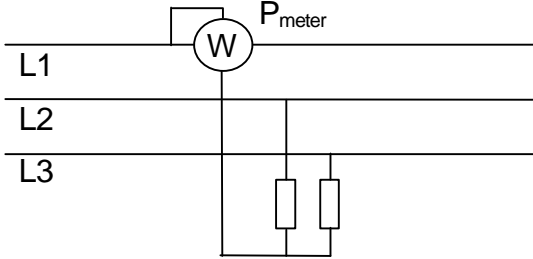
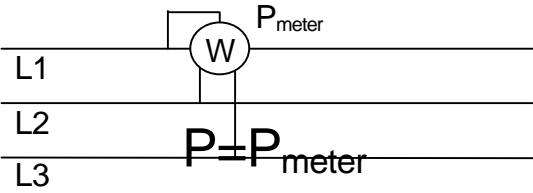
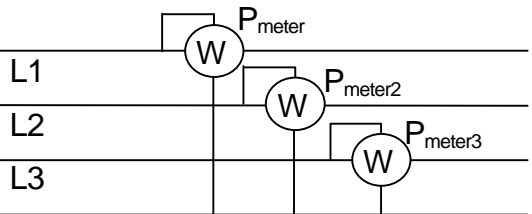
$$P = E_{23} \cdot (I_2' - I_1') + E_{31} \cdot (I_3' - I_1')$$

$$P = E_{23} \cdot I_2 + E_{13} \cdot I_1$$

$$P = P_{\text{meter1}} + P_{\text{meter2}}$$

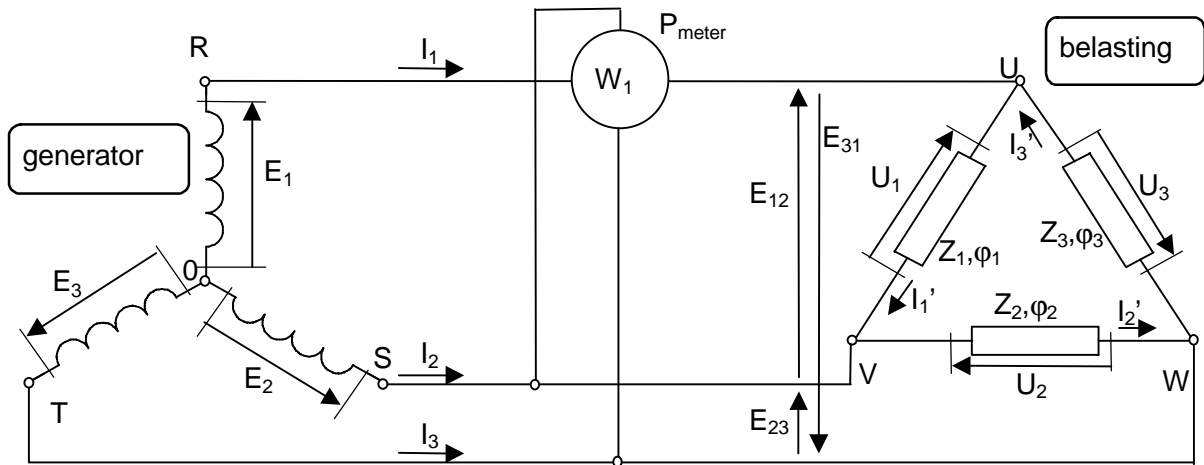
⇒ Aron - schakeling is altijd geldig op voorwaarde dat er geen nulgeleider aanwezig is !!!

Overzichtstabel meten van actief vermogen

	met nulgeleider	zonder nulgeleider
s y m m e t r i s c h	<p>1 W-meter</p>  <p style="text-align: center;">$P = 3 \cdot P_{\text{meter}}$</p>	<p>1 W-meter met sterpunt</p>  <p style="text-align: center;">$P = 3 \cdot P_{\text{meter}}$</p> <p style="text-align: center;">of 3-f W-meter</p>  <p style="text-align: center;">$P = P_{\text{meter}}$</p>
	a s y m m e t r i s c h	<p>3 W-meters</p>  <p style="text-align: center;">$P = P_{\text{meter1}} + P_{\text{meter2}} + P_{\text{meter3}}$</p>

2.6.4 Meten van reactief vermogen

2.6.4.1 Driefasennet zonder nulgeleider, symmetrisch belast



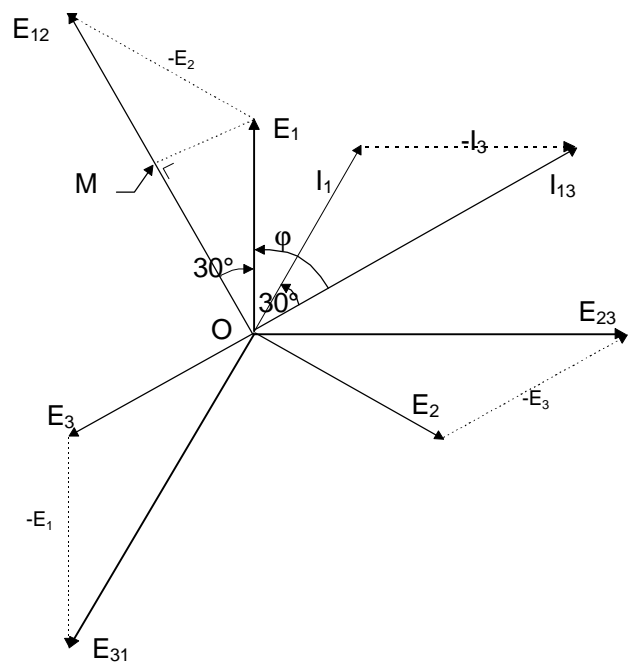
$$P_{meter} = E_{23} \cdot I_1 \cdot \cos(\text{hoek tussen } E_{23} \text{ en } I_1)$$

$$= U \cdot I \cdot \cos(90^\circ - j)$$

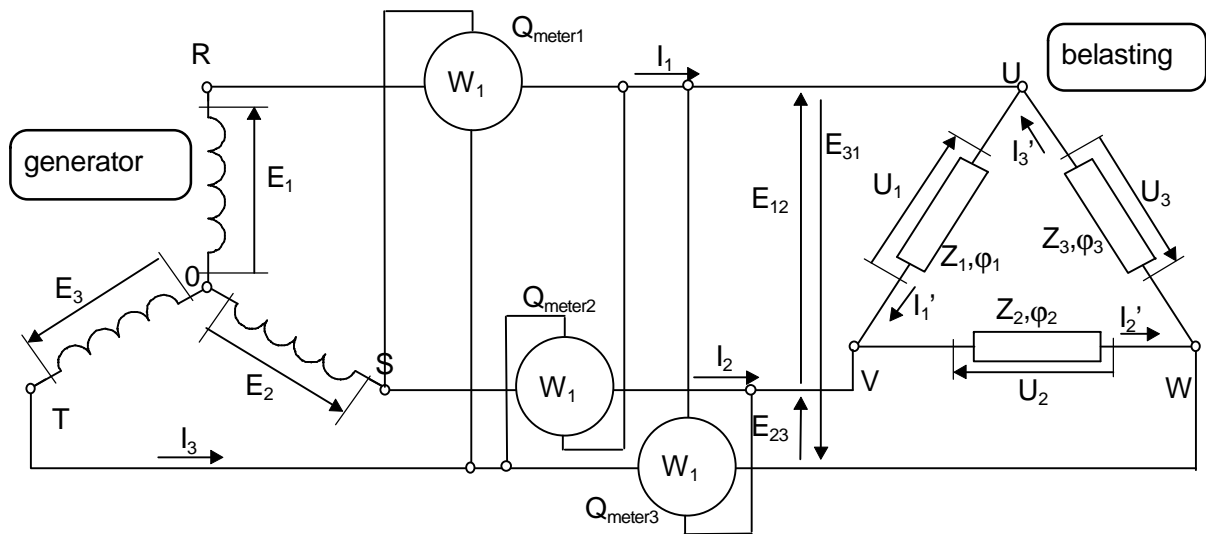
$$= U \cdot I \cdot \sin j$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin j$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot P_{meter}$$



2.6.4.2 Driefasennet zonder nulgeleider en asymmetrische belasting



$$Q = \frac{P_{meter1} + P_{meter2} + P_{meter3}}{\sqrt{3}}$$

Bij een symmetrische belasting zou dit geven :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{P_{meter1} + P_{meter2} + P_{meter3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{U \cdot I \cdot \sin j + U \cdot I \cdot \sin j + U \cdot I \cdot \sin j}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} U \cdot I \cdot \sin j \end{aligned}$$

2.7 Nulpuntsverplaatsing

2.7.1 Inleiding

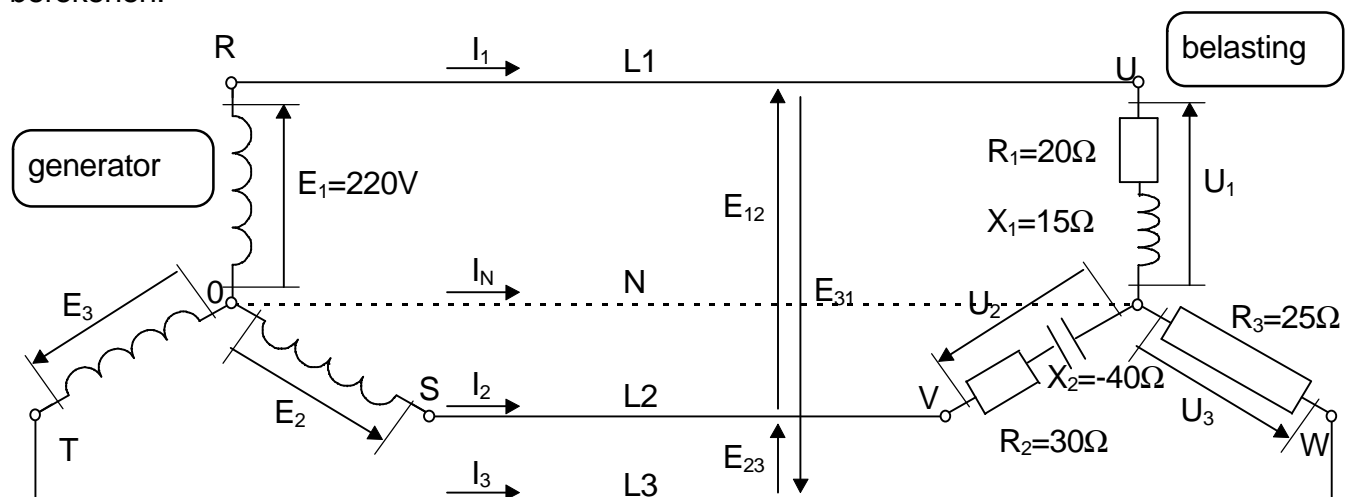
Bij een driefasige belasting in ster met nulgeleider, zal het nulpunt van de belasting steeds op de nulpotentialaal zitten. De spanning over elk van de takken in de belasting is dan ook gelijk aan de overeenkomstige fasespanning van de generator.

Bij een symmetrische belasting is de stroom in de nulgeleider gelijk aan nul. ($I_N = I_1 + I_2 + I_3 = 0$) De nulgeleider is in een dergelijke situatie overbodig.

Bij een asymmetrische belasting zal de stroom in de nulgeleider niet gelijk aan nul zijn. Een onderbreking van de nulgeleider zal dan ook invloed hebben op de stromen en spanningen in de ganse kring. Tussen de sterpunten van generator en belasting zal een spanningsverschil ontstaan, nulpuntsverplaatsing genoemd.

2.7.2 Asymmetrische belasting in ster met nulgeleider

In deze schakeling zal geen nulpuntsverplaatsing kunnen ontstaan. In het volgende voorbeeld wordt getoond hoe we stromen en spanningen in deze schakeling kunnen berekenen.



Impedanties

$$\bar{Z}_1 = 20 + 15j \Rightarrow Z_1 = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\Omega$$

$$\bar{Z}_2 = 30 - 40j \Rightarrow Z_2 = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\Omega$$

$$\bar{Z}_3 = 25 + 0j \Rightarrow Z_3 = 25\Omega$$

Spanningen

$$\bar{E}_1 = j \cdot 220 = 0 + j \cdot 220 = 220 \angle 90^\circ$$

$$\bar{E}_2 = 220 \cdot \cos 30^\circ - j \cdot 220 \cdot \sin 30^\circ = 190 - j \cdot 110 = 220 \angle -30^\circ$$

$$\bar{E}_3 = -220 \cdot \cos 30^\circ - j \cdot 220 \cdot \sin 30^\circ = -190 - j \cdot 110 = 220 \angle -150^\circ$$

Faseverschuivingen

$$j_1 = \text{bgtg} \frac{15}{20} = 36,87^\circ$$

$$j_2 = \text{bgtg} \frac{-40}{30} = -53,13^\circ$$

$$j_3 = \text{bgtg} \frac{0}{25} = 0^\circ$$

Met nulgeleider geeft dit de volgende stromen :

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{220 \angle 90^\circ}{25 \angle 36,87^\circ} = 8,8 A \angle 53,13^\circ \quad \mathbf{j}_1 = 53,13^\circ$$

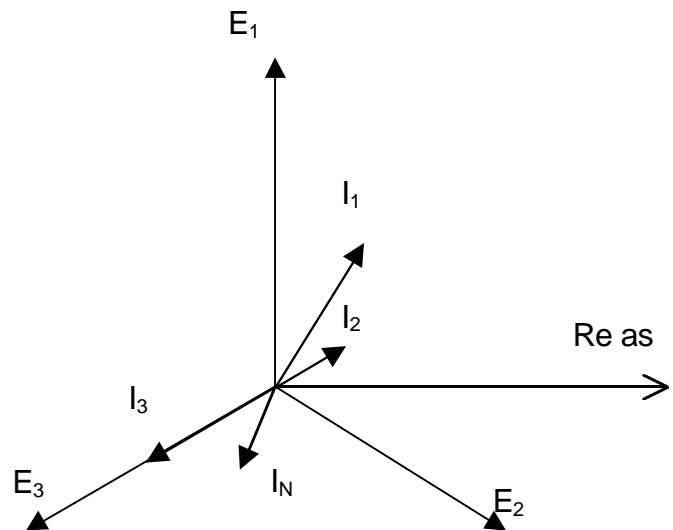
$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{220 \angle -30^\circ}{50 \angle -53,13^\circ} = 4,4 A \angle 23,13^\circ \quad \mathbf{j}_2 = 23,13^\circ$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{220 \angle -150^\circ}{25 \angle 0^\circ} = 8,8 A \angle -150^\circ \quad \mathbf{j}_1 = -150^\circ$$

De stroom in de nulgeleider kunnen we berekenen uit :

$$\begin{aligned} \bar{I}_N &= -\bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 \\ &= -(8,8 \cdot \cos 53,13^\circ + j \cdot 8,8 \cdot \sin 53,13^\circ) \\ &\quad - (4,4 \cdot \cos 23,13^\circ + j \cdot 4,4 \cdot \sin 23,13^\circ) \\ &\quad - (8,8 \cdot \cos(-150^\circ) + j \cdot 8,8 \cdot \sin(-150^\circ)) \\ &= -1,72 - j \cdot 4,36 \end{aligned}$$

$$\bar{I}_N = 4,68 A \angle 248,5^\circ$$



Door bijplaatsen van een element in één van de fasen van de verbruiker kunnen we de stroom in de nulgeleider gelijk aan nul maken. Het geheel lijkt dan op een symmetrische belasting. (alhoewel de drie impedanties en de drie stromen niet gelijk zijn.)

$I_N = 0$ als we in een van de fasen een extra stroom $I' = 4,68 \angle 248^\circ$ veroorzaken.

Dit kan door in fase twee of drie een element parallel te plaatsen. Voor fase 2 is de stroom I' minder dan 90° naijlend (spoel+weerstand), voor fase drie is de stroom minder dan 90° voorijlend (condensator+weerstand)

De impedantie van het element in fase drie bij te plaatsen kunnen we berekenen uit :

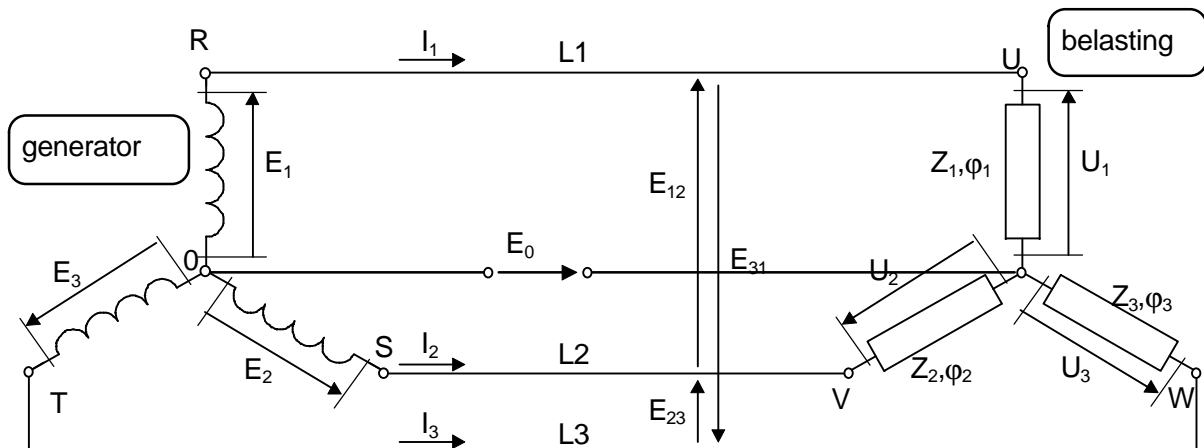
$$\bar{Z}' = \frac{\bar{U}_3}{\bar{I}'} = \frac{220 \angle 210^\circ}{4,68 \angle 248,5^\circ} = 47 \angle -38^\circ$$

$$\bar{Z}' = \frac{-190 - j \cdot 110}{1,72 + j \cdot 4,36} = 36,78 - j \cdot 29,26$$

$$R' = 36,78 \Omega$$

$$\bar{X}' = -j \cdot 29,26 \Omega = -j; \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow C' = 108,8 \mu F$$

2.7.3 Nulpuntsverplaatsing als de nulgeleider onderbroken wordt



De stromen in de lijnen zijn gelijk aan de fasestromen :

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_0}{\bar{Z}_1} = \bar{Y}_1 \cdot (\bar{E}_1 - \bar{E}_0)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_0}{\bar{Z}_2} = \bar{Y}_2 \cdot (\bar{E}_2 - \bar{E}_0)$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_0}{\bar{Z}_3} = \bar{Y}_3 \cdot (\bar{E}_3 - \bar{E}_0)$$

In het sterpunt aan belastingszijde of bij de generator zien we :

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{Y}_1(\bar{E}_1 - \bar{E}_0) + \bar{Y}_2(\bar{E}_2 - \bar{E}_0) + \bar{Y}_3(\bar{E}_3 - \bar{E}_0) = 0$$

$$\boxed{\bar{E}_0 = \frac{\bar{Y}_1 \cdot \bar{E}_1 + \bar{Y}_2 \cdot \bar{E}_2 + \bar{Y}_3 \cdot \bar{E}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3}}$$

De klemspanningen aan belastingszijde kunnen berekend worden uit :

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_1 = \bar{E}_1 - \bar{E}_0$$

$$\bar{U}_2 = \bar{I}_2 \cdot \bar{Z}_2 = \bar{E}_2 - \bar{E}_0$$

$$\bar{U}_3 = \bar{I}_3 \cdot \bar{Z}_3 = \bar{E}_3 - \bar{E}_0$$

voorbeeld nulpuntsverplaatsing

We nemen de schakeling die we eerder met nulgeleider bestudeerd hebben, en onderbreken nu de nulgeleider.

De admittanties in de drie kringen zijn :

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{\bar{Z}_1} = \frac{1}{20+15j} = \frac{1(20-j.15)}{20^2+15^2} = 0,032 - j.0,024 \quad \text{Siemens}$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{30-40j} = \frac{1(30+j.40)}{30^2+40^2} = 0,012 + j.0,016 \quad \text{Siemens}$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{1}{\bar{Z}_{31}} = \frac{1}{25} = 0,04 \quad \text{Siemens}$$

De fasespanningen van de generator zijn :

$$\bar{E}_1 = j.220 = 0 + j.220 = 220 \angle 90^\circ$$

$$\bar{E}_2 = 220 \cdot \cos 30^\circ - j.220 \cdot \sin 30^\circ = 190 - j.110 = 220 \angle -30^\circ$$

$$\bar{E}_3 = -220 \cdot \cos 30^\circ - j.220 \cdot \sin 30^\circ = -190 - j.110 = 220 \angle -150^\circ$$

Hieruit berekenen we E_0

$$\bar{E}_0 = \frac{\bar{Y}_1 \cdot \bar{E}_1 + \bar{Y}_2 \cdot \bar{E}_2 + \bar{Y}_3 \cdot \bar{E}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_0 &= \frac{j.220 \cdot (0,032 - j.0,024) + (190 - j.110) \cdot (0,012 + j.0,016) + (-190 - j.110) \cdot 0,04}{0,084 - j.0,08} \\ &= 15,4 + j.53,8 \end{aligned}$$

$$|E_0| = 56V$$

We berekenen ook de stromen :

$$\bar{I}_1 = \bar{Y}_1 \cdot (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) = (0,032 - j.0,024) \cdot (j.220 - 15,4 - j.53,8) = 3,5 + j.5,7$$

$$\bar{I}_2 = \bar{Y}_2 \cdot (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) = (0,012 + j.0,016) \cdot (190 - j.110 - 15,4 - j.53,8) = 4,72 + j.0,84$$

$$\bar{I}_3 = \bar{Y}_3 \cdot (\bar{E}_3 - \bar{E}_0) = 0,04 \cdot (-190 - j.110 - 15,4 - j.53,8) = -8,24 - j.6,5$$

De klemspanningen berekenen we uit $U = I \cdot Z$ of uit $U = E - E_0$

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_1 = \bar{E}_1 - \bar{E}_0 = j.220 - 15,4 - j.53,8 = -15,4 + j.166,8$$

$$\bar{U}_2 = \bar{I}_2 \cdot \bar{Z}_2 = \bar{E}_2 - \bar{E}_0 = 190 - j.110 - 15,4 - j.53,8 = 175,2 - j.163,6$$

$$\bar{U}_3 = \bar{I}_3 \cdot \bar{Z}_3 = \bar{E}_3 - \bar{E}_0 = -190 - j.110 - 15,4 - j.53,8 = -205,9 - j.163,8$$

De grootte van de klemspanningen zijn dan :

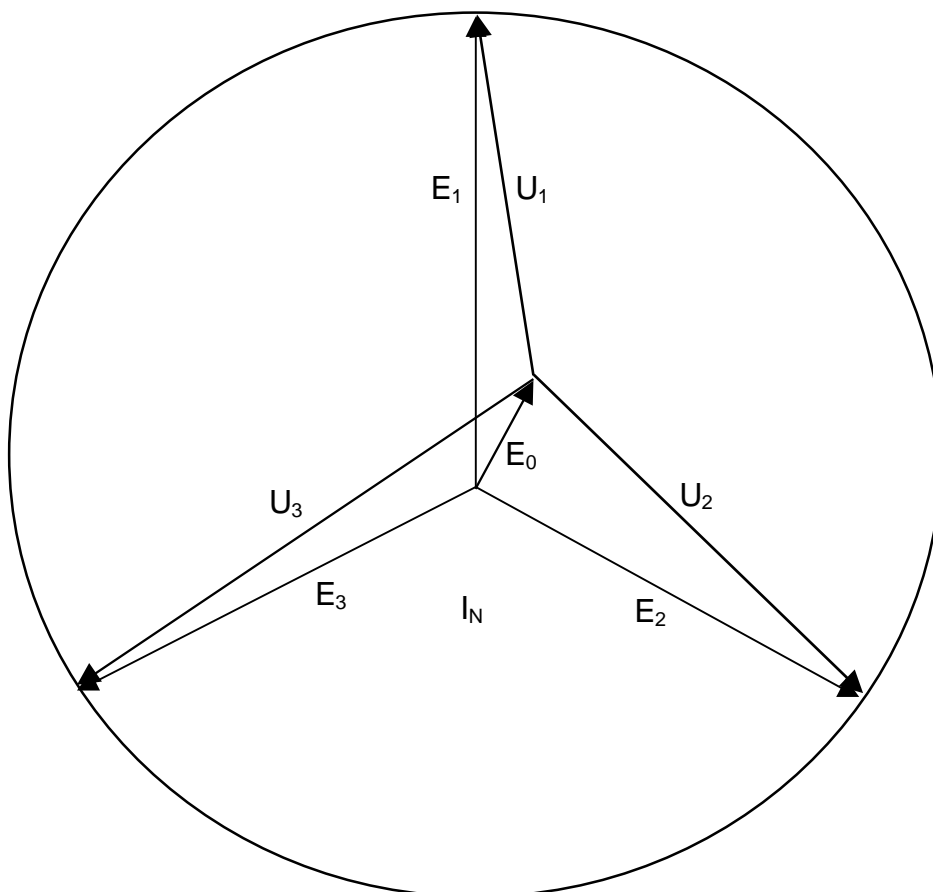
$$|U_1| = \sqrt{15,4^2 + 166,7^2} = 167V$$

$$|U_2| = \sqrt{175,2^2 + 163,6^2} = 239,5V$$

$$|U_3| = \sqrt{205,9^2 + 163,8^2} = 263,75V$$

waaruit we konkluderen dat de belasting met de grootste impedantie (kleinste verbruiker) de grootste spanning krijgt (spanningsstijging). De spanning op de grootste verbruikers daalt beneden de fasespanningen van de generator.

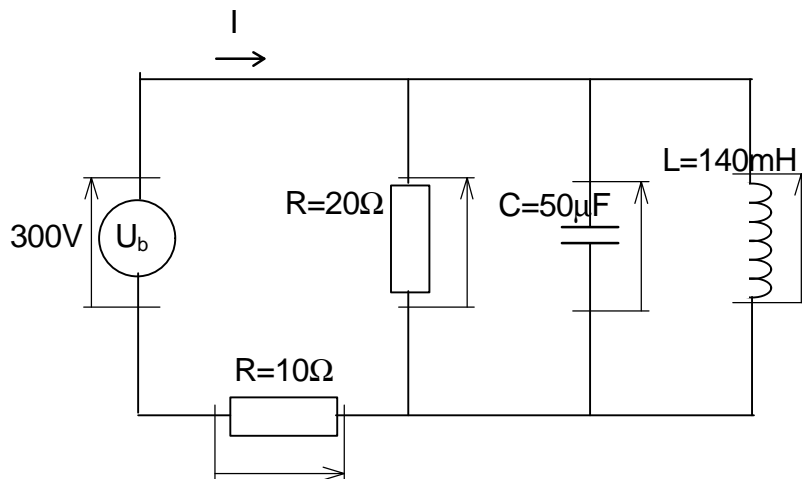
In het vectordiagram zien we dat het nulpunt aan de belastingszijde verschuift ten opzichte van dat van de generator.



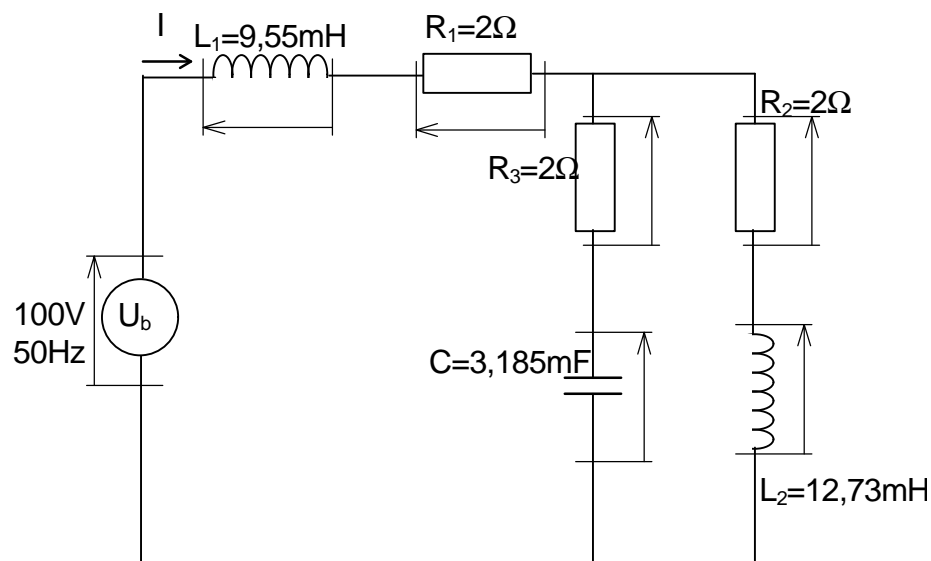
2.8 oefeningen wisselspanning

1. Door een spoel vloeit bij een gelijkspanning van 30V een stroom van 5A (in regimetoestand)
Bij een wisselspanning van 30V, 50Hz vloeit slechts 3A. Bereken L en de $\cos\varphi$.
($L=0,025\text{H}$, $\cos\varphi=0,6$)
2. In een keten met weerstand R_1 en inductantie L_1 wordt de frequentie van de bron gehalveerd. Wat moet de nieuwe weerstand R_2 zijn om dezelfde stroom te behouden ?
$$\left(R_2 = \sqrt{R_1^2 + \frac{3}{4} \cdot (\omega \cdot L_1)^2} \right)$$
3. Twee wisselspanningen met als maximale waarde 100V zijn 30° in fase verschoven en worden in serie geschakeld. Hierop sluit men een serieschakeling van $R=10\Omega$ en $L=31,85\text{mH}$ aan.
Bereken I als $f=50\text{Hz}$.
($I=9,66\text{A}$)
4. Een smoorsoel met weerstand $R=1\Omega$ en een zelfinductiecoëfficiënt $L=0,02\text{H}$ wordt aan een sinusvormige spanning van 80V, 40Hz gelegd. Bereken P, Q en S.
($P=243,4\text{W}$; $Q=1223\text{VAR}$; $S=1249\text{VA}$)
5. Een spoel met ohmse weerstand 8Ω neemt bij 110V - 50Hz een stroom op van 2A. Door het aanbrengen van een ijzeren kern daalt de stroom tot 0,4A. Bereken L zonder en met de ijzeren kern.
($L_1=0,173\text{H}$; $L_2=0,875\text{H}$)
6. Als men op een spanning van 100V, 50Hz een weerstand R aansluit, vloeit er een stroom van 10A. Schakelt men in serie met R een spoel, dan vloeit er 5A. Wanneer men nu nog een condensator in serie bijplaatst, vloeit er weer een stroom van 10A. Bereken C
($C=183\mu\text{F}$)
7. Welke condensator moet in serie met een spoel van 10Ω , 500mH geschakeld worden om een serieresonantieketen te bekomen als de frequentie 50 Hz is ?
Bereken de verhouding tussen de condensatorspanning en de bronspanning.
$$\left(\frac{U_c}{U} = 15,68 \right)$$
8. Bij serieresonantie is $U_c=U_L=a \cdot U$ met $a=\frac{\omega \cdot L}{R}$ en U = de bronspanning. Bewijs dit.

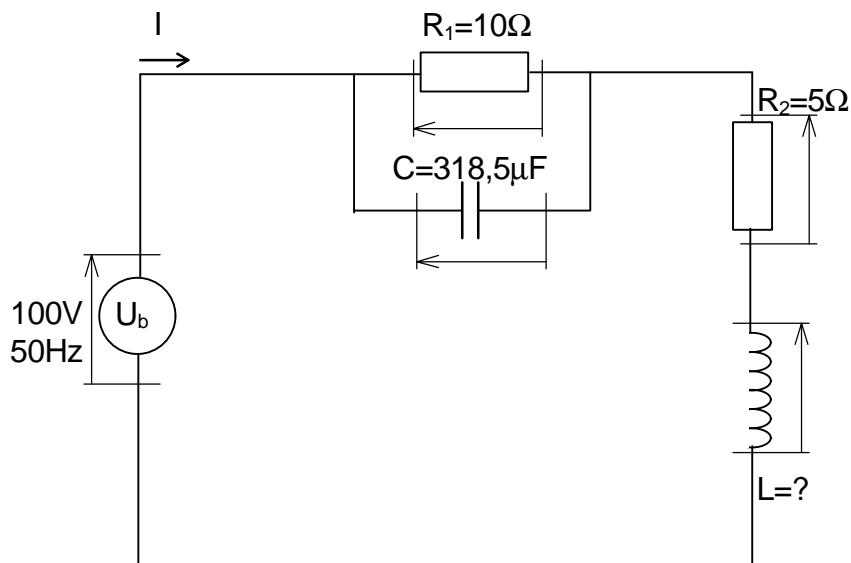
9. Op een wisselspanning van 100V sluit men een spoel ($R=1\Omega$, $L=158\text{mH}$) en een condensator ($C=63,7\mu\text{F}$) aan. Voor welke frequentie treedt resonantie op? (serie- en parallelresonantie) Bereken voor beide gevallen de totale stroom. Hoe groot zijn de deelspanningen bij serieresonantie?
 ($I_{\text{serie}} = 100\text{A}$; $U_{R \text{ serie}}=100\text{V}$; $U_{L \text{ serie}}=U_{C \text{ serie}}=500\text{V}$; $I_{\text{parallel}}=0,04\text{A}$; $I_{C \text{ parallel}}=2\text{A}$; $I_{L \text{ parallel}}=2\text{A}$)
10. Wanneer is de spanning over de weerstand van 20Ω maximaal? Hoe groot is deze spanning?



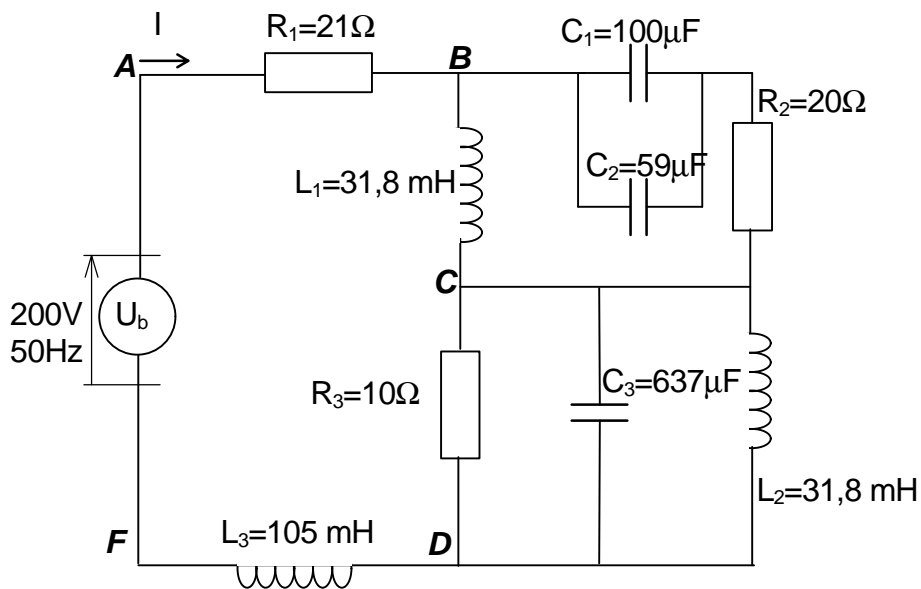
11. Bereken spanningen, stromen en het door de bron geleverde actieve, reactieve en schijnbare vermogen in de volgende kring.
 ($Z_{BC}=2\Omega$, $Z_{AC}=4+3j$; $I=4(4-3j)$; $P=1600\text{W}$; $Q=-1200\text{VAR}$; $S=2000\text{VA}$)



12. Voor welke waarden van L is de stroom in de keten maximaal ? Hoe groot is de stroom I dan ?
(L=16mH; I=10A)



13. Bereken voor de volgende gemengde keten :
- de totale impedantie \bar{Z}_{AF}
 - de stroom geleverd door de bron
 - de faseverschuiving tussen stroom en spanning van de bron
 - het actief vermogen
 - de stroom in de weerstand R (\bar{I}_R)



Oplossing : $\bar{Z}_{AF} = 30 + j.40$; $\bar{I} = 2,4 - j.3,2$; $\varphi = 53,13^\circ$; $P = 480W$; $Q = 640VAR$;
 $S = 800VA$; $I_{R3} = 2,83A$

2.9 oefeningen driefasige systemen

symmetrische belasting

1. Een symmetrische driefasige belasting in ster heeft $R=10\Omega$ per fase. Bereken de fasespanning, de fase- en lijnstromen indien de lijnspanning 415V bedraagt.
($U_f=239,6V$; $I_f=23,96A$; $I_L=23,96A$)
2. Een symmetrisch driefasige belasting in ster heeft per fase een inductieve impedantie $\omega L = 16\Omega$ en een ohmse weerstand $R = 12\Omega$. Bereken de impedantie per fase, de fase- en lijnstromen en het totaal actief vermogen indien de lijnspanning 415V - 50Hz bedraagt.
($Z_f = 20\Omega$; $I_f = I_L = 11,98A$; $P=5166,7W$)
3. Drie weerstanden, elk 20Ω , zijn in driehoek aangesloten op een net van 415V - 50 Hz.
Bereken de fasestromen, de lijnstromen en het totaal actief vermogen.
($I_f = 20A$; $I_L = 35,94A$; $P=25833,75W$)
4. Drie spoelen met $R=20\Omega$ en $X_L = 15\Omega$ zijn in driehoek aangesloten op een driefasig net van 415V - 50Hz.
Bereken de impedantie per fase, de lijnstromen en het totaal actief vermogen.
($Z_f = 25\Omega$; $I_L = 28,75A$; $P=16533,6W$)
5. Een symmetrische belasting in driehoek verbruikt 5kVA bij een $\cos\phi = 0,8$. Indien de lijnspanning 415V is, bereken dan het totaal actief vermogen, de fase- en lijnstromen.
($P=4kW$; $I_f = 4A$; $I_L=6,96A$)
6. Een 660V driefasige voeding wordt aangesloten op een symmetrische inductieve belasting. De lijnstroom bedraagt 1A en het totaal vermogen is 990W.
Bereken de ohmse en inductieve weerstand per fase bij een ster- en een driehoekschakeling.
(ster : $R = 330\Omega$; $X_L = 190,5\Omega$ driehoek : $R = 990\Omega$; $X_L = 571,6\Omega$)
7. Een symmetrische belasting in driehoek wordt aangesloten op een driefasige voeding 415V - 50Hz. Het opgenomen vermogen bedraagt 60kW bij een $\cos\phi=0,8$ inductief. Bereken de fase- en lijnstromen.
($I_f = 60,2A$; $I_L = 104,3A$)
8. Iedere fase van een driehoeksbelasting bestaat uit $R=4\Omega$ en $L=0,02H$ in serie. De lijnspanning is 440V - 50Hz.
Bereken de fase- en lijnstromen, het actief vermogen en het reactief vermogen.
($I_f = 59,1A$; $I_L = 102,3A$; $P=41913,7W$; $Q=65838VAR$)

9. Een driefasige generator, $3 \times 500\text{V} - 50\text{Hz}$, lever energie aan een inductieve belasting in driehoek bestaande uit (drie maal) $R=20\Omega$ in serie met $X_L = 15\Omega$. Bereken het actief en schijnbaar vermogen geleverd door de generator. ($P=24\text{kW}$; $S=30\text{kVA}$)
10. Een 11kV driefasige generator van 20MVA levert zijn nominaal vermogen bij een $\cos\phi=0,6$ inductief. Indien de financiële opbrengst van de electriciteitsproducent evenredig is met het geleverde actief vermogen (in kW), bereken dan de procentuele meeropbrengst als de $\cos\phi$ sijgt tot $0,85$. ($41,7\%$)
11. Een driefasige inductiemotor is in ster aangesloten op $3 \times 380\text{V} - 50\text{Hz}$. De lijnstroom is 10A en de $\cos\phi=0,5$. Bereken de capaciteit van drie in driehoek te schakelen condensatoren om de $\cos\phi$ op $0,8$ te brengen. ($C= 3 \times 23,8\mu\text{F}$ in driehoek)
12. Drie identieke impedanties $\bar{Z} = 8 + j.6$ zijn achtereenvolgens in ster en in driehoek aangesloten op een driefasige spanning van $3 \times 380\text{V} - 50\text{Hz}$. Bereken in beide gevallen de lijnstromen en het totaal actief, reactief en schijnbaar vermogen.
(ster : $I_1 = I_2 = I_3 = 21,9\text{A}$; $P=11552\text{W}$; $Q=8664\text{VAR}$; $S=14440\text{VA}$)
(driehoek : $I_1 = I_2 = I_3 = 66\text{A}$; $P=34656\text{W}$; $Q=25992\text{VAR}$; $S=43320\text{VA}$)
13. Een symmetrische driefasige belasting $3 \times 20\Omega \angle 90^\circ$ is in ster aangesloten op $3 \times 440\text{V} - 50\text{Hz}$.
Bereken de lijnstromen (polaire schrijfwijze) als $\bar{U}_1=440\text{V} \angle 90^\circ$
($\bar{I}_1=12,7\text{A} \angle 0^\circ$; $\bar{I}_2=12,7\text{A} \angle -120^\circ$; $\bar{I}_3=12,7\text{A} \angle 120^\circ$)
14. Een symmetrische belasting $3 \times 20\Omega \angle 90^\circ$ is in driehoek op $3 \times 440\text{V} - 50\text{Hz}$. aangesloten.
Bereken de lijnstromen (polaire schrijfwijze) als $\bar{U}_1=440\text{V} \angle 90^\circ$
($\bar{I}_{L1}=38,1\text{A} \angle -150^\circ$; $\bar{I}_{L2}=38,1\text{A} \angle 90^\circ$; $\bar{I}_{L3}=38,1\text{A} \angle -30^\circ$)

asymmetrische belasting

15. Op een net van $3 \times 346\text{V}$ (lijnspanning) sluit men tussen de nulleider en
- de eerste fasedraad : een weerstand R
 - de tweede fasedraad : een spoel $L = 55,1 \text{ mH}$
 - de derde fasedraad : een condensator $C = 46\mu\text{F}$
- Bereken de frequentie en de weerstand R opdat de stroom in de nulleider nul is.
Teken het vectordiagram.
($f = 100 \text{ Hz}$; $R = 20\Omega$)
16. Op een driefasensysteem met nulgeleider en fasespanningen van $180\text{V} - 50\text{Hz}$ is tussen de nulgeleider en defasen respectievelijk 80Ω , 60Ω en 120Ω aangesloten.
Bereken de stroom in de nulgeleider en teken spanningen en stromen in het complexe vlak.
Door de aansluiting van slechts één ideaal element tussen de nulgeleider en één fase kan men de stroom in de nulgeleider nul maken. Welk element moeten we hiervoor op welke plaats aansluiten ?
($C = 23\mu\text{F}$ tussen 1ste fase en de nulgeleider)
17. Op een driefasig net van 50Hz met nulgeleider en fasespanningen van 130V sluit men tussen de nulgeleider en
- de eerste fasedraad :
een weerstand $R_1 = 75\Omega$ en een spoel $L_1 = 0,318\text{H}$ in serie.
 - de tweede fasedraad :
een weerstand $R_2 = 120\Omega$ en een spoel $L_2 = 0,1592\text{H}$ in serie
 - de derde fasedraad :
een weerstand $R_3 = 25\Omega$ en een spoel $L_3 = 0,191\text{H}$
- Bereken het totaal opgenomen vermogen en de stroom in de nulgeleider.
Kan men het vermogen in deze schakeling meten met de Aronschakeling.
Teken spanningen en stromen in het complexe vlak.
($P = 301\text{W}$; $I_N = 1,04 \angle 82^\circ$; neen)
18. Bereken de klemspanningen van een ster-ster schakeling zonder nulgeleider met :
- in de eerste fase een weerstand $R_1 = 1000\Omega$
 - in de tweede fase een condensator $C_2 = 6\mu\text{F}$
 - in de derde fase een condensator $C_3 = 4\mu\text{F}$ in serie met weerstand $R_3 = 100\Omega$
- De lijnspanningen zijn 220V .
Teken een vectordiagram met klem- en fasespanningen.
($E_0 = 78,8\text{V}$; $U_1 = 174\text{V}$; $U_2 = 48,9\text{V}$; $U_3 = 183,8\text{V}$)

19. Bereken de spanningen en stromen in een asymmetrische belasting in ster zonder nulgeleider. De lijnspanningen zijn $3 \times 380\text{V} - 50\text{Hz}$. De belasting per fase is :
- fase 1 : $R_1 = 2\Omega$ in serie met $L_1 = 4,8\text{mH}$
 - fase 2 : $R_2 = 3\Omega$ in serie met $C_2 = 796\mu\text{F}$
 - fase 3 : $R_3 = 2,5\Omega$
- Teken de berekende spanningen en stromen in het complexe vlak.
 ($E_0 \cong 60\text{V}$; $U_1 = 167,5\text{V}$; $U_2 = 239,5\text{V}$; $U_3 = 263,75\text{V}$; $I_1 = 67\text{A}$; $I_2 = 47,9\text{A}$; $I_3 = 105,5\text{A}$)
20. Op een driefasig net van $3 \times 380\text{V} - 50\text{Hz}$ zijn drie weerstanden $R_1 = 10\Omega$; $R_2 = 14,65\Omega$; $R_3 = 20\Omega$ in ster met nulgeleider aangesloten. Bereken de lijnstromen en de stroom door de nulgeleider.
 ($I_{L1} = 22\text{A}$; $I_{L2} = 15\text{A}$; $I_{L3} = 11\text{A}$; $I_N = 9,65\text{A}$)
21. Bereken de drie lijnstromen en de vermogens P,Q en S indie de drie weerstanden $R_1 = 10\Omega$; $R_2 = 14,65\Omega$; $R_3 = 20\Omega$ in driehoek aangesloten zijn op het driefasige net van $3 \times 380\text{V} - 50\text{Hz}$.
 ($I_{L1} = 56,6\text{A}$; $I_{L2} = 39,2\text{A}$; $I_{L3} = 50,2\text{A}$; $P=31540\text{W}$; $Q=0\text{VAR}$; $S=31540\text{VA}$)
22. Een driefasige belasting wordt in driehoek aangesloten op $3 \times 120\text{V} - 50\text{Hz}$
- $$\bar{Z}_1 = 10\Omega \angle -90^\circ$$
- $$\bar{Z}_2 = 10\Omega \angle 53,2^\circ$$
- $$\bar{Z}_3 = 20\Omega \angle 0^\circ$$
- Bereken de lijnstromen en de vermogens.
 ($I_{L1} = 17,9\text{A}$; $I_{L2} = 8\text{A}$; $I_{L3} = 10,39\text{A}$; $P=1589\text{W}$; $Q=288\text{VAR}$; $S=1610\text{VA}$)